

8. Le plan de Riemann pour prouver le théorème des nombres premiers

8.1. Une méthode pour estimer précisément le nombre de nombres premiers. Jusqu'au milieu du dix-neuvième siècle, toutes les approches pour estimer $\pi(x) = \#\{\text{nombres premiers} \leq x\}$ étaient relativement directes, basées sur la théorie élémentaire des nombres et des principes combinatoires, ou la théorie des formes quadratiques. En 1859, pourtant, le grand géomètre Riemann releva le défi de compter les nombres premiers d'une façon différente. Il écrivit juste un article qu'on pourrait dire de "théorie des nombres", mais ce court mémoire eut un impact qui a duré presque un siècle et demi, et ses idées ont défini le sujet que l'on appelle désormais *théorie analytique des nombres*.

Le mémoire de Riemann décrivait une approche surprenante du problème, une approche utilisant la théorie de l'analyse complexe, qui était en ce temps-là un sujet encore en développement¹. Cette nouvelle approche de Riemann semblait éloignée du royaume dans lequel vivait le problème original. Pourtant elle avait deux caractéristiques clefs :

- c'était un moyen pratique de régler la question une bonne fois pour toutes ;
- elle faisait des prédictions qui étaient similaires à la prédiction de Gauss, bien que différentes.

En effet, elle suggère même un terme secondaire pour compenser l'erreur que l'on a vu dans les données de la table en section 2.10².

La méthode de Riemann est la base de notre démonstration principale du théorème des nombres premiers, et dans ce chapitre, nous donnerons une introduction tranquille aux idées clefs qu'elle contient. Commençons par extraire la prédiction clef du mémoire de Riemann et énonçons-la en langage complètement élémentaire :

$$\text{ppcm}[1, 2, 3, \dots, x] \text{ est environ égal à } e^x.$$

En utilisant les données pour tester sa précision, on obtient :

x	Entier le plus proche de $\ln(\text{ppcm}[1, 2, 3, \dots, x])$	Différence
100	94	-6
1000	997	-3
10000	10013	13
100000	100052	57
1000000	999587	-413

Chapitre trouvé dans la page de cours d'Andrew Granville ici <https://dms.umontreal.ca/~andrew/Courses/Chapter8.pdf>.

Traduction Denise Vella-Chemla, août 2023.

¹En effet, le mémoire de Riemann a été un élément significatif dans le développement de la théorie des fonctions analytiques, notamment dans leurs aspects globaux.

²Fournissons ici les valeurs de la section 2.10 de $\text{Li}(x) - \pi(x)$ pour x de 10^3 à 10^{23} :
10, 17, 38, 130, 339, 754, 1701, 3104, 11588, 38263, 108971, 314890, 1052619, 3214632, 7956589, 21949555, 99877775, 22274597394254, 1932355208, 7236148412.

La prédiction de Riemann peut être exprimée précisément et explicitement par

$$(8.1.1) \quad |\log(\text{ppcm}[1, 2, \dots, x]) - x| \leq 2\sqrt{x}(\log x)^2 \quad \text{pour tout } x \geq 100.$$

Puisque la puissance d'un nombre premier p qui divise $\text{ppcm}[1, 2, 3, \dots, x]$ est précisément la plus grande puissance de p n'excédant pas x , on a que

$$\left(\prod_{p \leq x} p\right) \times \left(\prod_{p^2 \leq x} p\right) \times \left(\prod_{p^3 \leq x} p\right) \times \dots = \text{ppcm}[1, 2, 3, \dots, x].$$

En combinant cela avec la prédiction de Riemann et en prenant les logarithmes, on déduit que

$$\left(\sum_{p \leq x} \log p\right) \times \left(\sum_{p^2 \leq x} \log p\right) \times \left(\sum_{p^3 \leq x} \log p\right) \times \dots \text{ est environ } x.$$

