Une reformulation de la conjecture de Goldbach

Larry J. Gerstein

La conjecture de Goldbach, datant de la correspondance entre Goldbach et Euler en 1742, est que : *Tout entier pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers (non nécessairement distincts).* Il a été vérifié que les entiers pairs jusqu'à 10^8 vérifient la propriété énoncée, mais la conjecture de Goldbach reste non démontrée.

Le principal objectif de cette note est de réénoncer la conjecture de Goldbach sous une forme quelque peu différente. Alors qu'il est facile de vérifier que la version qui va être donnée ici est équivalente à la formulation originale, cette formulation ne semble pas avoir été énoncée explicitement dans la littérature. Bien sûr, la "littérature" sur la conjecture de Goldbach est vaste et elle inclut presque tous les livres de "théorie élémentaire des nombres" dans son titre, ainsi que la multitude d'articles de recherche. Pour faciliter la lecture, voici quelques endroits où trouver des références et une information de base. Dickson [1, pp. 421-425] liste les résultats obtenus pendant la première décade de ce siècle. Wang [4] est une liste des articles les plus importants de ce siècle à propos de la conjecture de Goldbach depuis les années 1980. Shanks [3] est un livre merveilleux sur les conjectures en théorie des nombres, la conjecture de Goldbach en faisant partie, et sur les conjectures mathématiques en général. Ribenboim [2] est un autre coffre aux trésors en théorie des nombres, avec une section consacrée à Goldbach (pp. 229-235). Comme conséquence de la reformulation qui sera donnée ici, on verra une forte connexion entre la conjecture de Goldbach et la conjecture des nombres premiers jumeaux, qui est : *Il y a une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est également un nombre premier* (voir [2], pp. 199-204, pour quelques éléments historiques et un état de l'art à propos de la conjecture des nombres premiers jumeaux). Cette connexion n'est certainement pas très bien connue, et peut être confirmée par l'expérimenttion suivante : attraper quelques livres de théorie des nombres élémentaire, localiser les inévitables énoncés de la conjecture de Goldbach et de la conjecture des nombres premiers jumeaux, et regarder si un lien est établi. Je parie que les seuls liens que vous trouverez sont que dans les deux problèmes, les nombres premiers interviennent, et les deux problèmes sont décrits comme étant célèbres, anciens, difficiles et ouverts.

Supposons que la conjecture de Goldbach soit vraie. Alors pour tout entier $n \geq 2$, il y a des nombres premiers p et q, avec $p \leq q$, disons, tels que $2n = p+q$. Par conséquent $p = n-k$ et $q = n+k$ pour un certain entier k satisfaisant $0 \leq k \leq n-2$. Donc $n^2 - k^2 = pq$. Inversement, supposons que pour tout entier $n \geq 2$, il existe k satisfaisant $0 \leq k \leq n-2$ et des nombres premiers p et q, avec $p \leq q$, tels que $n^2 - k^2 = pq$. Alors $p = n-k$ et $q = n+k$, par le théorème fondamental de l'arithmétique, et par conséquent $2n = p+q$. On a ainsi montré que la conjecture de Goldbach est équivalente à l'énoncé suivant :

$(*)$ Pour tout entier $n \geq 2$ il existe des entiers $k, p,$ et $q,$ avec $0 \leq k \leq n-2$ et avec p et q premier, tel que $n^2 - k^2 = pq.$

Université de Californie
Santa Barbara, CA 93106

Article publié dans Mathematics magazine, Vol.66, n° 1, p. 44, février 1993.
Transcription, traduction, Denise Vella-Chemla, janvier 2023.

Cette reformulation de la conjecture de Goldbach nous amène à considérer la forme quadratique $x^2 - y^2$, et ici on peut faire quelques observations élémentaires. Pour p et q des nombres premiers impairs donnés, avec $p \leq q$, un argument arithmétique évident montre qu'il y a juste deux solutions non négatives à l'équation $x^2 - y^2 = pq$; notamment,

$$(x, y) = ((p+q)/2, (q-p)/2) \quad \text{et} \quad (x, y) = ((pq+1)/2, (pq-1)/2).$$

D'un autre côté, il y a un nombre infini de solutions *rationnelles*. En fait, si $\beta \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}^*$ on a

$$\beta = ((\lambda^2 + \beta)/2\lambda)^2 - ((\lambda^2 - \beta)/2\lambda)^2.$$

Pour la conjecture de Goldbach, on a besoin de travailler dans la direction opposée ; c'est-à-dire, on considère les valeurs de $x^2 - y^2$ quand $x = n$ est fixé et qu'y varie dans $\mathbb{Z}$, et on regarde les nombres premiers appropriés p et q.

Que (*) soit vraie ou pas, il est intrigant de se demander combien de fois $k = 1$ peut être utilisée dans (*) et d'énoncer la conjecture suivante :

(**) Il y a une infinité d'entiers $n \geq 2$ pour lesquels il existe des nombres premiers p and q tels que $n^2 - 1 = pq$.

L'énoncé (**) est clairement équivalent à la conjecture des nombres premiers jumeaux. Par conséquent, bien que les conjectures de Goldbach et des nombres premiers jumeaux ne soient pas identiques, elles sont de manière évidente les facettes du même joyau.

Références

1. Leonard E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. 1, Chelsea Publishing Co., New York, 1971.

2. Paulo Ribenboim, *The Book of Prime Number Records*, 2nd edition, Springer-Verlag Inc., New York, 1989.

3. Daniel Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd edition, Chelsea Publishing Co., New York, 1985.

4. Wang Yuan (Editor), *Goldbach Conjecture*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.