

Chapitre XIX. Théorie de Minkowski sur les volumes et les surfaces.

La section suivante contient une nouvelle fondation de la théorie minkowskienne des volumes et des surfaces. L'idée de remplacer la sphère de la géométrie spatiale ordinaire, en tant que lieu des points équidistants d'un point fixe, par une surface convexe quelconque, la soi-disant "surface ovale", constitue la base des recherches arithmétiques de Minkowski¹. La poursuite plus géométrique de cette idée a conduit Minkowski au concept fondamental de *volume mixte* V_{123} de trois corps², et le point culminant de sa théorie des volumes et des surfaces est alors la découverte de l'inégalité

$$V_{112}^2 \geq V_{111}V_{122},$$

une inégalité qui possède un caractère purement quadratique, tandis que la démonstration de celle-ci est menée par Minkowski sur la base d'une inégalité cubique. La nouvelle fondation de la théorie minkowskienne qui suit se fait au moyen des théorèmes développés dans la section précédente sur l'équation différentielle partielle linéaire auto-adjointe sur la sphère, et en particulier la démonstration de cette inégalité quadratique réussit ici directement sur la base de la propriété de minimum de l'intégrale de Dirichlet. Dans la mesure où c'est l'inégalité quadratique qui se prête à une démonstration directe au moyen de la théorie des équations différentielles linéaires - l'inégalité cubique apparaît comme une conséquence facile de la quadratique -, il me semble que la signification de la découverte de Minkowski est mise en lumière encore plus claire par la démonstration qui suit, et en même temps cette fondation de la théorie minkowskienne des volumes et des surfaces fournit un exemple brillant pour l'application de la théorie des équations intégrales.

Dans ce qui suit, nous voulons entendre généralement par une fonction homogène de degré r des variables x, y, z une fonction $W(x, y, z)$ qui satisfait l'équation

$$W(\mu x, \mu y, \mu z) = \mu^r W(x, y, z)$$

pour toutes les valeurs positives de μ .

En particulier, si W est une fonction homogène du premier degré et que les dérivées partielles sont à nouveau désignées par des indices, les identités suivantes sont valables :

$$(64) \quad xW_x + yW_y + zW_z = W,$$

$$(65) \quad \begin{cases} xW_{xx} + yW_{yx} + zW_{zx} = 0, \\ xW_{xy} + yW_{yy} + zW_{zy} = 0, \\ xW_{xz} + yW_{yz} + zW_{zz} = 0. \end{cases}$$

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, septembre 2026.

1. Voir ma conférence au Congrès International des Mathématiciens à Paris 1900, n° 4. Gött. Nachr. 1900.

2. Voir ma notice nécrologique sur Minkowski. Gött. Nachr. 1909, p. 16-17.

Des identités (65) on déduit facilement

$$W_{xx}W_{yy} - W_{xy}^2 = W_{yy}W_{zz} - W_{yz}^2,$$

et de là nous tirons, si V désigne une autre fonction homogène quelconque du premier degré en x, y, z , l'identité supplémentaire

$$W_{xx}V_{yy} - 2W_{xy}V_{xy} + W_{yy}V_{xx} = W_{yy}V_{zz} - 2W_{yz}V_{yz} + W_{zz}V_{yy}.$$

Posons pour abréviation

$$\begin{aligned}(W, V) &= W_{yy}V_{zz} - 2W_{yz}V_{yz} + W_{zz}V_{yy} \\ &= W_{zz}V_{xx} - 2W_{zx}V_{zx} + W_{xx}V_{zz} \\ &= W_{xx}V_{yy} - 2W_{xy}V_{xy} + W_{yy}V_{xx}.\end{aligned}$$

Soit maintenant donné dans l'espace XYZ un corps convexe qui contient l'origine à l'intérieur ; nous désignons par $H(\alpha, \beta, \gamma)$ la distance de l'origine au plan tangent de ce corps, dont la normale possède les cosinus directeurs α, β, γ , et nous imaginons la fonction H ainsi déterminée étendue sur la sphère de rayon 1. Nous supposons que H est une fonction du paramètre sur la surface sphérique continûment différentiable au moins deux fois. L'équation de ce plan tangent est

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = H$$

ou, si nous posons

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$H(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} H\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

alors,

$$xX + yY + zZ = H(x, y, z),$$

où H est une fonction homogène du premier degré en x, y, z . De cette équation, nous obtenons par différenciation par rapport à x, y, z immédiatement les coordonnées du point de contact du plan tangent comme fonctions homogènes de degré zéro de x, y, z , comme suit :

$$\begin{aligned}X &= H_x, \\ Y &= H_y, \\ Z &= H_z;\end{aligned}$$

ces équations fournissent en même temps une représentation paramétrique de la surface du corps.