Les nombres premiers dans la première somme ici sont précisément les nombres premiers comptés par $\pi(x)$, les nombres premiers dans la seconde somme sont ceux comptés par $\pi(x^{1/2})$, et etc. Par sommation partielle, on en déduit que

$$\pi(x) + \frac{1}{2}(x^{1/2}) + \frac{1}{3}(x^{1/3}) + \dots \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \text{Li}(x).$$

Si on résout pour $\pi(x)$ de manière convenable, on trouve la forme équivalente

$$\pi(x) \approx \text{Li}(x) - \frac{1}{2}\text{Li}(x^{1/2}) + \dots$$

Par conséquent, la méthode de Riemann amène plus ou moins la même prédiction que celle de Gauss, mais avec un supplément, le second terme qui, on l'espère, compensera l'excès qu'on a constaté avec la prédiction de Gauss. En revoyant les données (où "excès de Riemann" représente $\text{Li}(x) - \frac{1}{2}\text{Li}(\sqrt{x}) - \pi(x)$, alors que "excès de Gauss" représente $\text{Li}(x) - \pi(x)$ comme précédemment), on a :

x	{nombres premiers $\leq x$ }	excès de Gauss	excès de Riemann
10^8	5761455	753	131
10^9	50847534	1700	-15
10^{10}	455052511	3103	-1711
10^{11}	4118054813	11587	-2097
10^{12}	37607912018	38262	-1050
10^{13}	346065536839	108970	-4944
10^{14}	3204941750802	314889	-17569
10^{15}	29844570422669	1052618	76456
10^{16}	279238341033925	3214631	333527
10^{17}	2623557157654233	7956588	-585236
10^{18}	24739954287740860	21949554	-3475062
10^{19}	234057667276344607	99877774	23937697
10^{20}	2220819602560918840	222744643	-4783163
10^{21}	21127269486018731928	597394253	-86210244
10^{22}	201467286689315906290	1932355207	-126677992

TABLE 6. Nombre de nombres premiers jusqu'à différentes valeurs de x , et prédictions de Gauss et Riemann.

La prédiction de Riemann ne semble pas mieux s'en sortir que celle de Gauss, ou du moins elle ne s'en sort pas beaucoup mieux. Pourtant, le fait que l'erreur de la prédiction de Riemann prenne des valeurs à la fois positives et négatives suggère qu'elle pourrait être le mieux qui puisse être fait.

8.2. Relier la théorie des nombres et l'analyse complexe. Riemann a montré que le nombre de nombres premiers jusqu'à x peut être obtenu en fonction des zéros complexes de la fonction

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

étudiée par Euler, qu'on appelle maintenant la *fonction zeta de Riemann*. Dans cette définition s est un nombre complexe, qu'on écrit $s = \sigma + it$ quand on veut faire référence à ses parties réelle et imaginaire σ et t séparément. Si s était un nombre réel, on saurait depuis les cours de calcul des premières années que la série dans la définition de $\zeta(s)$ converge si et seulement si $s > 1$; c'est-à-dire qu'on peut sommer une série infinie et obtenir comme résultat une valeur unique finie. De façon similaire, on peut montrer que la série converge seulement pour les nombres complexes tels que $\sigma > 1$. Mais qu'en est-il lorsque $\sigma \leq 1$? Comment contournons-nous le fait que la série ne peut se sommer (c'est-à-dire ne converge pas) ? Comme on l'a montré en section 7.7, on peut "prolonger analytiquement" $\zeta(s)$ de telle façon qu'elle soit bien définie dans la totalité du plan complexe. Plus que ça, $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est analytique, de telle façon que ζ est méromorphe, analytique en effet partout ailleurs qu'en son unique pôle en $s = 1$, qui est un pôle simple de résidu 1.

