Six façons de sommer une série

Dan Kalman

Le concept de somme infinie est mystérieux et intrigant. Comment additionner un nombre infini de termes ? Pourtant, dans certains contextes, nous sommes tout naturellement amenés à contempler une somme infinie. Par exemple, considérons le calcul d'une expansion décimale pour 1/3. L'algorithme de division longue génère une séquence d'étapes répétitives sans fin, dont chacune ajoute un 3 supplémentaire à l'expansion décimale. Nous imaginons donc que la réponse est une chaîne sans fin de 3, que nous écrivons $0,333\ldots$. Essentiellement, nous définissons le développement décimal de 1/3 comme une somme infinie

$$1/3 = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots.$$

Comme autre exemple, une version modifiée du paradoxe de Zénon, imaginez-vous diviser un carré de côté 1 comme suit : tracez d'abord une ligne diagonale qui coupe le carré en deux moitiés triangulaires, puis coupez l'une des moitiés en deux, puis coupez l'une de ces moitiés. en deux, et ainsi de suite à l'infini. (Voir la figure 1.) Alors l'aire du carré est la somme des aires de toutes les pièces, ce qui conduit à une autre somme infinie

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots.$$

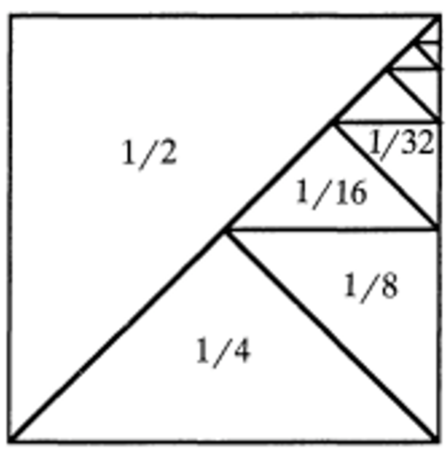

FIGURE 1
Partition du carré-unité

Bien que ces exemples illustrent la manière dont nous sommes naturellement amenés à la notion de somme infinie, le sujet pose immédiatement des problèmes difficiles. Il est facile de décrire une série infinie de termes, beaucoup plus difficile de déterminer la somme de cette série. Dans cet article, je discuterai d'une seule somme infinie, à savoir la somme des inverses des carrés des entiers positifs.

Référence : The college mathematics journal, Vol. 24, N° 5, p. 402, novembre 1993.
Traduction en français : Denise Vella-Chemla assistée de Google traduction, avril 2024.

En 1734, Leonhard Euler fut le premier à déterminer une valeur exacte pour cette somme, activement étudiée depuis au moins 40 ans. Selon les normes actuelles, la preuve d'Euler serait considérée comme inacceptable, mais il ne fait aucun doute que son résultat est correct. Des preuves logiquement correctes sont maintenant connues, et en effet, il existe de nombreuses preuves différentes qui utilisent des méthodes provenant de domaines mathématiques apparemment sans rapport. Mon objectif ici est de passer en revue plusieurs de ces preuves et un peu de mathématiques et d'histoire associées à la somme en question.

Contexte

Il est clair que lorsqu'un nombre infini de quantités positives sont ajoutées, le résultat sera infiniment grand à moins que les quantités ne diminuent jusqu'à zéro. L'une des sommes infinies les plus simples possédant cette propriété est la série *harmonique*,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots .$$

Il peut être surprenant que cette somme devienne infiniment grande (c'est-à-dire qu'elle *diverge*). Pour voir cela, nous ignorons le premier terme de la somme et regroupons les termes restants d'une manière spéciale : le premier groupe a 1 terme, le groupe suivant a 2 termes, le groupe suivant 4 termes, le groupe suivant en a 8, et ainsi de suite.. Les premiers groupes sont représentés ci-dessous :

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}.$$

Les inégalités sont dérivées en observant que dans chaque groupe, le dernier terme est le plus petit, de sorte que l'addition répétée du dernier terme donne une somme inférieure à l'addition des termes réels du groupe. Notez maintenant que dans chaque cas, le côté droit de l'inégalité est égal à $1/2$. Ainsi, lorsque les termes sont regroupés de cette manière, nous voyons que la somme est plus grande que l'addition d'un nombre infini de $1/2$. ce qui est bien sûr infini.

Nous pouvons conclure que même si les termes de la série harmonique diminuent jusqu'à 0, ils ne le font pas assez vite pour produire une somme finie. En revanche, nous avons déjà vu que l'addition de toutes les puissances de $1/2$ produit effectivement une somme finie. C'est,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

(Plus généralement, pour tout $|z| < 1$ la série géométrique $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ a pour somme $1/(1 - z)$). Apparemment, les termes deviennent si rapidement petits que l'ajout d'un nombre infini d'entre eux produit toujours un résultat fini. Il est naturel de se demander ce qui se passe pour une somme comprise entre ces deux exemples, avec des termes qui décroissent plus rapidement que la série harmonique, mais pas aussi vite que la série géométrique. Un exemple évident vient facilement sous la main, la somme des inverses des *carrés* des entiers : $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$. Pour la désigner, nous appellerons cette série la série d'Euler. La somme devient-elle infiniment grande ? La réponse est non, ce qui peut être vu comme suit. Nous cherchons la valeur de la somme

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 5} + \ldots .$$

Elle est évidemment inférieure à la somme

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots$$

Réécrivons maintenant chaque fraction comme une différence de deux fractions. C'est,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \vdots$$

Remplaçons ces valeurs dans la somme et nous obtenons

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots .$$

Si on additionne tous les termes de cette dernière somme, le résultat est 2. On peut donc en conclure au moins que la somme avec laquelle nous avons commencé, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ est inférieure à 2. Cela implique que la somme totale est un nombre défini en réalité. Mais lequel ?

Avant de continuer, revenons sur les deux arguments avancés ci-dessus, le premier pour la divergence de la série harmonique, et le second pour la convergence de la série d'Euler. Il pourrait sembler à première vue que nous nous sommes livrés à un tour de passe-passe mathématique. Les deux arguments sont de natures tellement différentes. Il semble injuste d'appliquer des méthodes différentes aux deux séries et d'arriver à des conclusions différentes, comme si la conclusion était une conséquence de la méthode plutôt qu'une propriété inhérente à la série. Si l'on appliquait l'argument de divergence à la série d'Euler, pourrait-on alors arriver à la conclusion qu'elle diverge ? Il s'agit d'un exercice instructif que le lecteur est encouragé à entreprendre.

Nous revenons à la question, quelle est la somme de la série d'Euler ? Bien entendu, vous pouvez utiliser une calculatrice pour estimer la somme. L'addition de 10 termes donne 1,55, mais cela ne nous dit pas grand-chose. L'approximation correcte à deux décimales est 1,64 et n'est atteinte qu'après plus de 200 termes. Et même dans ce cas, il n'est pas du tout évident que ces deux premières décimales soient correctes. Comparez le cas de la série harmonique dont on sait qu'elle a une somme infinie. Après 200 termes de cette série, le total est toujours inférieur à 6. Pour ces raisons, le calcul direct n'est pas très utile.

Il est possible de faire des estimations précises de la somme en utilisant des méthodes autres que le calcul direct. À un niveau très élémentaire, en comparant un seul terme $1/n^2$ avec $\int_n^{n+1} dx/x^2$, les méthodes de calcul peuvent être utilisées pour montrer que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1}$$

est une bien meilleure approximation du total qu'utiliser juste les n ou $n+1$ premiers termes. En fait, avec cette approximation, l'erreur doit être inférieure à $1/n(n+1)$. En prenant $n = 14$, par exemple, l'approximation sera précise à deux décimales près. C'est une grande amélioration par rapport à l'addition de 200 termes, sans même savoir si les deux premières décimales sont correctes.