Si nous désignons par S un domaine s'étendant entièrement sur la moitié supérieure $z > 0$ de la sphère unité et que nous laissons dans les équations

$$\begin{aligned}X &= \mu H_x, \\ Y &= \mu H_y, \\ Z &= \mu H_z\end{aligned}$$

le facteur μ prendre les valeurs de 0 à 1 et x, y, z parcourir tous les points de S , alors le point X, Y, Z parcourt la région spatiale Q , qui est découpée par un certain cône ayant son sommet à l'origine à partir de notre corps convexe. Pour calculer le volume de Q , nous introduisons à la place des coordonnées X, Y, Z les variables

$$\mu, \quad s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

et obtenons alors

$$V_Q = \iiint_{(Q)} dX dY dZ = \iint_{(S)} \int_{\mu=0}^{\dots, 1} \Delta d\mu ds dt,$$

où le déterminant fonctionnel a la valeur

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_x & H_y & H_z \\ \mu H_{xz} & \mu H_{yz} & \mu H_{zz} \\ \mu H_{xt} & \mu H_{yt} & \mu H_{zt} \end{vmatrix} = \mu^2 z^2 \begin{vmatrix} H_x & H_y & H_z \\ H_{xz} & H_{yz} & H_{zz} \\ H_{xy} & H_{yy} & H_{zy} \end{vmatrix}$$

Si nous multiplions maintenant dans le dernier déterminant les éléments de la première colonne verticale par $\frac{x}{z}$, ceux de la deuxième par $\frac{y}{z}$ et les ajoutons ensuite à la troisième, nous obtenons en tenant compte de (64), (65), pris pour $W = H$,

$$\Delta = \mu^2 z H (H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2),$$

et par conséquent, en effectuant l'intégration par rapport à μ

$$V_Q = \frac{1}{3} \iint_{(S)} H (H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2) z ds dt.$$

Comme un calcul facile le montre, pour la sphère en utilisant les paramètres s, t

$$(67) \quad \sqrt{eg - f^2} = z^3,$$

et par conséquent l'élément de surface dk de la sphère unité s'exprime par les coordonnées s, t comme suit

$$dk = z^3 ds dt;$$

nous obtenons donc finalement

$$(68) \quad \begin{aligned} V_Q &= \frac{1}{3} \int_{(S)} H \frac{H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2}{z^2} dk \\ &= \frac{1}{3} \int_{(S)} (H, H) dk. \end{aligned}$$

Comme (H, H) , qui résulte de la définition (66), est bien défini partout sur la sphère, on peut étendre dans (68) l'intégrale sur toute la surface de la sphère unité, et nous obtenons le volume total de notre corps convexe sous la forme

$$V = \frac{1}{3} \int (H, H) dk.$$

Si Ω est une fonction arbitraire sur la sphère unité, alors

$$W(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Omega(x, y, z)$$

représente une fonction homogène arbitraire du premier degré en x, y, z . D'après (66) on a

$$\begin{aligned} (W, H) &= \frac{1}{x^2} (W_{yy} H_{zz} - 2W_{yz} H_{yz} + W_{zz} H_{yy}), \\ &= \frac{1}{y^2} (W_{zz} H_{xx} - 2W_{zx} H_{zx} + W_{xx} H_{zz}), \\ &= \frac{1}{z^2} (W_{xx} H_{yy} - 2W_{xy} H_{xy} + W_{yy} H_{xx}), \end{aligned}$$

et comme la première expression est définie pour $x \neq 0$, la deuxième pour $y \neq 0$, la troisième pour $z \neq 0$ partout sur la sphère, nous reconnaissons que

$$L(\Omega) = (W, H)$$

est, au sens de la fixation au début du chapitre XVIII précédent, un opérateur différentiel linéaire régulier sur la sphère; celui-ci est déterminé de manière unique par la fonction H . Le théorème suivant est également valable : *Théorème 49. L'opérateur différentiel linéaire $L(\Omega)$ sur la sphère est auto-adjoint et de type elliptique.*

Pour prouver la première affirmation, nous imaginons comme précédemment sur un domaine partiel S de la sphère les variables

$$s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

introduites comme coordonnées curvilignes et voulons ensuite établir l'opérateur différentiel $\mathfrak{L}(\Omega)$ correspondant à $L(\Omega)$ dans les variables s, t . À cette fin, considérons que dans notre expression (W, H) les différentiations par rapport à x, y, z doivent être comprises de telle sorte que x, y, z soient trois variables indépendantes. Nous obtenons maintenant W, H à partir de Ω, H , en les considérant comme des fonctions des coordonnées curvilignes s, t sur le domaine partiel S de la sphère, par les formules