Riemann a montré que confirmer la conjecture de Gauss concernant le nombre de nombres premiers jusqu'à x est *équivalent* à obtenir une bonne compréhension des zéros de la fonction $\zeta(s)$, donc on va maintenant commencer à esquisser les étapes clés de l'argument qui lie ces sujets qui sembleraient non reliés. Le point de départ est de prendre la dérivée du logarithme de l'identité d'Euler (2.2.1)

$$(8.2.1) \quad \zeta(s) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ un entier positif}}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

pour obtenir

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \text{ premier}} \frac{\log p}{p^s - 1} = \sum_{p \text{ premier}} \sum_{m \geq 1} \frac{\log p}{p^{ms}}.$$

La formule de Perron (7.6.2) permet de décrire une "fonction en escalier" en fonction d'une fonction continue de telle façon que si x n'est pas une puissance de nombre premier alors on obtient

$$(8.2.2) \quad \begin{aligned} \Psi(x) &:= \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p \text{ premier} \\ m \geq 1}} \log p = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p \text{ premier}} \log p \int_{s: \Re(s)=c} \left(\frac{x}{p^m}\right)^s \frac{ds}{s} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{s: \Re(s)=c} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds. \end{aligned}$$

Ici on peut justifier d'échanger l'ordre de la somme et de l'intégrale si c est suffisamment grand puisqu'alors, tout converge absolument. Notons qu'on ne compte pas le nombre de nombres premiers jusqu'à x mais plutôt la version "pondérée", $\Psi(x)$.

L'étape suivante est peut-être la plus difficile. L'idée est de remplacer la droite $\Re(s) = c$ le long de laquelle l'intégrale a été prise par une droite loin à gauche, sur laquelle on peut montrer que l'intégrale est petite, en fait plus petite plus on va vers la gauche. La différence entre les valeurs le long de ces deux intégrales est donnée par une somme de résidus, comme décrit dans les sections 7.5 et 7.6. Maintenant pour toute fonction méromorphe f , les pôles de $f'(s)/f(s)$ sont donnés par les zéros et les pôles de f , tous d'ordre 1, et le résidu est simplement l'ordre de ce zéro, ou moins l'ordre de ce pôle. De cette façon, on peut obtenir la *formule explicite*

$$(8.2.3) \quad \Psi(x) = \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ m \geq 1 \\ p^m \leq x}} \log p = x - \sum_{\rho : \zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},$$

où, si ρ est un zéro de $\zeta(s)$ d'ordre k , alors il y a k termes pour ρ dans la somme. On peut se demander comment on ajoute la (potentiellement) infinie somme sur les zéros ρ de $\zeta(s)$? Simple, il suffit de les ajouter par ordre de valeurs de $|\rho|$ croissantes et cela marchera. Il est difficile de croire qu'une telle formule, fonction des zéros d'une fonction compliquée, peut fournir une expression exacte du nombre de nombres premiers jusqu'à x . On peut voir pourquoi le travail de Riemann a étiré l'imagination des gens et a eu un impact incroyable.

8.3. L'équation fonctionnelle. On a vu en section 7.7 comment prolonger analytiquement $\zeta(s)$ à tous les s pour lesquels $\Re(s) > 0$. Riemann a fait une incroyable observation qui nous permet de déterminer facilement les valeurs de $\zeta(s)$ du côté gauche du plan complexe (où la fonction n'est pas définie naturellement) en fonction du côté droit. L'idée est de multiplier $\zeta(s)$ par une fonction simple de telle façon que ce nouveau produit $\xi(s)$ satisfasse l'*équation fonctionnelle*

$$(8.3.1) \quad \xi(s) = \xi(1-s) \quad \text{pour tous les nombres complexes } s.$$

Riemann a déterminé que l'on peut faire cela en prenant $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$. Ici, $\Gamma(s)$ est une fonction qui est égale à la fonction factorielle pour les entiers positifs (c'est-à-dire que $\Gamma(n) = (n-1)!$) ; et elle est bien définie et continue pour tous les autres s .

