Remarques sur l'approche d'Alain Connes concernant le modèle standard en géométrie non-commutative

Daniel Kastler, Thomas Schücker

dédié à la mémoire de E. M. Polivanov

Dans les dernières années, Alain Connes a produit une interprétation remarquable du modèle standard (pour les secteurs électrofaibles et chromodynamiques) dans sa théorie des variétés riemanniennes de spin non-commutatives [1-4]. Tous les termes du lagrangien bosonique habituel sont obtenus via un analogue non-commutatif de l'algorithme de Yang-Mills dans lequel une courbure simple est attachée à une paire d'algèbres dans la dualité de Poincaré (viz. l'algèbre électrofaible $\mathcal{A} = C^\infty \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{H})$ et l'algèbre chromodynamique $\mathcal{B} = C^\infty \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbf{M}_3(\mathbb{C}))$ construisant un "espace non-commutatif" $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ qui incorpore les "degrés internes de liberté". La géométrie différentielle de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est spécifiée (d'une façon généralisant la spécification de la géométrie différentielle d'une spin^c-variété par son opérateur de Dirac) par un "K-cycle 4^+-sommable" (un $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-module de Kasparov) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{l}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}$, somme directe des espaces de Hilbert $\mathbb{Z}/2$-échelonnés leptonique et de quarks, sur lesquels agit aussi un opérateur de Dirac généralisé $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathrm{l}} \oplus \mathcal{D}_{\mathrm{q}}$. La représentation $\pi = \pi_l \oplus \pi_q$ de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sur le bimodule $\mathcal{H}_{\mathrm{l}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}$ se développe en une représentation du produit tensoriel $\Omega_D\mathcal{A} \otimes \Omega_D\mathcal{B}$ de leur "complexes de De Rham non-commutatifs" (des ensembles de formes différentielles quantiques). La théorie produit les quatre bosons de jauge habituels plus le boson de Higgs apparaissant comme un cinquième boson de jauge connecté avec le caractère discret. Pour des détails, nous nous référons à [5] et [8].

Le "schéma de Yang-Mills non-commutatif" consiste à "intégrer" le carré de la courbure quantique au moyen d'une trace $\underline{\tau_\mathcal{D}}$ sur les endomorphismes des formes quantiques dérivées de la trace $\tau_\mathcal{D} = Tr_\omega[\mathcal{D}^{-4}\pi(\cdot)]$ sur les formes quantiques construites via la trace de Dixmier et ont généralisé l'opérateur de Dirac. En fait, comme cette trace se sépare en traces partielles indépendantes selon les séparations naturelles de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, la combinaison convexe de ces traces partielles donne naissance à une famille convexe d'"intégrations" (dépendant de la séparation adoptée). La séparation maximale en sous-modules irréductibles produit le lagrangien du modèle standard habituel avec ses 18 paramètres libres. Un choix plus restreint naturel correspond à la séparation $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{l}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}$ en les espaces de Hilbert leptonique et de quark, avec des combinaisons convexes des traces possibles

$$\alpha_l \tau_{\mathcal{D}_l} + \alpha_q \tau_{\mathcal{D}_q}, \quad \alpha_l = \frac{1}{2}(1+x), \alpha_q = \frac{1}{2}(1-x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{1}$$

parmi lesquelles le choix symétrique $x = 0$ amène un lagrangien avec 4 paramètres de moins qu'habituellement (les paramètres libres sont les entrées de la matrice de masse des fermions plus une constante simple de couplage universel).

Centre de Physique théorique, CNRS - Luminy, BP 907, 13288 Marseille Cedex, et Université d'Aix-Marseille II et Université de Provence.

Traduction de l'article arxiv hep-th:0111234, par Denise Vella-Chemla, mars 2021.