Le calcul des premières décimales de la somme des séries d'Euler était un problème assez intéressant à l'époque d'Euler. Il a lui-même travaillé sur le problème, obtenant des formules d'approximation qui lui ont permis de déterminer les premières décimales, de la même manière que l'approximation et l'estimation d'erreur ont été utilisées dans le paragraphe précédent. Plus tard, Euler a dérivé une valeur exacte pour la somme. Erdös et Dudley [5] décrivent ainsi la contribution d'Euler :

> *En 1731, il obtint la somme à 6 décimales près, en 1733 à 20 décimales, et en 1734 à un nombre infini de décimales...*

Un historique plus détaillé de ce problème et de la contribution d'Euler est présenté dans [4]. En bref, Oresme a montré la divergence des séries harmoniques au XIVe siècle. En 1650, Mengoli se demandait si la série d'Euler convergeait. En 1655, John Wallis travailla sur le problème, tout comme John Bernoulli en 1691. Ainsi, lorsqu'Euler publia sa valeur pour la somme en 1734, le problème était déjà travaillé par de redoutables mathématiciens depuis plusieurs décennies. Grâce à une application ingénieuse de méthodes algébriques formelles, Euler a obtenu que la valeur de la somme est $\pi^2/6$.

La preuve d'Euler

Comme mentionné précédemment, la preuve d'Euler n'est pas considérée comme valable aujourd'hui. Néanmoins, elle est très intéressante et mérite d'être examiné ici. En fait, Euler a donné plusieurs preuves sur plusieurs années, dont deux dans l'article de 1734 [6]. Ce que nous présentons ici est essentiellement la même argumentation que celle donnée dans les sections 16 et 17 de cet article, et on la présente sous la même forme que dans [8] et [18]. L'idée de base est d'obtenir un développement en série entière pour une fonction dont les racines sont des multiples des carrés parfaits 1, 4, 9, etc. Puis on applique une propriété des polynômes pour obtenir la somme des inverses des racines. L'autre dérivation donnée dans l'article d'Euler de 1734 est discutée dans [4, section 4] et [10, pp.

308-309].

Voici l'argument : la fonction sinus peut être représentée comme une série entière

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

que nous considérons comme un polynôme infini. Divisez les deux côtés de cette équation par x et nous obtenons un polynôme infini avec seulement des puissances paires de x ; remplaçons x par $\sqrt{x}$ et le résultat est

$$\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{x^3}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

Nous appellerons cette fonction f. Les racines de f sont les nombres $\pi^2, 4\,\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2$. Notons que 0 n'est pas une racine, car alors, le côté gauche est indéfini, alors que le côté droit est clairement 1.

Or, Euler savait que l'addition des inverses de toutes les racines d'un polynôme donne l'opposé du rapport du coefficient linéaire au coefficient constant. En symboles, si

$$(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

Alors

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = -a_1/a_0.$$

En supposant que la même loi doit s'appliquer à une expansion en série entière, il l'a appliquée à la fonction f, concluant que

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots.$$

Multiplier les deux côtés de cette équation par π^2 donne $\pi^2/6$ comme somme de la série d'Euler (1).

Pourquoi cette preuve n'est-emme pas considérée comme une preuve valable aujourd'hui ? Le problème est que les séries entières *ne sont pas* des polynômes et ne partagent pas toutes les propriétés des polynômes. Pour comprendre la propriété utilisée par Euler, selon laquelle la somme des inverses des racines d'un polynôme est égal à l'opposé du rapport des deux coefficients d'ordre le plus bas, considérons un polynôme de degré 4. Appelons

$$p(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

L'équation polynomiale $p(x) = 0$ a pour racines r_1, r_2, r_3, r_4. Alors

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$$

Si nous multiplions les facteurs à droite, nous trouvons que

$$\begin{aligned} a_0 &= r_1 r_2 r_3 r_4 \\ a_1 &= -r_2 r_3 r_4 - r_1 r_3 r_4 - r_1 r_2 r_4 - r_1 r_2 r_3 \end{aligned}$$

De cela, il découle clairement que

$$-a_1/a_0 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}.$$

Un argument similaire fonctionne pour un polynôme de n'importe quel degré.

Notons que cet argument ne fonctionnerait pas pour un polynôme infini sans, à tout le moins, une théorie des produits infinis. Dans tous les cas, le résultat ne s'applique pas à toutes les séries entières. Par exemple, l'identité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

est valable pour tout x de valeur absolue inférieure à 1. Considérons maintenant la fonction $g(x) = 2 - 1/(1-x)$. Clairement, g a une seule racine, 1/2. Le développement en série entière pour $g(x)$ est $1 - x - x^2 - x^3 - \dots$ donc $a_0 = 1$ et $a_1 = -1$. La somme des inverses des racines n'est pas égale au rapport $-a_1/a_0$. Bien que cet exemple montre que la loi de la somme des inverses des racines ne peut pas être appliquée aveuglément à toutes les séries entières, cela n'implique pas que la loi ne soit jamais vraie. En effet, la loi doit s'appliquer à la fonction $f(x) = \sin\sqrt{x}/\sqrt{x}$ car nous avons des preuves indépendantes du résultat d'Euler. Notez les différences entre cette fonction f et la fonction g du contre-exemple. La fonction f a un nombre infini de racines, alors que g n'en a qu'une. Et f a une série entière qui converge pour tout x, alors que la série pour g ne converge que pour $-1 < x < 1$. Existe-t-il un théorème qui fournit les conditions dans lesquelles une série entière satisfait la loi de la somme des inverses des racines ? Je ne sais pas.

Il est généralement admis que la preuve d'Euler ne répond pas aux normes actuelles. Il existe un certain nombre de preuves considérées comme acceptables et elles présentent une grande variété de méthodes et d'approches. Nous aborderons bientôt plusieurs de ces preuves. Cependant, avant de quitter Euler, deux autres points méritent d'être mentionnés. Premièrement, les aspects des méthodes d'Euler qui sont considérés comme invalides aujourd'hui concernent généralement la manière informelle et intuitive avec laquelle il manipulait l'infiniment grand et l'infiniment petit. Le sujet moderne de l'analyse non standard a fourni à notre époque ce qui manquait à Euler : un traitement solide de l'analyse utilisant des quantités infinies et infinitésimales. Les méthodes d'analyse non standard ont été utilisées pour valider certains des arguments d'Euler. Autrement dit, il a été possible de développer des arguments logiquement corrects qui sont conceptuellement les mêmes que ceux d'Euler. Dans [12], par exemple, la dérivation d'Euler d'un produit infini pour la fonction sinus est rendue rigoureuse. Cette formule de produit est étroitement liée à l'argument d'Euler décrit ci-dessus. Euler en donna une autre preuve en 1748, toujours en comparant une série entière à un produit infini. Cet argument a également été rendu rigoureux à l'aide de l'analyse non standard [14].

Le deuxième point que je souhaite souligner est qu'Euler a pu généraliser ses méthodes à de nombreuses autres sommes. Il a notamment développé une formule qui donne la somme $1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$ pour toute puissance paire de s. L'idée de faire varier la puissance s amène à définir une fonction de s : $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$. C'est ce qu'on appelle la fonction zêta de Riemann, et elle a une grande importance dans la théorie des nombres. Lorsque s est un entier pair, la formule d'Euler donne la valeur de $\zeta(s)$ comme un multiple rationnel de π^s. De façon intéressante, alors que les valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs sont connues, les choses sont beaucoup plus obscures pour les entiers impairs.. Il est intéressant de noter que même si les valeurs de la fonction zêta pour les entiers pairs sont connues exactement, on ne savait pas avec certitude que $\zeta(3)$ est irrationnel avant 1978. Un compte rendu intéressant de cette découverte peut être trouvé dans [19]. Le numéro de novembre 1983 du *Mathematics Magazine* est consacré aux articles sur Euler, [10] en étant un exemple.