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Omega \\ &= z\sqrt{1 + s^2 + t^2} \Omega(s, t), \\ H(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} H \\ &= z\sqrt{1 + s^2 + t^2} H(s, t), \end{aligned}$$

et comme d'après cela

$$\begin{aligned}
W_{xx} &= \frac{1}{z} \left(z \sqrt{1 + s^2 + t^2} \Omega(s, t) \right)_{ss}, \\
W_{xy} &= \frac{1}{z} \left(z \sqrt{1 + s^2 + t^2} \Omega(s, t) \right)_{st}, \\
W_{yy} &= \frac{1}{z} \left(z \sqrt{1 + s^2 + t^2} \Omega(s, t) \right)_{tt}, \\
H_{xx} &= \frac{1}{z} \left(z \sqrt{1 + s^2 + t^2} H(s, t) \right)_{ss}, \\
H_{xy} &= \frac{1}{z} \left(z \sqrt{1 + s^2 + t^2} H(s, t) \right)_{st}, \\
H_{yy} &= \frac{1}{z} \left(z \sqrt{1 + s^2 + t^2} H(s, t) \right)_{tt},
\end{aligned}$$

nous parvenons finalement, en tenant compte de (67), au résultat

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\Omega) &= \sqrt{eg - f^2} L(\Omega) = z^3(W, H) \\
(69) \quad &= \sqrt{1 + s^2 + t^2} \left\{ (\sqrt{1 + s^2 + t^2} \Omega_s)_s (\sqrt{1 + s^2 + t^2} H)_t \right. \\
&\quad - 2(\sqrt{1 + s^2 + t^2} \Omega_s)_t (\sqrt{1 + s^2 + t^2} H)_s \\
&\quad \left. + (\sqrt{1 + s^2 + t^2} \Omega_t)_t (\sqrt{1 + s^2 + t^2} H)_s \right\}.
\end{aligned}$$

Si nous prenons dans l'expression différentielle linéaire la plus générale $\mathfrak{L}(z)$ (S. 220) - sous α une fonction quelconque de s, t comprise -

$$a = \alpha_{tt}, \quad b = -\alpha_{st}, \quad c = \alpha_{ss}, \quad l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

alors les conditions pour que $\mathfrak{L}(z)$ soit auto-adjointe, à savoir les équations

$$l = a_s + b_t, \quad m = b_s + c_t,$$

sont satisfaites; par conséquent l'expression

$$\alpha_{tt} z_{ss} - 2\alpha_{st} z_{st} + \alpha_{ss} z_{tt}$$

et par suite, compte tenu d'une remarque faite à la page 241, l'expression (69) est également auto-adjointe; la même chose vaut donc aussi pour notre fixation de l'opérateur différentiel linéaire $L(\Omega)$ sur la sphère.

Pour reconnaître en outre le caractère elliptique de l'opérateur différentiel $L(\Omega)$, nous avons manifestement besoin de la preuve de l'inégalité

$$(70) \quad H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2 > 0$$

nécessaire. D'après les considérations que nous avons faites au début de ce chapitre XIX (p. 243), les plans tangents de notre corps convexe ont été représentés par l'équation

$$xX + yY + zZ = H(x, y, z)$$

Divisons cette équation par z et introduisons ensuite

$$s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z},$$

on obtient alors cette équation sous la forme

$$sX + tY + Z = H(s, t, 1),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} X &= H_s, \\ Y &= H_t, \\ Z &= H - sH_s - tH_t. \end{aligned}$$

Comme nous le voyons, le passage de la représentation de la surface de notre corps par des coordonnées de points, où Z est considéré comme fonction des variables indépendantes X, Y , à la représentation par des coordonnées de plans, où H est considéré comme fonction des variables indépendantes s, t , n'est rien d'autre que la transformation de Legendre usuelle dans la théorie des équations aux dérivées partielles. La théorie de la transformation de Legendre enseigne comme on le sait que entre les dérivées du second ordre la relation

$$H_{ss}H_{tt} - H_{st}^2 = \frac{1}{Z_{XX}Z_{YY} - Z_{XY}^2}$$

est valable, et comme en raison de la convexité de notre surface le numérateur du côté droit est positif, il en va de même pour le côté gauche, et par conséquent l'inégalité (70) est également valable.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer la théorie générale des chapitres XVIII précédents à l'opérateur différentiel linéaire $L(\Omega)$. En ce qui concerne d'abord le problème d'intégration (voir le théorème général 44 établi à la page 226-227), celui-ci nécessite avant tout la connaissance du fait important suivant : *Théorème 50. Toute solution continue de l'équation différentielle homogène sur la sphère*

$$(71) \quad L(\Omega) = 0$$

est une combinaison linéaire des trois solutions

$$\Omega = x, \quad \Omega = y, \quad \Omega = z.$$

Pour la preuve, nous supposons qu'il existe une fonction continue ω sur la sphère, qui satisfait l'équation différentielle (71). Posons ensuite

$$w(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \omega \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

alors w devient une fonction homogène du premier degré en x, y, z , qui satisfait l'équation

$$(w, H) = 0$$

et donc, en raison de (66), également en tant que fonction des trois variables indépendantes x, y, z , les équations