8.4. Les zéros de la fonction zeta de Riemann. Une analyse du côté droit de (8.2.1) révèle qu'il n'y a pas de zéros de $\zeta(s)$ avec $\Re(s) > 1$. Donc, en utilisant (8.3.1) et (7.9.4), on en déduit que les seuls zéros de $\zeta(s)$ avec $\Re(s) < 0$ sont les entiers négatifs pairs $-2, -4, \dots$, ceux qu'on appelle les *zéros triviaux*. Par conséquent, pour pouvoir utiliser (8.2.3), on doit déterminer les zéros de $\zeta(s)$ à l'intérieur de la bande critique $0 \leq \Re(s) \leq 1$. Après quelques calculs, Riemann a fait encore une autre observation extraordinaire qui, si elle était vraie, nous permettrait une compréhension perspicace formidable de virtuellement tous les aspects de la distribution des nombres premiers :³

L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN : Si $\zeta(s) = 0$ avec $0 \leq \Re(s) \leq 1$ alors $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Des personnes intelligentes ont calculé littéralement des billions de zéros de $\zeta(s)$ ⁴, et tout zéro unique dans la bande critique qui a été calculé a effectivement une partie réelle de $1/2$. Par ex-

³Aucune référence à ces calculs de Riemann n'est apparue dans la littérature jusqu'à ce que Siegel les découvre dans les notes personnelles, non publiées de Riemann longtemps après sa mort.

⁴Au moins les dix billions de zéros de hauteurs les plus petites ; c'est-à-dire avec $|\Im(s)|$ les plus petites.

emple, les zéros non triviaux les plus proches de l'axe réel sont $s = 1/2 + \gamma_1$ et $s = 1/2 - i\gamma_1$, où $\gamma_1 \approx 14.1347\dots$. Notons que si l'hypothèse de Riemann était vraie, alors on pourrait écrire tous les zéros non triviaux sous la forme $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ (avec leur conjugué $\frac{1}{2} - i\gamma$, puisque $\zeta(1/2 + i\gamma) = 0$ si et seulement si $\zeta(1/2) - i\gamma = 0$), où γ est un nombre positif réel. On croit que les nombres positifs qui apparaissent dans les zéros non triviaux semblent plus ou moins aléatoires, au sens où aucun d'entre eux n'est relié aux autres par de simples équations linéaires à coefficients entiers (ou même par des équations polynomiales plus complexes avec des nombres algébriques comme coefficients). Pourtant, rien selon ces directions n'a jamais pu être prouvé, en effet tout ce qu'on sait faire c'est d'approximer ces zéros non triviaux numériquement jusqu'à une certaine précision.

On va démontrer qu'il y a une infinité de zéros $\beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$ dans la bande critique, en effet environ $\frac{T}{2\pi} \log(\frac{T}{2e})$ avec $0 \leq \gamma \leq T$. Il n'est pas difficile de trouver tous les zéros jusqu'à une certaine hauteur T . On peut montrer que l'hypothèse de Riemann est vérifiée par au moins quarante pour cent de tous les zéros, et cela s'accorde joliment avec de nombreuses autres assertions heuristiques à propos de la distribution des nombres premiers et d'autres séquences de nombres, mais cela reste encore une hypothèse non démontrée, peut-être la plus célèbre et tentante de toutes les mathématiques.

8.5. Compter les nombres premiers. Au premier regard, il semble sensé d'utiliser une sommation partielle sur (8.2.3) pour obtenir une expression exacte pour $\pi(x)$, telle que

$$\pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots = \text{Li}(x) - \sum_{\rho : \zeta(\rho)=0} \text{Li}(x^\rho) + \text{Petit}(x) - \log 2,$$

où $\text{Petit}(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{(t^3-t) \log t}$.⁵ Pourtant, celle-ci est beaucoup plus compliquée que (8.2.3), donc il sera plus facile de faire la sommation partielle à la fin des calculs plutôt qu'au début.