De telles versions contraintes du modèle standard (naturelles tant qu'elles postulent des développements de l'"universalité fermionique") sont potentiellement intéressantes puisqu'elles contiennent plus d'information que le modèle standard habituel (ces modèles sont de type "unification", avec un Higgs unique, et sans termes croisés mettant en péril la stabilité du proton). Des prédictions physiques authentiques selon de telles lignes devraient bien sûr nécessiter une théorie des champs quantiques renormalisée - une étape non encore atteinte dans le niveau actuel purement classique (lagrangien), où la quantification habituelle et la renormalisation simplifiée détruiraient les contraintes et restitueraient les 18 paramètres libres habituels.

Avec ceci à l'esprit, il est, pourtant, peut-être intéressant, pour une première exploration des lagrangiens contraints et pour faire des spéculations, de regarder les résultats à un niveau arborescent. La trace de Dixmier (1) amène au lagrangien bosonique suivant (jauge et Higgs) [5]:[1]

$$\mathcal{L}_B = -A\mathbf{g}^a{}_{\mu\nu}\mathbf{g}_a{}^{\mu\nu} - B\mathbf{f}_{\mu\nu}\mathbf{f}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}C\mathbf{h}^s{}_{\mu\nu}\mathbf{h}_s{}^{\mu\nu} + 2L\mathbf{D}_\mu\Phi_j\mathbf{D}^\mu\Phi^j + K(\Phi_i\Phi^i - 1)^2, \tag{2}$$

présentant les courbures $\mathbf{g}, \mathbf{f}$ et $\mathbf{h}$ des respectivement $SU(3)$-, $U(1)$-, et $SU(2)$-connexions avec les une-formes $\mathbf{c}, \mathbf{a}$, et $\mathbf{c}$, et le covariant $\mathbf{D}_\mu\Phi_j$, où

$$\mathbf{D}_\mu = \nabla_\mu + i(\mathbf{a}_\mu - \mathbf{b}^s{}_\mu\frac{\tau_s}{2}). \tag{3}$$

avec les constantes A à travers K [2] données par

$$\begin{cases} A = \frac{N}{2}(1-x) \\ B = \frac{N}{3}(10-x) \\ C = N(2-x) \\ L = Tr[\alpha_l\mu_e + 3\alpha_q(\mu_u+\mu_d)] \simeq \frac{3}{2}(1-x)m_t^2 \\ K = \frac{3}{2}Tr[\alpha_l\mu_e^2 + 3\alpha_q(\mu_u^2+\mu_d^2)] + 3\alpha_q Tr[\mu_u\mu_d] \\ \qquad -[1/(\alpha_l+6\alpha_q) + 1/(2\alpha_l+6\alpha_q)]N^{-1}L^2 \\ \quad \simeq \frac{9}{4}(1-x)m_t^4 - \frac{9}{8}(1-x)\frac{3x^2-8x+5}{5x^2-17x+14}m_t^4 \end{cases} \tag{4}$$

où $\mu_e = M_eM_e^*, \mu_u = M_uM_u^*, \mu_d = M_dM_d^*, M_e, M_u, M_d$ les matrices de masse respectives des leptons chargés, les quarks les plus élevés et les quarks les plus bas. Nous indiquons des valeurs approximatives en fonction de la masse élevée m_t supposée dominante.

Nous rappelons l'expression de la partie jauge et Higgs du lagrangien du modèle standard traditionnel :

$$\mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Higgs} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}^a{}_{\mu\nu}\mathcal{G}_a{}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^s{}_{\mu\nu}W_s{}^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \frac{\mu^2}{v^2}(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2})^2, \tag{5}$$

[1]Dans ce qui suit, nous ne nous préoccupons pas du fait que le lagrangien traditionnel est lorentzien alors que le lagrangien NCDG est euclidien, puisque ce point ne porte pas sur les constantes de couplage.