$$(72) \quad \begin{cases} w_{yy}H_{zz} - 2w_{yz}H_{yz} + w_{zz}H_{yy} = 0, \\ w_{zz}H_{xx} - 2w_{zx}H_{zx} + w_{xx}H_{zz} = 0, \\ w_{xx}H_{yy} - 2w_{xy}H_{xy} + w_{yy}H_{xx} = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant x_1, y_1, z_1 un point sur la sphère unité où la fonction w_x prend la plus petite valeur sur la sphère. Comme w_x est homogène de degré zéro, cette plus petite valeur k est en même temps le minimum de la fonction w_x dans l'espace pour les trois variables indépendantes x, y, z . Posons

$$\begin{aligned} \xi &= x - x_1, \\ \eta &= y - y_1, \\ \zeta &= z - z_1, \end{aligned}$$

et développons w_x en une série procédant suivant les puissances de ξ, η, ζ comme suit

$$(73) \quad w_x = k + N(\xi, \eta, \zeta) + \dots;$$

ici N désigne les termes de dimension la plus basse apparaissant dans le développement, et n soit le degré de cet agrégat homogène N en ξ, η, ζ ; on a fait ici l'hypothèse que w_x n'est pas constant. Comme w_x doit avoir un minimum à la place $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$, N est nécessairement une forme définie : pour tous les ξ, η, ζ l'inégalité

$$N(\xi, \eta, \zeta) \geq 0.$$

D'autre part, développons aussi w en une série procédant suivant les puissances de ξ, η, ζ , comme suit

$$(74) \quad w = c + l(\xi, \eta, \zeta) + M(\xi, \eta, \zeta) + \dots;$$

ici c désigne une constante, l les membres linéaires homogènes et enfin M les membres de dimension la plus basse apparaissant après les membres linéaires dans le développement; m soit le degré de cet agrégat homogène M en ξ, η, ζ .

Nous désignons maintenant par les valeurs des expressions

$$H_{xx}, H_{yy}, H_{zz}, H_{yz}, H_{zx}, H_{xy}$$

pour $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ c'est-à-dire $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ resp. par

$$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu;$$

il résulte alors, en introduisant (74) dans les deux dernières équations (72), en tenant compte des termes de dimension la plus basse

$$(75) \quad \begin{cases} M_{zz}\alpha - 2M_{yz}\mu + M_{yy}\gamma = 0, \\ M_{zz}\beta - 2M_{zx}\nu + M_{xx}\alpha = 0. \end{cases}$$

Supposons d'abord que M contienne un terme avec la variable ξ : alors la comparaison de (73) avec (74) enseigne que

$$N = M_\xi$$

et de là nous voyons à nouveau, en différenciant (75) par rapport à ξ , que N satisfait aussi les mêmes équations

$$(76) \quad N_{zz}\alpha - 2N_{yz}\mu + N_{yy}\gamma = 0,$$

$$(77) \quad N_{zz}\beta - 2N_{zx}\nu + N_{xx}\alpha = 0.$$

Posons maintenant

$$(78) \quad N = N_h \zeta^h + Z \quad (0 \leq h \leq n),$$

où N_h est une fonction non identiquement nulle de degré $n-h$ en ξ, η et Z est une fonction de ξ, η, ζ , qui contient le facteur ζ^{h+1} . En introduisant cette expression pour N dans (77), nous reconnaissons que N_h doit aussi satisfaire l'équation (77).

En raison de la convexité de la surface représentée par H , les inégalités suivantes sont valables pour les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$

$$\alpha\gamma - \mu^2 > 0, \quad \alpha\beta - \nu^2 > 0;$$

cette dernière montre que toute solution non constante de l'équation différentielle partielle (77) est nécessairement une fonction indéfinie, c'est-à-dire une fonction de ξ, η qui prend des valeurs positives et négatives. Mais si N_h était indéfini, alors en raison de (78) N serait aussi capable, pour des valeurs suffisamment petites de ζ , de prendre des valeurs positives et négatives, ce qui contredit le caractère défini de N établi ci-dessus. Par conséquent, N_h devrait nécessairement être une constante non nulle et en même temps

$$h = n, \quad N = N_n \zeta^n$$

être. La substitution de cette valeur pour N dans (76) enseigne cependant, puisque $\alpha \neq 0$, l'impossibilité de cela.

Il reste encore à examiner la seconde hypothèse, à savoir que M ne dépend que de ξ, η . L'introduction de $M_z = 0$ dans (75) donne

$$M_{zz} = 0, \quad M_{yy} = 0$$

c'est-à-dire

$$(79) \quad M = C\eta\xi,$$

où C désigne une constante non nulle. Maintenant w satisfait, en tant que fonction homogène du premier degré en x, y, z , l'identité

$$xw_x + yw_y + zw_z = w$$

c'est-à-dire

$$(x_1 + \xi)w_x + (y_1 + \eta)w_y + (z_1 + \zeta)w_z = w$$

ou en tenant compte de (73), (74), (79)

$$(80) \quad \begin{aligned} & (x_1 + \xi)(k + N + \dots) + (y_1 + \eta)(l_y + C\xi + \dots) + (z_1 + \zeta)(l_z + C\eta + \dots) \\ & = c + l + C\eta\xi + \dots \end{aligned}$$