Preuves modernes

Passons maintenant aux preuves modernes du résultat d'Euler. Nous considérerons cinq approches différentes. La première preuve n'utilise pas de mathématiques plus avancées que la trigonométrie. Elle n'est pas aussi spectaculaire que certaines autres preuves, dans le sens où elle n'a pas vraiment de rebondissements ou de liens étranges avec d'autres domaines des mathématiques. D'autre part, elle se généralise de manière directe pour dériver la formule d'Euler pour $\zeta(2n)$. La deuxième preuve est basée sur des méthodes de calcul et implique une séquence de transformations à couper le souffle. Ensuite, nous entrerons dans le domaine de l'analyse complexe et utiliserons une méthode appelée intégration de contours. La quatrième preuve, également dans le monde complexe, fait appel à des techniques de l'analyse de Fourier. Enfin, nous terminerons par une preuve basée sur des manipulations formelles dont Euler lui-même aurait été fier. Cette dernière approche utilise à la fois les nombres complexes et le calcul élémentaire. Au milieu de cette séquence de preuves, nous prendrons une brève pause pour une application.

Les nombres complexes apparaissent à plusieurs reprises dans ces preuves, il convient donc ici de rappeler quelques propriétés élémentaires. Le plus important est l'identité $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, ainsi que les cas particuliers $e^{i\pi} = -1$ et $e^{in\pi} = (-1)^n$. Élever les deux côtés de l'identité générale à la $n^{\text{ième}}$ puissance produit le théorème de de Moivre : $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$. En développant la puissance à droite puis en rassemblant les parties réelles et complexes, on obtient les formules pour $\cos nx$ et $\sin nx$. Pour un nombre complexe $x + iy$ la valeur absolue est définie par $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et le conjugué est $\overline{x + iy} = x - iy$. Si (r, θ) sont les coordonnées polaires de (x, y), alors $x + iy = re^{i\theta}$.

Il sera également nécessaire d'utiliser la notation sigma familière

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots,$$

ce qui fournit le résultat d'Euler

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Trigonométrie et algèbre.

La première preuve, publiée par Papadimitriou [15], dépend d'une identité trigonométrique particulière. Une fois l'identité connue, la dérivation du résultat d'Euler est assez directe et sans surprise. Apostol [2] généralise cette preuve pour calculer la formule de $\zeta(2n)$. Une preuve étroitement liée est donnée par Giesy [7]. Notez qu'Apostol et Giesy donnent chacun plusieurs références supplémentaires aux dérivations élémentaires du résultat d'Euler.

L'identité trigonométrique fait intervenir l'angle $\omega = \pi/(2m+1)$ et plusieurs de ses multiples. L'identité se lit

$$\cot^2\omega + \cot^2(2\omega) + \cot^2(3\omega) + \ldots + cot^2(m\omega) = \frac{m(2m-1)}{3} \tag{2}$$

Par exemple, avec $m = 3$, on a $\omega = \pi/7$, et l'identité se lit

$$\cot^2\omega + \cot^2(2\omega) + \cot^2(3\omega) = 5.$$

Nous utiliserons l'identité (2) pour dériver la somme de la série d'Euler, puis nous discuterons de la dérivation de l'identité.

Pour tout x compris entre 0 et $\pi/2$, l'inégalité suivante est vraie.

$$\sin x < x < \tan x.$$

Mettre au carré et inverser chaque terme de l'inégalité conduit à

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x.$$

Maintenant, pour utiliser (2), nous allons successivement remplacer x dans cette inégalité par $\omega, 2\omega, 3\omega$ et ainsi de suite, et additionner les résultats. Cela donne

$$\begin{array}{cccccc} & \cot^2\omega & +\cot^2(2\omega) & +\cot^2(3\omega) & +\ldots & +\cot^2(m\omega) \\ < & 1/\omega^2 & +1/4\omega^2 & +1/9\omega^2 & +\ldots & +1/m^2\omega^2 \\ < m & +\cot^2\omega & +\cot^2(2\omega) & +\cot^2(3\omega) & +\ldots & +\cot^2(m\omega). \end{array}$$

L'utilisation de l'identité (2) produit alors

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{1}{\omega^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right) < \frac{m(2m-1)}{3} + m.$$

Pour une transformation finale, multiplions par ω^2 and substituons $\omega = \pi/(2m+1)$:

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{m^2} < \frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} + \frac{m\pi^2}{(2m+1)^2}.$$

Cet ensemble final d'inégalités fournit des limites supérieure et inférieure pour la somme des m premiers termes de la série d'Euler. Maintenant, faisons tendre m vers l'infini. La limite inférieure est

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)} = (\pi^2/6)\frac{2m^2-m}{2m^2+2m+0.5}$$

qui se rapproche de $\pi^2/6$, En même temps, la limite supérieure se rapproche également de $\pi^2/6$ à mesure que son deuxième terme diminue jusqu'à 0. La somme d'Euler est coincée entre ces limites et doit donc également être égale à $\pi^2/6$.

Ceci complète la preuve du résultat d'Euler, sous réserve de la validité de l'identité (2). Pour être complet, nous la prouverons ensuite. Chose intéressante, la dérivation utilise une propriété des polynômes très similaire à celle utilisée dans la preuve d'Euler ci-dessus. Plus précisément, pour tout polynôme

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

la somme des racines est juste $-a_{n-1}/a_n$. La dérivation de cette propriété est si similaire à la loi donnée précédemment pour la somme des inverses des racines qu'elle est recommandée comme exercice pour le lecteur. Nous utiliserons la propriété en considérant un polynôme dont les racines sont les termes $\cot^2(k\omega)$ sur le côté gauche de (2). Rendre égale la somme des racines au rapport négatif des deux coefficients d'ordre le plus élevé donnera l'identité souhaitée.

Le polynôme est engendré en manipulant l'identité de de Moivre avec n impair. En considérant uniquement les parties imaginaires de chaque aspect de l'identité, on commence par

$$\begin{aligned}\sin n\,\theta \; &= \binom{n}{1}\sin\theta\,\cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\sin^3\theta\,\cos^{n-3}\theta + \ldots \pm \sin^n\theta \\ &= \sin^n\theta\left(\binom{n}{1}\cot^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\cot^{n-3}\theta + \ldots \pm 1\right).\end{aligned}$$

En supposant que $0 < \theta < \pi/2$, nous pouvons diviser par $\sin^n\theta$ pour obtenir

$$\frac{\sin n\theta}{\sin^n\theta} = \binom{n}{1}\cot^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\cot^{n-3}\theta + \ldots \pm 1.$$

Maintenant n est impair, donc $n-1$ est pair. Exprimons les exposants du côté droit de l'équation précédente en fonction de $m = (n-1)/2$:

$$\frac{\sin n\theta}{\sin^n\theta} = \binom{n}{1}\cot^{2m}\theta - \binom{n}{3}\cot^{2m-2}\theta + \ldots \pm 1$$

C'est là que l'on voit émerger le polynôme. Faisons la substitution $x = \cot^2\theta$ et on a

$$\frac{\sin n\theta}{\sin^n\theta} = \binom{n}{1}x^m - \binom{n}{3}x^{m-1} + \ldots \pm 1.$$

À droite se trouve un polynôme ; on peut lire les deux coefficients principaux. L'expression de gauche nous révèle m racines distinctes. En effet $\sin n\theta = 0$ pour $\theta = \pi/n, 2\pi/n, ..., m\pi/n$, on voudrait donc conclure que $x = \cot^2\pi/n$, $\cot^2 2\pi/n, ...,$ $\cot^2 m\pi/n$ sont m racines distinctes du polynôme. Il suffira de vérifier que tous les θ sont strictement compris entre 0 et $\pi/2$ puisqu'ils génèrent alors des valeurs positives distinctes de la fonction cotangente. En rappelant que $n = 2m+1$ on voit que le plus grand θ est $\pi \cdot m/(2m+1)$ qui est évidemment inférieur à $\pi/2$.