Puisque $\zeta(s)$ a une infinité de zéros dans la bande critique, (8.2.3) est une formule difficile à utiliser en pratique. En effet, on ne devrait pas s'attendre à utiliser une infinité d'ondes sinusoïdales à partir de la formule (7.2.1) pour approximer $\{x\} - \frac{1}{2}$ en pratique, mais à la place on pourrait utiliser un nombre fini d'ondes sinusoïdales, comme dans notre discussion là, vraisemblablement ceux avec les amplitudes les plus grandes. De façon similaire, on modifie (8.2.3) pour seulement inclure un nombre fini de zéros, en particulier ceux jusqu'à une certaine hauteur, T , qui sont dans la boîte

$$\mathcal{B}(T) = \{\rho : \zeta(\rho) = 0, 0 \leq \Re(\rho) \leq 1, -T \leq \Im(\rho) \leq T\}.$$

Ceci pourtant est une approximation, non une formule exacte, et cela vient au prix d'un terme d'erreur, qui dépend de la hauteur T : pour $1 \leq T \leq x$ on a⁶

$$(8.5.1) \quad \Psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho : \zeta(\rho)=0 \\ 0 < \Re(\rho) < 1 \\ |\Im(\rho)| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log x \log T}{T}\right).$$

Notre but est de montrer que $\Psi(x) \sim x$, donc on sélectionne $T \geq (\log x)^2$, et par conséquent, on a seulement besoin de borner la somme sur les zéros de $\zeta(s)$. Chaque terme dans cette somme est

⁵Cette expression apparaît dans l'article de Riemann. L'expression plus simple (8.2.3) est due von Mangoldt.

⁶Les zéros triviaux sont $-2, -4, -6, \dots$ et ainsi contribuent pour $\sum_{m \leq 1} 1/(2mx^{2m}) = -\frac{1}{2} \log(1 - \frac{1}{x^2})$ au total dans (8.2.3), qui est en $O(1)$ pour $x \geq 1$.

un nombre complexe et consiste donc en une grandeur et une direction et on peut deviner qu'il y a beaucoup d'annulations parmi ces termes, résultant des différentes directions pointées. Pourtant on est incapable de démontrer quoi que ce soit dans cette direction-là, ce qui désappointe plutôt, on borne simplement chaque terme en valeur absolue :

$$\left| \sum_{\rho \in \mathcal{B}(T)} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \sum_{\rho \in \mathcal{B}(T)} \left| \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \max_{\rho \in \mathcal{B}(T)} x^{\Re(\rho)} \sum_{\rho \in \mathcal{B}(T)} \frac{1}{|\rho|} \ll x^{\beta(T)} (\log T)^2,$$

en utilisant le fait qu'il y a environ $\frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2e}\right)$ zéros dans $\mathcal{B}(T)$ pour tout T , où $\beta(T)$ est la plus grande partie réelle d'un zéro quelconque dans $\mathcal{B}(T)$.

L'étape finale pour prouver le théorème des nombres premiers est alors de produire des *régions sans zéros* pour $\zeta(s)$: c'est-à-dire des régions du plan complexe, proches de la droite $\Re(s) = 1$, sans zéros de $\zeta(s)$. Par exemple, dans la section 9.6, on montre qu'on peut prendre $\beta(T) = 1 - c/\log T$ pour une certaine constante $c > 0$. Par conséquent, en choisissant T de telle façon que $\log T = (\log x)^{1/2}$ on déduit que

$$\Psi(x) = x + O\left(x/e^{c'(\log x)^{1/2}}\right)$$

pour une certaine constante $c' > 0$, ce qui implique le théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O\left(x/e^{c'(\log x)^{1/2}}\right).$$

On peut voir que n'importe quelle amélioration dans la région sans zéros pour $\zeta(s)$ apportera immédiatement des améliorations dans le terme d'erreur du théorème des nombres premiers. Par exemple, si l'hypothèse de Riemann est vraie, de telle façon que $\beta(T) = \frac{1}{2}$ pour tout T , alors en prenant $T = \sqrt{x}$ dans (8.5.1), on obtient que $\Psi(x) = x + O(x^{1/2}(\log x)^2)$,⁷ et donc

$$(8.5.2) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(\sqrt{x} \log x)$$

On montrera que ceci n'est pas seulement impliqué par l'hypothèse de Riemann, mais également que cela implique l'hypothèse de Riemann. Avec davantage de soin, on peut démontrer que la borne plus précise

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq \sqrt{x} \log x \quad \text{pour tout } x \geq 3, \text{ est équivalente à l'hypothèse de Riemann.}$$