Si nous rassemblons des deux côtés de cette identité les termes du premier ordre en ξ, η, ζ , il résulte

$$\xi k + y_1 C\xi + \eta l_y + z_1 C\eta + \zeta l_z = l,$$

et parce que

$$k = l_\xi, \quad \xi l_\xi + \eta l_\eta + \zeta l_\zeta = l$$

il s'ensuit

$$y_1 C\xi + z_1 C\eta = 0,$$

c'est-à-dire

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0$$

et par conséquent

$$x_1 = \pm 1.$$

Par l'introduction de ces valeurs, (80) se transforme en

$$(\pm 1 + \xi)(k + N + \dots) + \eta(l_y + C\xi + \dots) + \zeta(l_z + C\eta + \dots) = c + l + C\eta\xi + \dots$$

et si nous rassemblons ici les termes du second degré des deux côtés, il vient, selon que le degré n de N est égal à 2 ou supérieur à 2, l'équation

$$\pm N + C\eta\xi + C\eta\zeta = C\eta\xi$$

ou l'équation

$$C\eta\xi + C\eta\zeta = C\eta\xi$$

doit être satisfaite. Cette dernière équation est impossible ; la première donne

$$N = \mp C\eta\xi,$$

ce qui contredit le caractère défini de N .

Ainsi notre hypothèse initiale est réfutée : dans le développement (73) un terme N ne peut pas apparaître, c'est-à-dire que w_x est une constante. Comme de la même manière w_y et w_z doivent aussi être des constantes, il s'ensuit que w n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire des trois fonctions x, y, z .

Du théorème démontré ci-dessus résulte, sur la base du théorème 44 établi au chapitre XVIII (p. 226-227) : *Théorème 51. L'équation différentielle inhomogène sur la sphère*

$$L(\Omega) = f,$$

est alors et seulement alors résoluble, si la fonction donnée f sur la sphère satisfait les trois conditions intégrales

$$\begin{aligned}\int f x dk &= 0, \\ \int f y dk &= 0, \\ \int f z dk &= 0.\end{aligned}$$

sont remplies.

Si nous prenons dans $L(\Omega)$ en particulier

$$H = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

alors il vient

$$L(\Omega) = (W, R) = \frac{1}{z^2} \left\{ (1 - y^2)W_{xx} + 2xyW_{xy} + (1 - x^2)W_{yy} \quad (z \neq 0); \right.$$

comme, ainsi qu'un calcul simple l'enseigne, l'expression à droite ici n'est rien d'autre que la somme des deux rayons de courbure principaux de la surface donnée par W , notre théorème général se transforme dans ce cas en un théorème connu établi par A. Hurwitz³ et démontré au moyen de la théorie des fonctions sphériques.

Pour l'expression ci-dessus V (p. 245) du volume d'un corps convexe, Minkowski a établi une généralisation pour le volume mixte de trois corps convexes : soient H_1, H_2, H_3 les fonctions homogènes du premier degré déterminant ces corps, alors Minkowski définit le volume mixte de trois corps par l'intégrale à étendre sur toute la sphère unité

$$V(H_1, H_2, H_3) = V_{123} = \frac{1}{3} \int (H_1, H_2, H_3) dk.$$

Si nous posons dans la formule (15)

$$w = H_1, \quad z = H_2$$

et tenons compte que notre opérateur différentiel

$$L(\Omega) = (W, H_3)$$

est auto-adjoint, la même montre immédiatement l'exactitude de l'équation

$$\int H_1(H_2, H_3) dk = \int H_2(H_1, H_3) dk$$

c'est-à-dire qu'il est

$$V_{123} = V_{213},$$

et comme manifestement aussi

$$V_{123} = V_{132}$$

3. Voir Ann. Ec. Norm. Sup. 19 (1902), p. 404.

il se trouve ainsi confirmé le théorème de Minkowski, *que le volume mixte de trois corps conserve sa valeur lors des permutations de ceux-ci.*

Comme partout sur la sphère

$$H > 0, \quad (H, H) > 0$$

est vérifié, alors $\frac{(H, H)}{H}$ est aussi une fonction partout positive, et par conséquent notre théorie de l'équation différentielle partielle sur la sphère, telle qu'elle culmine dans le théorème 48 énoncé à la fin du chapitre XVIII p. 241-242, peut être appliquée à l'équation différentielle

$$(81) \quad L(\Omega) + \lambda \frac{(H, H)}{H} \Omega = 0$$

Nous tirons de ce théorème général directement que cette équation n'a qu'un nombre fini de valeurs propres négatives, mais une infinité de valeurs propres positives. D'après ce qui a été démontré précédemment, nous savons en outre que $\lambda = 0$ est une valeur propre triple. En outre, nous voyons que $\lambda = -1$ est en tout cas une valeur propre de cette équation différentielle et $\Omega = H$ une fonction propre associée. Nous voulons maintenant montrer que $\lambda = -1$ n'est qu'une valeur propre simple et qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres négatives en dehors d'elle. À cette fin, nous introduisons dans (81)