De cette analyse, nous concluons que le polynôme

$$\binom{n}{1}x^m - \binom{n}{3}x^{m-1} + \ldots \pm 1$$

a les racines $\cot^2 \pi/n,\ \cot^2 2\pi/n,\ \cot^2 3\pi/n, \ldots, \cot^2 m\pi/n$. La somme de ces racines est le rapport négatif des deux coefficients principaux : $\binom{n}{3}/\binom{n}{1}$. Pour compléter la dérivation, on pose $\omega = \pi/(2m+1)$ et on calcule

$$\begin{aligned}
\cot^2 \omega + \cot^2 (2\omega) + \ldots + \cot^2 (m\omega) &= \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{1}} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)/6}{n} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{6} \\
&= \frac{2m(2m-1)}{6} \\
&= \frac{m(2m-1)}{3}
\end{aligned}$$

Ceci termine la première preuve. Même si elle est assez directe, elle nécessite le recours à une identité obscure. En dehors de cela, rien de plus difficile que la trigonométrie au lycée n'est requis, et il n'y a rien de particulièrement surprenant ou d'excitant dans l'argument. La preuve suivante offre un contraste dramatique. Elle utilise des méthodes de calcul et elle repose sur plusieurs transformations surprenantes et inattendues.

Termes impairs, séries géométriques et double intégrale.

La preuve suivante est celle que j'ai vue initialement présentée dans une conférence de Zagier [20]. Il a mentionné que la preuve lui avait été montrée par un collègue qui en avait eu connaissance par ouïe-dire. Elle est étroitement liée à une preuve donnée par Apostol [3], mais présente quelques particularités uniques. Je n'ai pas vu cette preuve imprimée.

Cela simplifiera la discussion de choisir qu'E représente $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Le but de la preuve est alors de montrer que $E = \pi^2/6$. On commence par les termes pairs de la somme. Observons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \quad &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{4} E.
\end{aligned}$$

les termes pairs totalisent un quart du total, les termes impairs doivent représenter les trois quarts restants. Écrivons ceci sous forme d'équation sous la forme

$$\frac{3}{4} E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \tag{3}$$

Maintenant, nous changeons de vitesse. Considérons l'intégrale définie suivante :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{2k} dx \quad &= \left. \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|_0^1 \\
&= \frac{1}{2k+1}
\end{aligned}$$

Bien entendu, cette équation serait tout aussi correcte si l'on utilisait la variable y à la place de x. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2k+1} \right)^2 \quad &= \int_0^1 x^{2k} dx \int_0^1 y^{2k} dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x^{2k} y^{2k} dx dy
\end{aligned}$$

et ceci est substitué dans l'équation (3) pour obtenir

$$\frac{3}{4} E = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{2k} y^{2k} dx\, dy.$$

Pour l'étape suivante, échangeons la somme et l'intégrale double pour obtenir

$$\frac{3}{4} E = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} y^{2k} dx\, dy.$$

En nous concentrant sur la partie somme, notons que ses termes sont les puissances de x^2y^2. La formule de la série géométrique mentionnée dans la première section donne un total de $1/(1-x^2y^2)$, menant à

$$\frac{3}{4}E = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} dx\, dy.$$

Pour compléter la dérivation, il suffit d'évaluer cette double intégrale. Un ingénieux changement de variables rend cette étape triviale. La substitution est donnée par $x = \sin u/\cos v$ et $y = \sin v/\cos u$. En appliquant les méthodes du calcul multivarié, nous pouvons montrer que $dx\, dy/(1-x^2y^2) = du\, dv$, et la région d'intégration en fonction de u et v est le triangle du premier quadrant illustré à la figure 2. Par conséquent, la double intégrale donne l'aire du triangle, $\pi^2/8$, ce qui implique que

$$\frac{3}{4}E = \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi, $E = \pi^2/6$, comme requis.

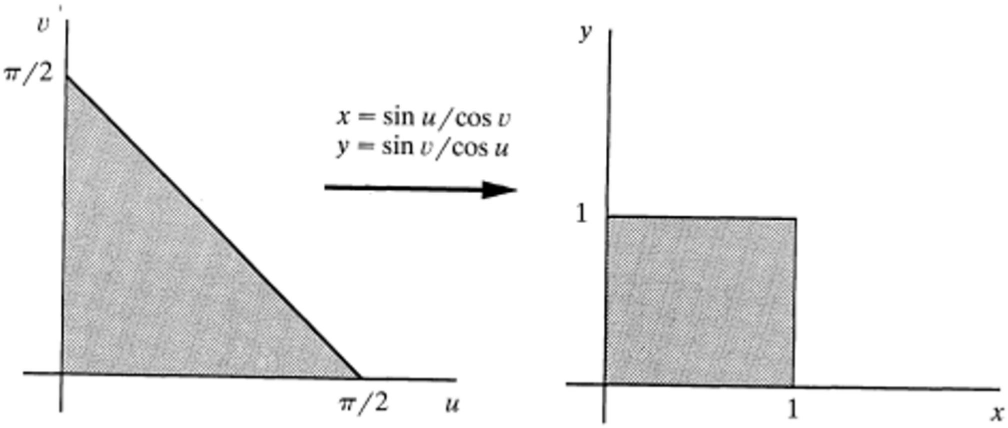

FIGURE 2
région d'intégration transformée

Deux commentaires doivent être faits ici. Premièrement, l'échange de l'intégrale et de la somme nécessite une certaine justification. À l'époque d'Euler, les conditions dans lesquelles une telle opération est valable n'étaient pas comprises. Aujourd'hui, les conditions sont connues et sont généralement enseignées dans un cours de calcul avancé. Dans le cas présent, puisque $1/(1-x^{2k}y^{2k})$ est positif en tout point de la région d'intégration sauf en $(1, 1)$, le théorème de convergence monotone [16, Théorème 10.30] fournit la justification nécessaire. Il faut également tenir compte du fait que l'intégrande dans l'intégrale initiale n'est pas défini en un point de la région d'intégration ; les méthodes habituelles pour les intégrales impropres s'appliquent.

Deuxièmement, le changement de variables dans la double intégrale nécessite également un peu de travail. Rappelons que la règle pour transformer $dx\, dy$ en une expression impliquant $du\, dv$ dépend du calcul du jacobien de la transformation. Et il y a des efforts à faire pour vérifier que la transformation du changement de variables envoie le triangle illustré dans l'espace uv dans le carré unité dans l'espace xy.

Calcul des résidus.

La troisième preuve applique une technique d'analyse complexe connue sous le nom de calcul des résidus. Un compte rendu complet de cette technique peut être trouvé dans tout texte d'introduction à l'analyse complexe. Pour la présente discussion, l'objectif est simplement une perception intuitive de la structure de l'argumentation. À cette fin, nous discuterons de manière informelle des idées de base du calcul des résidus.

Le calcul des résidus concerne les fonctions dont les pôles (qui peuvent être considérés comme des endroits où un dénominateur tend vers 0) sont définis dans le plan complexe. Supposons que f soit une telle fonction et ait un pôle en z_0. Alors il existe un développement en série entière qui décrit comment f se comporte près de z_0. Cela pourrait ressembler à ceci :

$$f(z_0 + z) = a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \ldots.$$

Le fait qu'il y ait un pôle en z_0 est révélé par les puissances négatives de z. Il est évident que lorsque z tend vers 0, $f(z_0 + z)$ explose. Dans cet exemple, il y a deux termes avec des puissances négatives de z. Dans le cas général, il peut y avoir n'importe quel nombre fini de termes de puissances négatives de z.