8.6. La formule révolutionnaire de Riemann. La formule de Riemann (8.2.3) est un peu difficile à apprécier au premier regard. Si on suppose que l'hypothèse de Riemann est vraie, alors tout zéro non trivial peut être écrit comme $\frac{1}{2} + i\gamma$ et par conséquent contribue à hauteur de $x^{1/2+i\gamma}/(\frac{1}{2} + i\gamma)$. Maintenant au fur et à mesure qu'on change de zéro de $\zeta(s)$ la valeur de γ augmente et $\frac{1}{2} + i\gamma$ sera dominé par la valeur de $i\gamma$. Donc $x^{1/2+i\gamma}/(\frac{1}{2} + i\gamma)$ est à peu près $x^{1/2+i\gamma}/(i\gamma)$. En ajoutant cela au terme pour $\frac{1}{2} - i\gamma$, on obtient, à peu près, $x^{1/2+i\gamma}/(i\gamma) - x^{1/2-i\gamma}/(i\gamma) = 2x^{1/2} \sin(\gamma \log x)/\gamma$. En combinant cette information, (8.2.3) devient

$$\Psi(x) \text{ est à peu près } x - 2x^{1/2} \sum_{\gamma > 0 : \zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = 0} \frac{\sin(\gamma \log x)}{\gamma} + O(1).$$

⁷ce qui est une forme faible de (8.1.1) puisque $\Psi(x) = \log(\text{ppcm}[1, 2, \dots, x])$.

On veut convertir cela en information à propos du nombre de nombres premiers jusqu'à x . Si on procède par sommation partielle alors $\Psi(x)$ devrait être remplacé par $\pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \dots$, comme dans la section 8.1, et $x^{1/2}$ par $x^{1/2}/\log x$. Par conséquent, après quelques ré-arrangements,

$$(8.6.1) \quad \frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t} - \#\{\text{nombre premiers} \leq x\}}{\sqrt{x}/\ln x} \approx 1 + 2 \sum_{\substack{\text{tous les nombres réels } \gamma > 0 \\ \text{tels que } \frac{1}{2} + i\gamma \\ \text{est un zéro de } \zeta(s)}} \frac{\sin(\gamma \log x)}{\gamma}.$$

Le numérateur du côté gauche de cette formule est le terme excédentaire quand on compare à la prédiction de Gauss $\text{Li}(x)$ avec le nombre effectif $\pi(x)$ de nombres premiers jusqu'à x . Le dénominateur, étant à peu près de taille \sqrt{x} , correspond à la grandeur de l'excès comme on l'a observé précédemment dans nos données. Le côté droit de la formule a beaucoup en commun avec notre formule pour $\{x\} - 1/2$. C'est la somme de fonctions sinus, avec les nombres γ employés de deux façons différentes à la place de $2\pi n$: chaque γ est utilisé à l'intérieur du sinus (comme la "fréquence"), et l'inverse de chacun forme le coefficient du sinus (comme l'"amplitude"). On obtient même le même facteur de 2 dans chaque formule. Pourtant, les nombres γ ici sont beaucoup plus subtils que les nombres évidents $2\pi n$ dans la formule correspondante pour $x - 1/2$. Cette formule peut peut-être être paraphrasée par

Les nombres premiers peuvent être comptés comme une somme d'ondes.

On devrait noter que cette formule est valide si et seulement si l'hypothèse de Riemann est vraie et on croit donc grandement qu'elle est correcte. Il y a une formule similaire si l'hypothèse de Riemann est fausse, mais elle est plutôt compliquée et techniquement beaucoup moins agréable. La principale difficulté provient des coefficients, $1/\gamma$, qui sont remplacés par des fonctions de x . Donc on souhaiterait que l'hypothèse de Riemann soit vraie car elle amène à la formule plus simple (8.6.1), et que cette formule est un délice. En effet, cette formule est assez similaire aux formules pour les ondes sonores et certains experts, pour affirmer cette formule (8.6.1), disent que "*les nombres premiers ont la musique en eux.*"