$$H = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

en raison de

$$(R, R) = 2$$

nous obtenons ainsi l'équation différentielle plus spéciale

$$(82) \quad L_0(\Omega) + 2\lambda\Omega = 0,$$

où

$$(83) \quad L_0(\Omega) = (W, R) = \frac{1}{z^2} \left\{ (1 - y^2)W_{xx} + 2xyW_{xy} + (1 - x^2)W_{yy} \right\} \quad (z \neq 0)$$

est.

Cette équation différentielle est identique à l'équation différentielle des fonctions sphériques. Si en effet Γ désigne une fonction homogène de degré h , qui satisfait l'équation de potentiel

$$(84) \quad \Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + \Gamma_{zz} = 0$$

et posons

$$\Gamma = R^{h-1}W,$$

alors il vient

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx} &= R^{h-1}W_{xx} + 2(h-1)xR^{h-3}W_x \\ &\quad + \left\{ (h-1)R^{h-3} + (h-1)(h-3)x^2R^{h-5} \right\} W. \end{aligned}$$

Ajoutons à cela les expressions correspondantes pour Γ_{yy}, Γ_{zz} et tenons compte des identités (64), (65) - correspondant au fait que W est une fonction homogène du premier degré -, nous obtenons alors sur la sphère en raison de $R = 1$ l'équation

$$\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + \Gamma_{zz} = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} + (h - 1)(h + 2)W.$$

Or, en raison de (65), pour $R = 1$

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = \frac{1}{z^2} \left\{ (1 - y^2)W_{xx} + 2xyW_{xy} + (1 - x^2)W_{yy} \right\},$$

et par conséquent, en raison de (83), l'équation de potentiel (84) passe dans l'équation différentielle

$$(W, R) + (h - 1)(h + 2)W = 0,$$

ou si l'on pose

$$W = R\Omega$$

dans

$$L_0(\Omega) + (h - 1)(h + 2)\Omega = 0.$$

La théorie des fonctions sphériques enseigne que cette équation n'admet aucune autre solution continue sur la sphère que celles provenant des potentiels homogènes de degré

$$h = 0, 1, 2, \dots$$

et comme l'équation de potentiel (84) possède exactement $2h + 1$ telles solutions de degré h , il s'ensuit que l'équation différentielle (82) possède généralement pour $h = 0, 1, 2, \dots$ la grandeur

$$\lambda = \frac{1}{2}(h - 1)(h + 2)$$

comme valeur propre de multiplicité $2h + 1$. Pour $h = 0$ nous obtenons $\lambda = -1$, pour $h = 1$ il résulte $\lambda = 0$ comme valeur propre triple, ce qui confirme le résultat trouvé précédemment pour l'équation différentielle générale (81). Au-delà, nous reconnaissons le fait important que l'équation différentielle spéciale (82) possède la valeur propre $\lambda = -1$ comme valeur propre simple, et qu'à part cette valeur et $\lambda = 0$, toutes les autres valeurs propres sont positives, qu'en particulier la plus petite valeur propre positive est $\lambda = 2$ (pour $h = 2$). Il est maintenant facile, en vertu du théorème 47 sur la variation continue des valeurs propres lors de la variation continue d'un paramètre dans l'équation différentielle (p. 238), de transférer le fait trouvé ci-dessus à l'équation différentielle générale (81). En raison de (70), l'équation quadratique en t

$$H_{xx}t^2 + 2H_{xy}t + H_{yy} = 0$$

n'a pas de racine réelle, et comme la même chose vaut pour l'équation quadratique

$$R_{xx}t^2 + 2R_{xy}t + R_{yy} = 0$$

il en va de même pour l'équation

$$(\mu H_{xx} + (1 - \mu)R_{xx})t^2 + 2(\mu H_{xy} + (1 - \mu)R_{xy})t + \mu H_{yy} + (1 - \mu)R_{yy} = 0,$$

où μ désigne un paramètre réel restreint à l'intervalle

$$(85) \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

aucune racine réelle t , et par conséquent

$$(\mu H_{xx} + (1 - \mu)R_{xx})(\mu H_{yy} + (1 - \mu)R_{yy}) - (\mu H_{xy} + (1 - \mu)R_{xy})^2 > 0;$$

c'est-à-dire que toutes les surfaces représentées par la famille de fonctions

$$H_\mu = \mu H + (1 - \mu)R$$

sont convexes ; par conséquent les faits développés précédemment pour $L(\Omega)$

$$L_\mu(\Omega) = (W, H_\mu)$$

et pour l'équation différentielle

$$(86) \quad L_\mu(\Omega) + \lambda \frac{(H_\mu, H_\mu)}{H_\mu} \Omega = 0.$$

L'équation différentielle (86) passe pour $\mu = 0$ en (82), pour $\mu = 1$ en (81). L'équation différentielle (82) possède, comme nous l'avons vu, du plus petit au plus grand, les valeurs propres suivantes

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = 2.$$

L'utilisation du théorème mentionné ci-dessus sur la variation continue des valeurs propres (p. 238) et la prise en compte du fait que $\lambda = 0$ pour toutes les valeurs du paramètre μ doit être exactement une valeur propre triple, montre que, tandis que μ parcourt l'intervalle (85), la cinquième valeur propre doit toujours rester positive, en particulier aussi pour $\mu = 1$.