[2]Les valeurs approximatives pour L et K sont valides à 1% près, ce qui est consistant avec le fait de négliger toutes les masses de fermions contre la masse top.

avec la dérivée covariante D_μ donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_1}{2}B_\mu - ig_2 {W^s}_\mu \frac{\tau_s}{2}. \tag{6}$$

Nous trouvons pratique d'utiliser les paramètres de base suivants du modèle standard - numériquement tous connus excepté μ :

$$\begin{cases} g = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \\ \cos\theta_W = g_2/g \\ \mu \\ v \end{cases}. \tag{7}$$

En fonction du dernier, on a $g_1 = g\sin\theta_W, g_2 = g\cos\theta_W$, et les masses suivantes :

$$\begin{cases} m_H = \sqrt{2}\mu \\ m_Z = \frac{1}{2}vg \\ m_W = m_Z\cos\theta_W = \frac{1}{2}vg_2 \end{cases} \tag{8}$$

alors que le potentiel de Higgs est donné par :

$$V_{Higgs} = \frac{\mu^2}{v^2}(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2})^2. \tag{9}$$

L'identification des dérivées covariantes (3) et (6) est synonyme avec les identifications :

$$\begin{cases} \mathbf{c} = g_3\mathcal{G} \\ \text{dans les composants } {\mathbf{c}^a}_\mu = g_3 {\mathcal{G}^a}_\mu \quad a = 1, ..., 8, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = -\frac{1}{2}g_1 B \\ \text{dans les composants } \mathbf{a}_\mu = g_1 B_\mu, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \mathbf{b} = g_2 W \\ \text{dans les composants } {\mathbf{b}^s}_\mu = g_2 {W^s}_\mu, \quad s = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{12}$$

impliquant

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_1 B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_2\cos\theta_W B_{\mu\nu} \\ {\mathbf{h}^s}_{\mu\nu} = g_2 {W^s}_{\mu\nu}, \qquad \text{s=1,2,3,} \\ {\mathbf{g}^a}_{\mu\nu} = g_3 {\mathcal{G}^a}_\mu, \qquad \text{a=1,...8} \end{cases} \tag{13}$$

En supposant que ϕ et Φ diffèrent d'une constante (insensible à la multiplication de ϕ resp. Φ, par des constantes), la dernière découle de la comparaison des quatrièmes termes de (2) et (5), amenant

$$\frac{v}{\sqrt{2}}\Phi = \phi. \tag{14}$$

En insérant (10) par (14) dans (2), on aboutit à :

$$C^{-1}g_2^{-2}\mathcal{L}_B = -\tfrac{A}{C}\tfrac{g_3{}^2}{g_2^2}\mathcal{G}^a{}_{\mu\nu}\mathcal{G}_a{}^{\mu\nu} - \tfrac{B}{4C}\tan^2\theta_W B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}W^s{}_{\mu\nu}W_s{}^{\mu\nu} + \tfrac{4L}{Cv^2g_2^2}\left\{(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \tfrac{K}{v^2L}\left(\phi^*\phi - \tfrac{v^2}{2}\right)^2\right\}, \tag{15}$$

que nous identifions avec (5). L'dentification des premiers termes amène :

$$g_3 = \frac{1}{2}(C/A)^{1/2}g_2. \tag{16}$$

L'identification des seconds termes fixe l'angle de Weinberg :

$$\tan^{-2}\theta_W = \frac{B}{C} \quad \text{d'où} \quad \sin^2\theta_W = \frac{C}{B+C} \tag{17}$$

L'identification des termes du milieu fixe le rapport de la masse m_W du W-boson à la masse m_t du quark :

$$v^2g_2^2 = 4m_W^2 = 4\frac{L}{C} \tag{18}$$

d'où

$$m_W = (L/C)^{1/2}. \tag{18a}$$

L'identification du rapport des derniers termes fixe le rapport de la masse m_H du boson de Higgs à la masse m_t du quark top :

$$\mu^2 = K/L, \tag{19}$$

d'où

$$m_H = (2K/L)^{1/2}. \tag{19a}$$

Insérer (3) dans ces relations donne

$$g_3 = \frac{1}{2}[\frac{4-2x}{1-x}]^{1/2}g_2 \quad (= g_2 \quad \text{pour} \quad x = 0), \tag{20}$$

$$\sin^2\theta_W = \frac{3(1-x/2)}{8-2x} \quad (= \frac{3}{8} \quad \text{pour} \quad x = 0), \tag{21}$$

et, *en négligeant toutes les masses des fermions contre la masse top* m_t:

$$m_W = \left(\frac{3(1-x)}{4N(1-x/2)}\right)^{1/2} m_t \quad (= \frac{1}{2}m_t \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad N = 3) \tag{22}$$

et

$$m_H = \left(3 - \frac{3}{2}\frac{3x^2-8x+5}{5x^2-17x+14}\right)^{1/2} m_t. \tag{23}$$