Un deuxième ingrédient central dans le calcul des résidus est l'*intégrale complexe*. Pour cette discussion, l'intégrale complexe peut être considérée comme une sorte d'intégrale linéaire. L'intégrande $f(z)\,dz$ est une différentielle exacte si f est la dérivée d'une fonction complexe dans toute une région contenant le chemin.

L'intégrale complexe se comporte comme une intégrale de ligne en ce sens que sur un chemin fermé, l'intégrale d'une différentielle exacte est 0. En particulier, nous considérerons un chemin fermé qui renferme 0, et pour l'intégrande nous prenons le développement de $f(z_0 + z)$. Chaque terme du développement est la dérivée d'une fonction complexe, à l'exception du terme d'exposant 1. Cela correspond au fait en calcul réel que la primitive de x^k est $x^{k+1}/(k+1)$, sauf quand $k = -1$. Bien sûr, dans le cas réel, nous savons que la primitive de $1/x$ est $\ln x$. Malheureusement, dans le plan complexe, il n'est pas possible de définir un logarithme népérien de manière cohérente sur tout chemin fermé entourant l'origine. En fait, une intégrale de ligne de z^{-1} autour d'un tel chemin ne produit pas 0, elle produit plutôt $2\,\pi i$. Cela a du sens intuitivement, si l'on réfléchit à la façon dont un logarithme naturel complexe devrait se comporter. Sous forme polaire, tout nombre complexe z peut être exprimé comme $re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$ où $(r, 0)$ sont les coordonnées polaires habituelles du point z dans le plan complexe. Le logarithme naturel devrait alors être $\ln\, r + i\theta$. Maintenant, si nous intégrons $1/z$ le long d'un chemin de z_1 à z_2, nous nous attendons à ce que le résultat soit $\ln\, r_2 + i\theta_2 - \ln\, r_1 - i\theta_1$. Sur notre chemin fermé, $z_1 = z_2$, et $r_2 - r_1 = 0$. Mais si nous parcourons le chemin une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, en faisant varier θ continument le long du chemin, alors $\theta_2 - \theta_1$ est égal à 2π. Ainsi, l'intégrale devrait produire une valeur de $2\,\pi i$. Pour généraliser légèrement, si on intègre $f(z_0 + z)$ le long d'un chemin faisant le tour de 0 une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, chaque terme de la somme s'évanouit sauf le terme z^{-1}, et l'intégration de ce terme donne $a_{-1} \cdot 2\pi i$. Puisque la contribution du terme z^{-1} est tout ce qui reste de f après l'intégration, le coefficient a_{-1} est appelé le résidu de f en z_0.

Les fonctions étudiées dans le calcul des résidus peuvent exploser à plusieurs endroits. Par exemple, la fonction $1/(z^2+1)$ a des pôles à la fois en i et en $-i$. Mais si une fonction peut toujours être développée dans une série entière avec un nombre fini de termes d'exposants négatifs, alors l'intégrale de droite autour d'un simple chemin fermé (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) encerclant un nombre fini de pôles est égale $2\pi i$ fois la somme des résidus en ces pôles.

Tout cela est très intéressant, mais qu'est-ce que cela a à voir avec la somme d'Euler ? La réponse est qu'en utilisant le calcul des résidus, nous pouvons calculer une somme en faisant une intégrale complexe. En fait, nous utiliserons un argument limite impliquant une séquence de chemins P_n. Chacun de ces chemins renferme un nombre fini de pôles pour notre fonction $f(z)$, la somme des résidus comprendra un nombre fini de termes d'Euler. Lorsque n tend vers l'infini, deux choses se produiront. Premièrement, l'intégrale droite de f sur le chemin P_n décroîtra jusqu'à 0. Mais en même temps, la somme des résidus se rapprochera d'une expression qui contient tous les termes de la somme d'Euler. Égaliser la somme des résidus à 0 donne alors notre résultat final.

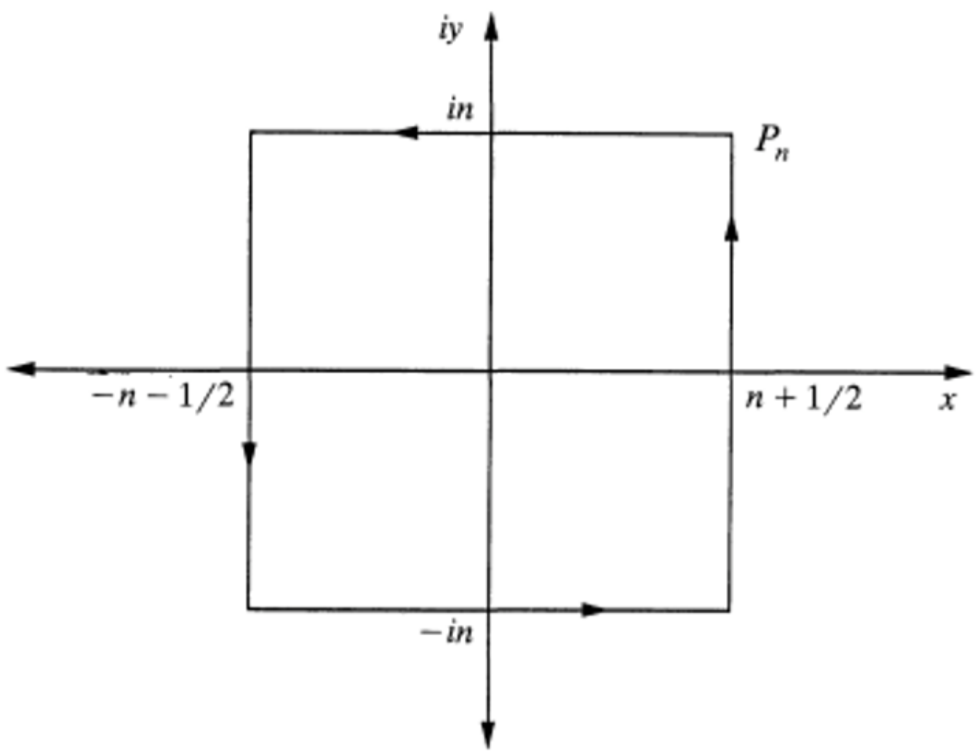

FIGURE 3
Chemin d'intégration

La fonction utilisée dans cet argument est $f(z) = \cot(\pi z)/z^2$. Le chemin P_n est un rectangle centré à l'origine de côtés parallèles aux axes réel et imaginaire dans le plan complexe (Figure 3). Les côtés coupent l'axe réel en $\pm(n+1/2)$ et l'axe imaginaire en $\pm ni$. On peut montrer que $|\cot(\pi z)| < 2$ pour tout z sur le chemin P_n. (En fait, nous pouvons obtenir une limite beaucoup plus précise que 2, mais la précision n'est pas importante ici.) En même temps $|z| \geq n$ sur le chemin, donc $|f(z)| < 2/n^2$. Limiter $|f(z)|$ sur le chemin de cette manière nous permet d'estimer l'intégrale. On a

$$\left| \oint_{P_n} f(z)\, dz \right| < \frac{2}{n^2}(8n+2)$$

où $8n+2$ est la longueur du chemin. Il est clair que lorsque n tend vers l'infini, l'intégrale tend vers 0.