Nous résumons les résultats trouvés comme suit : *Théorème 52. L'équation différentielle partielle (81) sur la sphère possède $\lambda = -1$ comme valeur propre simple : la fonction propre associée est $\Omega = H$; en outre, pour elle $\lambda = 0$ est une valeur propre triple : les fonctions propres associées sur la sphère sont x, y, z : les autres valeurs propres sont positives. Le système des fonctions propres de (81)*

$$\Omega_1 = H, \quad \Omega_2 = x, \quad \Omega_3 = y, \quad \Omega_4 = z, \quad \Omega_5, \quad \Omega_6, \dots$$

constitue un système de fonctions, lequel pour $H = 1$ passe dans le système des fonctions sphériques et doit être considéré comme la généralisation de ces dernières, si l'on remplace, au sens de la géométrie minkowskienne, la sphère par une surface convexe arbitraire. Si l'on pense les $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$, comme d'habitude, orthonormalisées, alors toute fonction arbitraire deux fois continûment différentiable f sur la sphère peut être développée à la manière de Fourier suivant ces fonctions propres comme suit :

$$f = c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2 + c_3 \Omega_3 + \dots, \quad c_h = \int \frac{(H, H)}{H} f \Omega_h dk.$$

Nous sommes maintenant en mesure de déduire l'inégalité quadratique fondamentale entre les volumes mixtes de deux corps, qui a déjà été mentionnée dans l'introduction de cette section ; celle-ci nous apparaît comme le résultat du fait que la cinquième valeur propre λ_5 de l'équation

différentielle (81) est positive. En fait, conformément au théorème général établi à la fin de la section XVIII, λ_5 est le minimum de l'intégrale de Dirichlet

$$D(\Omega) = - \int (W, W) dk$$

sous les conditions secondaires

$$(87) \quad \int \frac{(H, H)}{H} \Omega^2 dk = 1,$$

$$(88) \quad \int (H, H) \Omega dk = 0,$$

$$(89) \quad \begin{cases} \int \frac{(H, H)}{H} x \Omega dk = 0, \\ \int \frac{(H, H)}{H} y \Omega dk = 0, \\ \int \frac{(H, H)}{H} z \Omega dk = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant G une fonction homogène arbitraire du premier degré, qui satisfait sur la sphère, substituée à Ω , à la condition (88). La fonction déterminée par G sur la sphère, nous la désignons par Γ . Nous choisissons alors les trois constantes a, b, c de telle sorte que la fonction

$$(90) \quad \Omega = \Gamma + ax + by + cz$$

satisfasse sur la sphère les trois conditions (89). Ceci est certainement possible, puisque dans le cas contraire il existerait de telles constantes a, b, c , non toutes nulles, que la combinaison linéaire $ax + by + cz$ substituée à Ω satisfasse les trois conditions (89); mais alors il s'ensuivrait, comme on le voit immédiatement, aussi

$$\int \frac{(H, H)}{H} (ax + by + cz)^2 dk = 0,$$

et ce n'est pas le cas, puisque l'intégrande est positif partout. En raison de

$$\int (H, H)(ax + by + cz) dk = \int (H, ax + by + cz) dk = 0$$

la fonction Ω représentée dans (90) satisfait aussi la condition (88). Si maintenant la fonction Ω n'est pas identiquement nulle pour tous les points de la sphère, - ce qui n'était possible que si G était égal à une combinaison linéaire de x, y, z - nous pouvons la multiplier par une constante de telle sorte que la condition (87) soit aussi remplie. En raison de $\lambda_5 > 0$, il s'ensuit alors $D(\Omega) > 0$. Mais comme