Les relations (20) et (21) ont une saveur de “grande unification”. Nous montrons maintenant que, étant données les relations (10), (11), (12) entre les champs et les formes de connexion, ces relations procèdent directement du choix (1) de la trace de Dixmier avec le contenu de jauge du K-cycle leptonique et quark $\mathcal{H}_l$ et $\mathcal{H}_q$. Concernant le dernier, nous rappelons les définitions des espaces de Hilbert leptonique et quark Hilbert (cf. [4],[5]) : on a $\mathcal{H}_l = L^2(\mathbf{S_M}) \otimes H_l$ et $\mathcal{H}_q = L^2(\mathbf{S_M}) \otimes H_q$, où $\mathbf{S_M}$ est le fibré de spin, et :

$$H_l = H_{lR} \oplus H_{lL} \tag{24}$$

avec [3]

$$\begin{cases} H_{l_R} = \mathbb{C}^1_R \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}^1_R \text{ fibré par } \; e_R, \\ \\ H_{l_L} = \mathbb{C}^2_L \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}^1_R \text{ fibré par } \; \nu_L, e_L \end{cases}, \tag{25}$$

respectivement :

$$H_q = H_{q_R} \oplus H_{q_L} \tag{26}$$

avec

$$\begin{cases} H_{q_R} = \mathbb{C}^2_R \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}^2_R \text{ fibré par } \; u_R, d_R, \\ \\ H_{q_L} = \mathbb{C}^2_L \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}^2_L \text{ fibré par } \; u_L, d_L, \end{cases} \tag{27}$$

Les représentants matriciels T^3_l, C^3_l, Q_l of T^3, C^3 agissent sur l'espace leptonique interne $\mathbb{C}^1_R \oplus \mathbb{C}^2_l$, ainsi que la charge électrique Q [4] , où $iT^3 \in SU(2)$, $iC^3 \in SU(3)$:

$$T^3_l = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_R \\ \nu_L \\ e_L \end{array} \quad \text{tels que} \quad Tr(T^{3*}_l T^3_l) = \frac{1}{2}, \tag{28}$$

$$C^3_l = 0 \tag{29}$$

$$Q_l = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_R \\ \nu_L \\ e_L \end{array} \quad \text{tels que} \quad Tr(Q^*_l Q_l) = 2. \tag{30}$$

De même que les représentants T^3_q, C^3_q, Q_q of T^3, C^3, et Q agissent sur l'espace interne des quarks $\mathbb{C}^2_R \oplus \mathbb{C}^2_L$, avec les matrices :

$$T^3_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{array} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(T^{3*}_q T^3_q) = \frac{3}{2}, \tag{31}$$

$$C^3_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{array} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(C^{3*}_q C^3_q) = 2 \tag{32}$$

[3]Le facteur $\mathbb{C}^N$ correspond à la génération de N fermions avec comportement de jauge identique, et peut être omise dans le calcul à venir.

[4]Nous choisissons de travailler avec la charge électrique Q pour la définition de laquelle il y a consensus, plutôt qu'avec l'hyper-charge Y qui est définie différemment par différents auteurs. Nous aurons besoin du générateur infinitésimal R du groupe $U(1)$ pour écrire la formule (34) ci-dessous, mais nous n'en aurons pas vraiment besoin.

$$Q_q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{array} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(T_q^{3*}T_q^3) = \frac{10}{3}. \tag{33}$$

Les formes bilinéaires invariantes sur les algèbres de Lie $su(3), su(2)$, et $u(1)$ sont uniques à échelle près. La forme bilinéaire la plus invariante sur l'algèbre de Lie $SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1)$ du groupe de jauge est par conséquent une combinaison linéaire du type :

$$\begin{array}{c} \langle A, A' \rangle = \frac{1}{{g_3}^2} Tr(C^*C') + \frac{1}{g_2^2} Tr(T^*T') + \frac{1}{g_1^2}\frac{1}{2}\bar{R}R', \\ A = (C,T,R), A' = (C',T',R') \in SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1) \end{array} \tag{34}$$

