Traduction des sections 1 et 2 du chapitre IV du livre d'Ingham "The distribution of prime numbers"

Formules explicites
Ingham

1. Dans ce chapitre nous proposons de discuter d'un type curieux de représentation exacte par des séries infinies, de fonctions associés à $\psi(x)$. Ces "formules explicites" sont très remarquables et intéressantes en elles-mêmes, et ont des applications importantes, on parlera de certaines d'entre elles en fin de chapitre.

Nos arguments feront intervenir des applications du théorème de Cauchy dans lequel une droite d'intégration bouge à travers la bande critique et nous devons d'abord obtenir une information plus précise à propos de la distribution des parties imaginaires des zéros complexes de $\zeta(s)$.

2. **Densité des zéros.** Dénotons par $N(T)$, où $T > 0$, le nombre (nécessairement fini) de zéros de $\zeta(s)$ dans le rectangle $0 \leqslant \sigma \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T$, qui est, par le Théorème 16, le nombre de zéros $\rho = \beta + \gamma i$ de $\zeta(s)$, ou de $\xi(s)$, pour lesquels $0 < \gamma \leqslant T$.

Théorème 25. Quand $T \to \infty$,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Supposons que $T > 3$, et (pour le présent passage) que T n'est égal à aucun γ. Alors $\xi(s)$ a $2N(T)$ zéros dans le rectangle dont les sommets sont $2 \pm Ti$ et $-1 \pm Ti$, et aucun sur la frontière. Par conséquent, par un théorème de Cauchy (le "principe de l'argument"),

$$4\pi N(T) = [\arg \xi(s)]_C,$$

où $[\arg \xi(s)]_C$ dénote l'accroissement de $\arg \xi(s)$ lorsque s parcourt le périmètre C de ce rectangle dans le sens positif. Maintenant

$$[\arg \xi(s)]_C = [\arg \frac{1}{2} s(s-1)]_C + [\arg \phi(s)]_C,$$

où $\phi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s)$. Le premier terme du côté droit est 4π, et, puisque $\phi(s)$ prend des valeurs égales en les points s et $1-s$ et des valeurs conjuguées en les points $\sigma \pm ti$, le second terme est clairement $4[\arg \phi(s)]_L$, où L est la ligne brisée constituée du segment L_1 de 2 à $2 + Ti$ suivi du segment L_2 de $2 + Ti$ à $\frac{1}{2} + Ti$. Par conséquent

(1) $$\pi N(T) = \pi + [\arg \pi^{-\frac{1}{2}s}]_L + [\arg \Gamma\left(\tfrac{1}{2}s\right)]_L + [\arg \zeta(s)]_L.$$

Nous avons d'abord

$$[\arg \pi^{-\frac{1}{2}s}]_L = [-\frac{1}{2} t \log \pi]_L = -\frac{1}{2} T \log \pi.$$

Ensuite (voir p. 57, note de bas de page, avec $z = \frac{1}{2}Ti, \alpha = \frac{1}{4}$)

$$\begin{aligned} [\arg \Gamma\left(\tfrac{1}{2}s\right)]_L &= [\Im \log \Gamma\left(\tfrac{1}{2}s\right)]_L = \Im \log \Gamma(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}Ti) - \Im \log \Gamma(1) \\ &= \Im \left\{ \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}Ti\right) \log \left(\tfrac{1}{2}Ti\right) - \tfrac{1}{2}Ti + \tfrac{1}{2}\log 2\pi \right\} + O(T^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}T \log \left(\tfrac{1}{2}T\right) - \tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{2}T + O(T^{-1}) \end{aligned}$$

A. Ingham, The distribution of prime numbers, With a foreword by R. C. Vaughan. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xx+114 p.
Traduction Denise Vella-Chemla, janvier 2021

lorsque $T \to \infty$. En substituant dans (1), on obtient

(2) $$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \frac{1}{\pi}[\arg\zeta(s)]_L + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Maintenant soit m le nombre (nécessairement fini, comme cela apparaîtra) de points distincts s' de L (en excluant les extrémités) auxquels $\mathfrak{R}\zeta(s) = 0$. Alors