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= - \int (G + ax + by + cz, G + ax + by + cz) dk \\ &= - \int (G, G) dk \end{aligned}$$

il en résulte le résultat : l'inégalité

$$(91) \quad \int (G, G) dk \leq 0$$

est toujours valable, si G désigne une fonction homogène arbitraire du premier degré, pour laquelle

$$\int (G, H) dk = 0$$

est rempli, et dans cette inégalité (91) le signe d'égalité n'a lieu que si G est une combinaison linéaire des trois fonctions x, y, z . De ce fait, nous tirons, si nous posons $G = H - F$, immédiatement le résultat supplémentaire : l'inégalité

$$(92) \quad \int (H, H) dk \geq \int (F, F) dk,$$

est toujours valable, si F désigne une fonction homogène arbitraire du premier degré, pour laquelle

$$\int (H, H) dk = \int (F, H) dk$$

est rempli, et dans cette inégalité (92) le signe d'égalité n'a lieu que s'il existe trois constantes a, b, c telles que

$$(93) \quad F = H + ax + by + cz.$$

Les formules pour les coordonnées de points X, Y, Z de la surface, telles qu'elles ont été établies au début de cette section p. 244, enseignent que, si deux fonctions F, H appartenant à des corps convexes sont liées entre elles par une relation de la forme (93), l'un des corps provient de l'autre par une simple translation parallèle. Si nous entendons donc par F une fonction homogène du premier degré appartenant à un corps convexe, comme H , le résultat trouvé précédemment s'exprime aussi comme suit : Si pour deux corps convexes, qui sont déterminés par H, F ,

$$(94) \quad V(H, H, H) = V(H, H, F)$$

est, alors l'inégalité

$$(95) \quad V(H, H, H) \geq V(H, F, F)$$

est toujours valable et ici le signe d'égalité n'a lieu que si l'un des corps provient de l'autre par une simple translation parallèle. Soient maintenant donnés deux corps convexes quelconques ; soient H, G les fonctions du premier degré qui leur appartiennent. En raison de $G > 0$ la constante

$$V(H, H, G) = \frac{1}{3} \int G(H, H) dk$$

positive et par conséquent aussi la fonction

$$F = \frac{V(H, H, H)}{V(H, H, G)} G.$$

Le corps défini par F provient du corps défini par G , comme on le voit, par une transformation de similitude. Comme en outre F satisfait manifestement à la condition (94), il résulte de ce qui précède la validité de l'inégalité (95), c'est-à-dire qu'il est

$$V(H, H, H) \geq \left(\frac{V(H, H, H)}{V(H, H, G)} \right)^2 V(H, G, G)$$

ou

$$(96) \quad V(H, H, G)^2 \geq V(H, H, H)V(H, G, G).$$

Le théorème suivant, qui constitue le point culminant de la théorie minkowskienne des volumes et des surfaces, est donc valable. *Pour deux corps convexes, l'inégalité quadratique (96) est toujours valable, où le signe d'égalité n'a lieu que si l'un des corps provient de l'autre par translation parallèle et transformation de similitude.* Par échange des deux corps, il résulte de (96) l'inégalité

$$(97) \quad V(H, G, G)^2 \geq V(G, G, G)V(H, H, G).$$

Par élévation au carré de (96) et multiplication par (97), il résulte après suppression du facteur positif $V(H, G, G)^2 V(H, H, G)$ l'inégalité

$$(98) \quad V(H, H, G)^3 \geq V(H, H, H)^2 V(G, G, G);$$

c'est-à-dire que le théorème est valable : *Pour deux corps convexes, l'inégalité cubique (98) est toujours valable, où le signe d'égalité n'a lieu que si l'un des corps provient de l'autre par translation parallèle et transformation de similitude.* Si, comme précédemment

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

alors $H + \epsilon R$ représente un corps parallèle au corps défini par H à la distance ϵ . Comme manifestement la surface O du corps défini par H est

$$O = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(H + \epsilon R, H + \epsilon R, H + \epsilon R) - V(H, H, H)}{\epsilon}$$

nous obtenons alors

$$O = 3V(H, H, R) = \frac{1}{2} \int (H, H) dk.$$

D'autre part, il est

$$\begin{aligned} V(H, R, R) &= \frac{1}{3} \int H dk \\ &= \frac{1}{3} \int (R, H) dk \\ &= \frac{1}{3} \int (e_1 + e_2) dk \\ &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right) d\omega, \end{aligned}$$

si e_1, e_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface définie par H et $d\omega$ son élément de surface ; nous posons

$$M = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right) d\omega$$

et désignons cette intégrale comme l'intégrale de la courbure moyenne et du corps convexe. Si nous prenons dans les inégalités (96), (97), (98) $G = R$ et appelons V le volume du corps, nous obtenons

$$(99) \quad \begin{cases} O^2 \geq 3VM, \\ M^2 \geq 4\pi O, \\ O^3 \geq 36\pi V^2, \end{cases}$$

et dans ces inégalités le signe d'égalité n'a lieu que si le corps convexe provient de la sphère unité par translation parallèle et transformation de similitude, c'est-à-dire s'il est lui-même une sphère. Par suite, les inégalités (99), (100) expriment certaines propriétés de minimum caractéristiques faciles à formuler de la sphère. Les inégalités de Minkowski (96), (98) sont donc des généralisations de telles propriétés, telles qu'elles sont valables dans une géométrie minkowskienne, où une surface convexe arbitraire est prise comme surface ovale à la place de la sphère.