En identifiant ceci avec la forme bilinéaire sur l'algèbre de Lie du groupe de jauge limité par la trace de Dixmier (1):

$$\langle A, A' \rangle = \alpha_l Tr(A_l^* A_l') + \alpha_q Tr(A_q^* A_q'), \quad A, A' \in SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1), \tag{35}$$

on aboutit alors à la relation

$$\left(\frac{g_3}{g_2}\right)^2 = \frac{\alpha_l Tr(T_l^{3*}T_l^3) + \alpha_q Tr(T_q^{3*}T_q^3)}{\alpha_l Tr(C_l^{3*}C_l^3) + \alpha_q Tr(C_q^{3*}C_q^3)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_l + \frac{3}{2}\alpha_q}{2\alpha_q} = \frac{2-x}{2(1-x)}, \tag{36}$$

identique à (20), et la relation (9)

$$\sin^2\theta_W = \frac{\alpha_l Tr(T_l^{3*}T_l^3) + \alpha_q Tr(T_q^{3*}T_q^3)}{\alpha_l Tr(C_l^* C_l) + \alpha_q Tr(Q_q^* Q_q)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_l + \frac{3}{2}\alpha_q}{2\alpha_l + \frac{10}{3}\alpha_q} = \frac{3}{4}\frac{2-x}{4-x}, \tag{37}$$

identique à (21). Pour $x = 0$, ce calcul est formellement identique à celui effectué dans la $SU(5)$-grande unification, la raison étant que le contenu des fermions et la pondération sont les mêmes.

Notre second point est une courte discussion du comportement ou des relations (20) à (23) lorsque x couvre l'intervalle de -1 à +1. Cela est illustré par la table:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	0.99	1
$(g_3/g_2)^2$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	50.5	∞
$\sin^2\theta_W$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{28}$	0.252	$\frac{1}{4}$
m_t/m_W	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	14.2	∞
m_H/m_W	2.65	3.14	3.96	24.5	∞

Nous notons que le rapport m_H/m_t montre peu de variation de 1.53 à $\sqrt{3}$. La table suggère les remarques suivantes :

(i): toutes les fonctions tabulées sont monotones en x.
(ii): la valeur $x = 0$ semble correspondre à la situation du type d'"unification".
(iii): pour la valeur limite $x = 1$, i.e. $\alpha_q = 0$, l'angle de Weinberg est proche de sa valeur expérimentale, alors que les interactions fortes prévalent. Une indication de la dominance du lepton aux énergies expérimentales ? Un lien avec le confinement ?

Le premier des auteurs a eu le privilège, dans les années 70, de recevoir de E. M. Polivanov une introduction à quelques-uns des trésors de l'architecture de Moscou. Les impressions durables de D. K. à propos de la beauté et de la spiritualité de l'ancienne capitale russe restent indéniablement liées au souvenir de la gentillesse et de l'élévation morale de l'éminent physicien que nous regrettons.

Références

[1] A. Connes, The action function in non-commutative geometry, Comm. Math. Phys. **117**, 673 (1988).

[2] A. Connes, Essay on Physics and Non-commutative Geometry, *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford (1990).

[3] A. Connes et J. Lott, Particle models and non-commutative geometry, Nucl. Phys. B **18B** (Proc. Suppl.) (1990).

[4] A. Connes, The metric aspect of non-commutative geometry. Collège de France Preprint (Octobre 1991).

[5] D. Kastler, A detailed account of Alain Connes' version of the standard model in non-commutative geometry, I (1991) and II (1992).

[6] T. Schücker, $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$, why? Proc. XI Intern. Coll. on Group-Theoret. Methods in Physics, Istanbul, eds. M. Serdaroglu, E. Inonu, Springer, Heidelberg (1982).