Pour compléter l'argumentation, observons que f a des pôles en chacun des entiers, et déterminons que le résidu est $1/\pi k^2$ en $k \neq 0$, et $-\pi/3$ en 0. Avant d'effectuer ces calculs, voyons comment on conclut la dérivation de la formule d'Euler. Puisque l'intégrale sur P_n tend vers 0, on en déduit que $2\pi i$ fois la somme de tous les résidus est égal à 0. En combinant les résidus en k et $-k$ en un seul terme, cela conduit à

$$\frac{-2\pi^2 i}{3} + 4i\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = 0.$$

Un réarrangement trivial de cette équation révèle $E = \pi^2/6$.

De cette preuve, il ne reste que le calcul des résidus. Pour le résidu en 0, observons que

$$\begin{aligned} z \cot(\pi z) &= z\, \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \\ &= z\, \frac{1 - \pi^2 z^2/2 + \pi^4 z^4/24 - \dots}{\pi z - \pi^3 z^3/6 + \pi^5 z^5/120 - \dots} \\ &= \frac{1 - \pi^2 z^2/2 + \pi^4 z^4/24 - \dots}{\pi - \pi^3 z^2/6 + \pi^5 z^4/120 - \dots} \end{aligned}$$

En utilisant l'algorithme de division longue, le rapport peut être exprimé sous forme de série entière. Les premiers termes sont

$$z \cot(\pi z) = \frac{1}{\pi} - \frac{\pi z^2}{3} - \frac{\pi^3 z^4}{45} + \dots$$

En divisant les deux côtés de cette équation par z^3, on déduit

$$\frac{\cot(\pi z)}{z^2} = \frac{z^{-3}}{\pi} - \frac{\pi z^{-1}}{3} - \frac{\pi^3 z}{45} + \dots$$

En lisant le coefficient de z^{-1}, on voit que le résidu en 0 est $-\pi/3$.

Nous utilisons une méthode légèrement différente pour le résidu en k, dont nous avons calculé la série entière pour $f(k+z)$ comme étant égale à

$$f(k+z) = a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots.$$

Alors

$$z f(k+z) = a_{-1} + a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots$$

et il est clair que

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \to 0} [z f(k+z)] \\ &= \lim_{z \to 0} z \frac{\cot(\pi(k+z))}{(k+z)^2} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin(\pi(k+z))} \frac{\cos(\pi(k+z))}{(k+z)^2}. \end{aligned}$$

On applique la règle de L'Hospital au premier facteur et on trouve $a_{-1} = 1/\pi k^2$. Cela donne le résidu en k comme affirmé précédemment.

Ce calcul semble reposer sur la connaissance à l'avance que la série entière pour $f(k+z)$ n'a qu'un seul terme avec une puissance négative de z. Pourquoi n'y a-t-il pas de termes z^{-2}, z^{-3}, comme il y en avait pour le residu en 0 ? En fait, la réponse est implicite dans la limite que nous avons calculée ci-dessus. Puisque $zf(k+z)$ a une limite en 0, sa série entière ne peut avoir aucun terme avec des puissances négatives de z. Ainsi, chaque terme de la série pour $f(k+z)$ doit avoir un exposant d'au moins 1. Essayer d'appliquer le même argument à 0 nécessiterait d'évaluer la limite de $zf(z) = \cot(\pi z)/z$. L'échec de cette étape nous alerte sur l'existence de termes supplémentaires dans la série entière en 0.

Il me semble que l'idée clé de la preuve précédente est l'utilisation d'une intégrale pour évaluer une somme. Dans ce cas, c'est la machinerie de calcul des résidus qui relie la somme et l'intégrale. Une fois f défini, les étapes restantes constituent un simple exercice de méthode de calcul des résidus. L'argument suivant utilise également une intégrale pour évaluer une somme et implique à nouveau des nombres complexes, mais il est d'une nature nettement différente. Nous y utilisons des techniques d'algèbre vectorielle dans le contexte de l'analyse de Fourier.

Analyse de Fourier.

Avant de discuter de la preuve utilisant l'analyse de Fourier, il sera utile de revoir un peu d'analyse vectorielle. Dans un espace tridimensionnel, considérez un vecteur comme un segment de droite orienté (c'est-à-dire un segment avec une flèche à une extrémité). Pour les vecteurs a et b, une opération fondamentale est le point "·" ou produit scalaire (produit *intérieur*) $a \cdot b$. Il peut être défini comme le produit des longueurs dea et b et du cosinus de l'angle qui les sépare. Ainsi, si a et b sont perpendiculaires, alors $a \cdot b = 0$, tandis que pour a et b parallèles, le produit scalaire est simplement le produit des longueurs (ou l'opposé du produit si les vecteurs sont parallèles et de directions opposées).

Le produit interne est utile pour décomposer les vecteurs en composants simples. Soient e_x, e_y, et e_z, des vecteurs de longueur 1 ayant une extrémité à l'origine et pointant le long des axes x, y, et z. Tout autre vecteur dans l'espace peut être construit en utilisant des sommes et des multiples de ces trois vecteurs particuliers. Un exemple typique serait une combinaison de la forme $3e_x+5e_y+1.3e_z$. Il s'agit du vecteur qui commence à l'origine et se termine en le point (3, 5, 1,3). Tout comme les trois coefficients 3, 5 et 1.3 déterminent complètement le vecteur dans cet exemple, de même tout vecteur est déterminé de manière unique par ses trois coefficients relatifs aux vecteurs e.

Notons que puisque deux des vecteurs e sont perpendiculaires, leur produit scalaire est 0. Et le produit scalaire de l'un de ces vecteurs avec lui-même est 1. Ces deux propriétés, caractéristiques d'une *base orthonormée*, fournissent un moyen simple de calculer les coefficients qui décrivent n'importe quel vecteur. En effet, si on a $a = pe_x + qe_y + re_z$, alors en prenant le produit scalaire de chaque côté avec e_x, on trouve $p = a \cdot e_x$. Un raisonnement similaire conduit à $q = a \cdot e_y$, et $r = a \cdot e_z$. Autrement dit, le coefficient de chacun des e vecteurs peut être trouvé en calculant le produit scalaire de a avec ce vecteur. Comme autre conséquence de l'orthonormalité, observons que $a \cdot a = p^2 + q^2 + r^2$. La dérivation de cette identité,

$$\begin{aligned} a \cdot a &= (pe_x + qe_y + re_z) \cdot (pe_x + qe_y + re_z) \\ &= p^2 e_x \cdot e_x + q^2 e_y \cdot e_y + r^2 e_z \cdot e_z + 2pq e_x \cdot e_y + 2pr e_x \cdot e_z + 2qr e_y \cdot e_z \\ &= p^2 + q^2 + r^2, \end{aligned}$$

utilise à nouveau le fait que le produit scalaire de l'un des e avec lui-même est 1, tandis que le produit scalaire entre deux e différents est 0.

Dans l'analyse de Fourier, il existe une merveilleuse analogie avec les idées de vecteurs, de produits scalaires et d'orthonormalité. Au lieu de vecteurs, nous traitons de fonctions à valeurs complexes d'une variable réelle. Le produit scalaire de deux fonctions est défini à l'aide d'intégrales : $f \cdot g = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ (la barre au-dessus désigne une conjugaison complexe). À la place des vecteurs particuliers e_x, e_y, et e_z, on a les fonctions $1 = e^{0it}, e^{\pm it}, e^{\pm 2it}, e^{\pm 3it}, \ldots$. Celles-ci forment une base orthonormée, et toute fonction qui se comporte bien f peut être exprimée en utilisant les fonctions de base de la même manière que les vecteurs dans l'espace peuvent être exprimés en termes de vecteurs. Comme c'était le cas pour les vecteurs, les coefficients des fonctions de base ne sont que des produits scalaires. Ainsi, si on écrit $f(t) = \ldots + a_{-1}e^{-2it} + a_{-1}je^{-it} + a_0 + a_1 e^{it} + a_2 e^{2it} + \ldots$ alors

$$\begin{aligned} a_2 &= f \cdot e^{2it} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-2it} dt \end{aligned}$$

et de même pour tous les autres coefficients. Enfin, dans l'analyse de Fourier, il existe un analogue pour la formule $a \cdot a = p^2 + q^2 + r^2$. Parce que les coefficients peuvent être des nombres complexes, ce sont leurs valeurs absolues au carré (pas simplement leurs carrés) qui doivent être additionnées, mais sinon l'analogie est exacte. Ainsi, nous avons la formule du dernier fait que $f \cdot f = \ldots + |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots$. C'est ce dernier fait que nous utilisons pour déduire la valeur de la somme-d'Euler.