(3) $$[\arg\zeta(s)]_L \leqslant (m+1)\pi\ ;$$

car, quand s décrit l'une des $m+1$ portions dans lesquelles L est divisé par les points s', $\arg\zeta(s)$ ne peut varier de plus de π puisque $\mathfrak{R}\zeta(s)$ ne change pas de signe. Maintenant, aucun point s' ne peut être sur L_1, puisque

(4) $$\mathfrak{R}\zeta(2+ti) \geqslant 1 - \sum_2^\infty \frac{1}{n^2} > 1 - \frac{1}{2^2} - \int_2^\infty \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi m est le nombre de points distincts σ de l'intervalle $\frac{1}{2} < \sigma < 2$ auxquels $\mathfrak{R}\zeta(\sigma + Ti) = 0$, et ceci est le nombre de zéros distincts de la fonction $g(s) = \frac{1}{2}\{\zeta(s+Ti) + \zeta(s-Ti)\}$ sur le segment $\frac{1}{2} < s < 2$ de l'axe réel ; puisque $g(\sigma) = \mathfrak{R}\zeta(\sigma + Ti)$ pour le réel σ, car les $\zeta(\sigma \pm Ti)$ sont conjugués. Puisque $g(s)$ est régulière, excepté en $s = 1 \pm Ti$, m est par conséquent fini, et nous obtenons une limite supérieure pour m en appliquant le théorème D (p. 49) [1] pour $g(s)$ et pour les cercles $|s-2| \leqslant \frac{7}{4}$, $|s-2| \leqslant \frac{3}{2}$. Puisque $T > 3$, $g(s)$ est régulière dans le grand cercle et satisfait

$$|g(s)| < \frac{1}{2}A_1(|t+T|^{\frac{3}{4}} + |t-T|^{\frac{3}{4}}) < A_1(T+2)^{\frac{3}{4}}$$

par le théorème 9, car $\sigma \geqslant \frac{1}{4}$ et $1 < |t \pm T| < 2 + T$ en tous les points $s = \sigma + ti$ du cercle. On a également $g(2) = \mathfrak{R}\zeta(2+Ti) > \frac{1}{4}$ par (4). Par conséquent, par le Théorème D,

$$\left(\frac{7}{6}\right)^m < \frac{A_1(T+2)^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{4}} < T \qquad (T > T_0 \geqslant 3).$$

Ainsi $m < A_2 \log T$ pour $T > T_0$. En substituant dans (2) et (3), nous déduisons

$$\left|N(T) - \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi}\right| \leqslant A_3 \log T$$

pour $T > T_0$, sous la contrainte que T ne soit pas un γ. Mais cette restriction n'est maintenant plus pertinente, comme on peut le voir en remplaçant T par une valeur plus grande T' (distincte des γ) et en faisant tendre T' vers $T+0$.

Nous notons quelques conséquences du Théorème 25 qui seront utiles dans les applications.

Théorème 25a. *Si h est un nombre positif fixé, alors*

$$N(T+h) - N(T) = O(\log\ T)$$

quand $T \to \infty$.

Car, en écrivant

$$P(t) = (t/2\pi)\log(t/2\pi) - (t/2\pi),$$

1. **Théorème D.** *Supposons que $f(z)$ est régulière sur le cercle $|z - z_0| \leqslant R$, et a n zéros (au moins) dans $|z - z_0| \leqslant r (< R)$.*
Alors, si $f(z_0) \neq 0$,

(12) $$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leqslant \frac{M}{|f(z_0)|},$$

où M est le maximum de $|f(z)|$ sur $|z - z_0| = R$.