Voici comment cela fonctionne. La fonction à utiliser est $f(t) = t$. Par calcul direct,

$$\begin{aligned} f \cdot f &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer $f \cdot f$ en fonction des coefficients a_k. À titre d'exemple, calculons a_2

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-2it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{2it+1}{4} e^{-2it} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{i}{2} \end{aligned}$$

La dernière étape de ce calcul profite du fait que $e^{2\pi i} = 1$. Un calcul similaire avec un entier quelconque n à la place de 2 montre que $a_n = \pm i/n$ pour tout n sauf 0, et que $a_0 = 0$. Ainsi, pour tout n sauf 0, $|a_n| = 1/n$, et $\ldots + |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots$ n'est autre que la somme d'Euler écrite deux fois. Cela conduit à $2E = \pi^2/3$, et la division par 2 complète la preuve.

Interlude : Une application du résultat d'Euler.

Faisons une pause avec toutes ces preuves et considérons une application. Si une somme infinie de termes positifs converge, elle peut être utilisée pour créer une distribution de probabilité. Il en va de même pour la somme d'Euler. Soit $p_k = (6/\pi^2)(1/k^2)$. Alors les p_k ont pour somme 1, et peuvent être considérés comme une distribution discrète, avec comme résultat p_k comme probabilité du $k^{ième}$ tirage. Cette distribution a-t-elle une quelconque utilité ? Il s'avère que oui, elle est utile. En fait, p_k est la probabilité que deux entiers positifs sélectionnés au hasard aient comme plus grand diviseur commun (PGCD) le nombre k. Il faut faire un peu attention à ce qu'on entend par sélectionner aléatoirement un entier, car il n'y a évidemment aucun moyen de rendre tous les entiers positifs équiprobables tout en ayant une probabilité totale de 1. C'est un point technique que l'on peut mettre de côté pour le moment, en faveur d'une approche heuristique. Pour continuer, définissons q_k comme étant la probabilité que deux entiers positifs sélectionnés au hasard aient comme PGCD k. On montre que $q_k = p_k$.

Le PGCD des entiers a et b est égal à k si et seulement si deux conditions sont remplies. Premièrement, les deux entiers doivent être des multiples de k. Deuxièmement, le PGCD de a/k et b/k doit être égal à 1. Maintenant, la probabilité que deux entiers sélectionnés au hasard soient tous deux multiples de k est $1/k^2$. La probabilité que PGCD$(a/k, b/k) = 1$, étant donné que a et b sont des multiples de k, est la même que la probabilité inconditionnelle que deux entiers positifs aient pour PGCD 1, car comme a et b couvrent les multiples de k, a/k et b/k couvrent l'ensemble complet des entiers positifs.La combinaison des deux observations précédentes montre que $q_k = q_1(1/k^2)$. Puisque les q_k doivent avoir pour somme 1, on voit que $q_1 = 6/\pi^2$, donc que $q_k = p_k$.

Rétrospectivement, connaître la valeur de la somme d'Euler était une étape nécessaire pour déterminer la distribution de la fonction PGCD. Conséquence intéressante, nous pouvons maintenant affirmer qu'une fraction générée aléatoirement sera dans les termes les plus bas avec une probabilité de $6/\pi^2$. J'ai trouvé ces idées dans [1] (qui commente le point technique que nous avons posé ci-dessus) et [13].

Revenons maintenant à notre tour d'horizon des preuves et examinons une dernière dérivation.

Une intégrale réelle de valeur imaginaire.

Cette dernière preuve a été publiée par Russell [17]. Cela commence par l'intégrale définie par

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\,(2\,cos\,x)\,dx.$$

Maintenant $2\cos\,x = e^{ix} + e^{-ix} = e^{ix}(1 + e^{-2ix})$. Donc, $\ln\,(2\,\cos\,x) = \ln\,(e^{ix}) + \ln\,(1 + e^{-2ix}) = ix + \ln\,(1 + e^{-2ix})$. On fait la substitution dans l'intégrale et on arrive à

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} ix + \ln\,(1 + e^{-2ix})\,dx \\ &= i\frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} \ln(1 + e^{-2ix})\,dx. \end{aligned} \tag{4}$$

L'étape suivante consiste à remplacer le logarithme par une série entière et à intégrer terme par terme. Le développement en série entière est [9, p. 401]

$$\ln\,(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$$

ou, en remplaçant x par e^{-2ix}

$$\ln\,(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{ix}}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{ix}} - \mathrm{e}^{-4\mathrm{ix}}/2 + \mathrm{e}^{-6\mathrm{ix}}/3 - \mathrm{e}^{-8\mathrm{ix}}/4 + \dots.$$

Intégrons :

$$\begin{aligned} \int \ln(1 + e^{-2ix})dx &= \frac{e^{-2ix}}{-2i} - \frac{e^{-4ix}}{-2i\cdot 2^2} + \frac{e^{-6ix}}{-2i\cdot 3^2} - \frac{e^{-8ix}}{-2i\cdot 4^2} + \dots \\ &= \frac{-1}{2i}\left(e^{-2ix} - \frac{e^{-4ix}}{2^2} + \frac{e^{-6ix}}{3^2} - \frac{e^{-8ix}}{4^2} + \dots\right). \end{aligned}$$

Cette dernière expression est à évaluer de 0 à $\pi/2$. Cela donne

$$\int_0^{\pi/2} \ln\,(1 + e^{-2ix})\,dx = \frac{-1}{2i}\left(e^{-i\pi} - 1 - \frac{e^{-2i\pi} - 1}{2^2} + \frac{e^{-3i\pi} - 1}{3^2} - \frac{e^{-4i\pi} - 1}{4^2} + \dots\right).$$

Désormais, chaque exponentielle est évaluée à 1 (pour les multiples pairs de $i\pi$) ou à -1 (pour les multiples impairs). Par conséquent, la moitié des termes sont supprimés et les termes restants sont tous des fractions avec un -2 au numérateur et un carré impair au dénominateur. Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(1+e^{-2ix}\right) dx = \frac{1}{i}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\right)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, les termes impairs de la somme d'Euler totalisent les $3/4$ du total. En combinant cela avec le fait que $1/i = -i$, nous concluons que

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(1+e^{-2ix}\right) dx = \frac{-3i}{4}E.$$

À ce stade, nous devons revenir à l'intégrale que nous avons considérée en premier. En remplaçant l'expression qui vient d'être dérivée dans (4), nous obtenons

$$I = i\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{3}{4}E\right)$$

Mais I est réel, et il équivaut à un pur imaginaire. Cela force les deux côtés de l'équation à disparaître. Fixer le membre de droite à 0 nous donne la conclusion familière $E = \pi^2/6$. Mettre le côté gauche à 0 produit un bonus supplémentaire :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Dans ce tourbillon de manipulations, il n'y a sans doute rien qui aurait pu perturber Euler. En revanche, un étudiant moderne en mathématiques trouverait des raisons d'être sceptique à pratiquement chaque étape. Tout d'abord, l'intégrale originale est impropre, nous devons donc nous soucier de la convergence. Ensuite, afin d'utiliser le logarithme népérien pour des variables complexes, nous devons être sûrs de pouvoir restreindre les nombres complexes à un domaine approprié. (Dans ce cas, il suffit d'observer qu'il n'est jamais nécessaire d'appliquer le logarithme à un réel négatif.) Troisièmement, la série entière du logarithme népérien converge dans un cercle de rayon 1 centré en 0 dans le plan complexe. Malheureusement, pour tout x dans le domaine d'intégration, e^{-2ix} est à la limite de ce cercle, de sorte que nous devons également nous préoccuper de la convergence des séries entières. (Pour cette étape on peut faire appel directement au théorème 3.44 de [16].) Et enfin, il y a l'intégration terme par terme de la somme. De manière générale, nous traitons ces problèmes en commençant par le milieu et en progressant vers la sortie. L'idée est de commencer par la formulation en série de l'intégrale, mais en laissant la limite supérieure être inférieure à $\pi/2$. Ensuite, nous pouvons justifier l'intégration terme par terme et prendre une limite pour atteindre la limite supérieure de $\pi/2$, en déterminant la valeur de l'intégrale dans le processus. En travaillant dans l'autre sens, maintenant que nous savons que l'intégrale existe dans le cas de la formulation en série entière, nous avons le droit d'effectuer les manipulations qui génèrent l'intégrale avec laquelle l'argument ci-dessus a commencé. Cela vérifie que l'intégrale impropre d'origine est bien définie. Pour des commentaires supplémentaires sur la justification des étapes de la preuve, voir [17].

Conclusion

Nous avons vu diverses preuves du résultat d'Euler. Il est intéressant de constater à quel point une large gamme de sujets mathématiques apparaît dans ces preuves. La preuve d'Euler ressemble à une manipulation algébrique directe, mais implique une hypothèse infondée sur les propriétés des séries entières. La première preuve valide que nous avons considérée fonctionne directement à partir de la définition des séries de puissances convergentes en fournissant des limites pour les sommes partielles de la série d'Euler. Deux preuves impliquent chacune le remplacement de la somme par une opération différente. Ainsi, dans le calcul des résidus, une somme de résidus est remplacée par une intégrale de la droite complexe, tandis que dans l'analyse de Fourier, une somme de carrés de coefficients est remplacée par un produit scalaire. Et enfin, deux preuves utilisent une technique d'échange d'une somme et d'une intégrale pour transformer la série d'Euler en une autre forme pouvant être directement résumée. Il n'est pas surprenant qu'il existe encore davantage de preuves de la formule d'Euler (dont quelques-unes par Euler lui-même). Le lecteur intéressé est encouragé à consulter les références pour plus d'approches et de références supplémentaires. La référence [11], dont la première édition parut en 1921, présente un intérêt historique. Dans cet ouvrage encyclopédique, on peut trouver plusieurs preuves du résultat d'Euler (voir articles 136, 156, 189, 210) dans le cadre de procédures générales de manipulation et on peut également analyser les extensions de séries. La preuve de l'article 210 est étroitement liée à la preuve par l'analyse de Fourier donnée ci-dessus.

Remerciements. Merci à Melvin Henriksen, Richard Katz, Alan Krinik et Harris Shultz de m'avoir alerté sur certains des articles cités dans le présent article, à Judith Grabiner et Mark McKinzie pour leur aide avec les références historiques, et aux évaluateurs pour leurs nombreuses suggestions utiles.

Références

1. Aaron D. Abrams, Matteo J. Paris, The probability that $(a, b) = 1$, *College Mathematics Journal*, 23 (1992) 47.

2. Tom M. Apostol, Another elementary proof of Euler's formula for $\zeta(2n)$, *American Mathematical Monthly*, 80 (1973) 425-431.

3. Tom M. Apostol, A proof that Euler missed: Evaluating $\zeta(2)$ the easy way, *Mathematical Intelligencer*, 5 (1983) 59-60.

4. Raymond Ayoub, Euler and the zeta function, *American Mathematical Monthly*, 81 (1974) 1067-1085.

5. Paul Erdös, Underwood Dudley, Some remarks and problems in number theory related to the work of Euler, *Mathematics Magazine*, 56 (1983) 292-298.

6. Leonhard Euler, De Summis Serierum Reciprocarum, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 7 (1734/35), 1740, pp. 123-134, Opera Omnia, 14, 73-86.

7. Daniel P. Giesy, Still another elementary proof that $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$, *Mathematics Magazine*, 45 (1972) 148-149.

8. Judith V. Grabiner, Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus, *American Mathematical Monthly*, 90 (1983) 185-194.

9. Melvin Henriksen, Milton Lees, *Single Variable Calculus*, Worth, New York, 1970.

10. Morris Kline, Euler and infinite series, *Mathematics Magazine*, 56 (1983) 307-314.

11. Konrad Knopp, *Theory and Application of Infinite Series* (traduit de la seconde édition en allemand et révisé en accord avec la quatrième révision), Hafner, New York, ca. 1947.

12. W. A. J. Luxemburg, What is nonstandard analysis? *American Mathematical Monthly*, 80(6) part II (June-July 1973) 38-67.

13. Bill Leonard, Harris S. Shultz, A computer verification of a pretty mathematical result, *Mathematical Gazette*, 72 (1988) 7-10.

14. Mark B. McKinzie, Curtis D. Tuckey, Euler's proof of $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, Annual meeting of the American Mathematical Society, San Antonio, Texas, January 1993.

15. Ioannis Papadimitriou, A simple proof of the formula $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$, *American Mathematical Monthly*, 80 (1973) 424-425.

16. Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, $2^{\text{ième}}$ édition, McGraw Hill, New York, 1964.

17. Dennis C. Russell, Another Eulerian-type proof, *Mathematics Magazine*, 60 (1991) 349.

18. Nicholas Shea, Summing the series $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots$, *Mathematical Spectrum*, 21 (1988-89) 49-55.

19. Alfred Van der Poorten. A proof that Euler missed... Apery's proof of the irrationality of 2(3), *Mathematical Intelligencer*, 1 (1978-1979) 195-203.

20. Don Bernard Zagier, *Zeta Functions in Number Theory*, Annual meeting of the American Mathematical Society, Phoenix, Arizona, January 1989.

Paroles de la chanson *Six Ways to Sum a Series*
(Sur l'air de *Fifty Ways to Leave Your Lover*)

This sum converges to a limit, I can see,
The terms decrease in size so very rapidly.
Isn't there some way to tell what the sum turns out to be ?
There's got to be at least six ways to sum this series.

I added up one hundred terms it took all night.
I added fifty more, but still it was not right.
"Though adding terms this way won't work," I said,
"some other method might."
I'll bet someone could find six ways to sum this series.

Tally up the inverse roots, Toots !
Add some bounds that use cotan, Stan !
Double integrate a square, Cher !
Just give it a try.

Calculate a residue, Stu !
Analyze a Fourier, Ray !
Use an imaginary real, Neal !
It's easy as π !

Dan Kalman : Cet automne, j'ai rejoint le Département de mathématiques de l'Université américaine, Washington DC. Avant cela, j'ai passé 8 ans dans la société Aerospace Corporation de Los Angeles, où j'ai travaillé sur des simulations de systèmes spatiaux et je suis resté en contact avec les mathématiques à travers les programmes et publications du MAA. Lors d'une réunion nationale, j'ai entendu la présentation de Zagier évoquée dans le présent article. Convaincu que cette ingénieuse preuve devait être plus largement connue, je l'ai présentée lors d'une réunion de la section de la Californie sud de la MAA. Certains membres enthousiastes du public ont ensuite partagé avec moi leurs épreuves et références préférées. Ceux-ci ont conduit à davantage d'articles et de preuves et m'ont mis en contact avec un domaine mathématique dont je n'avais jamais soupçonné l'existence. Cet article en est le résultat.