on a

$$P(T+h) - P(T) = hP'(T+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1),$$

et le résultat découle du théorème 25, puisque

$$P'(t) = (1/2\pi)\log(t/2\pi).$$

Théorème 25b. *On a*

$$\sum_{0<\gamma\leqslant T} \frac{1}{\gamma} = O(\log^2 T), \qquad \sum_{\gamma>T} \frac{1}{\gamma^2} = O\left(\frac{\log\ T}{T}\right)$$

lorsque $T \to \infty$*.*

Les sommations sont développées sur tout ρ dont la partie imaginaire γ appartient à des domaines spécifiés, du fait qu'on autorise les multiplicités. En dénotant les sommes par S et S' respectivement, on a

$$S \leqslant \sum_{m=0}^{[T]} s_m, \qquad S' \leqslant \sum_{m=[T]}^{\infty} s'_m,$$

où s_m et s'_m sont égaux à $\sum 1/\gamma$ et $\sum 1/\gamma^2$ sommes effectuées sur le domaine $m < \gamma \leqslant m+1$. Si $m \geqslant 1$, le nombre de termes en s_m ou s'_m est

$$N(m+1) - N(m) = v_m,$$

disons, et $s_m \leqslant v_m/m, s'_m \leqslant v_m/m^2$. Par le théorème 25a, $v_m = O(\log\ m)$ lorsque $m \to \infty$; par conséquent, quand $T \to \infty$,

$$S \quad = O(1) + O\left(\sum_2^{[T]} \frac{\log m}{m}\right) = O(\log^2\ T),$$

$$S' \quad = O\left(\sum_{[T]}^{\infty} \frac{\log m}{m^2}\right) = O\left(\frac{\log\ T}{T}\right).$$

Théorème 25c. Si les $\rho = \beta + \gamma i$ avec $\gamma > 0$ sont arrangés en une séquence $\rho_n = \beta_n + \gamma_n i$ telle que $\gamma_{n+1} \geqslant \gamma_n$, alors

$$|\rho_n| \sim \gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log\ n} \qquad \text{lorsque } n \to \infty$$

Car, puisque $N(\gamma_n - 1) < n \leqslant N(\gamma_n + 1)$, et

$$2\pi N(\gamma_n \pm 1) \sim (\gamma_n \pm 1)\log(\gamma_n \pm 1) \sim \gamma_n \log \gamma_n,$$

nous avons d'abord $2\pi n \sim \gamma_n \log \gamma_n$, d'où $\log n \sim \log \gamma_n$, et

$$\gamma_n \sim 2\pi n/\log \gamma_n \sim 2\pi n/\log\ n.$$

Et $\gamma_n \leqslant |\rho_n| < \gamma_n + 1$.

Le théorème 25, qui incarne une des plus importantes propriétés de $\zeta(s)$, a été énoncé par Riemann, mais prouvé pour la première fois par von Mangoldt [2]. L'étape difficile est, bien sûr, l'estimation de $[\arg \zeta(s)]_L$. La preuve ci-dessus

2. Riemann 1 ; von Mangoldt 1, 2, 4 ; H, i, 308-978.

est due à Backlund [3]. Contrairement à la preuve de von Mangoldt, elle ne dépend pas du théorème 18, et elle fournit ainsi une preuve alternative à l'existence d'une infinité de zéros complexes. L'information obtenue de cette manière à propos de la densité de la distribution des zéros est plus précise que celle contenue dans le théorème 18 ; donc nous voyons maintenant (voir théorème 25c) que $\sum |\rho|^{-1}(\log|\rho|)^{-\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 2$, divergente pour $\alpha \leqslant 2$.

On devrait observer que le théorème 25a, qui suffit pour de nombreuses applications, est essentiellement plus simple que le théorème 25. Il peut être prouvé d'un seul coup en appliquant le théorème D directement à $\zeta(s)$ et à deux cercles de centres en $c + Ti$ et passant part les points $\frac{1}{2} + (T + 2h)i$ et $\frac{1}{2} + (T + h)i$ respectivement, où $c = c(h)$ est un nombre positif suffisamment grand, et en utilisant la symétrie autour de $\sigma = \frac{1}{2}$.

3. Backlund 1, 2. Pour de plus amples développements, voir T, 58-61, 87-93, 96.