Transcription de l'extrait du *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, de Adrien-Marie Legendre, contenant le théorème dont Galois a donné un énoncé différent dans sa lettre à Auguste Chevalier

CHAPITRE XII.

Théorème sur les fonctions complètes de première et de seconde espèce, dont les modules sont compléments l'un de l'autre.

45. Dans les comparaisons qu'on vient d'établir entre les fonctions $F^1(c)$, $E^1(c)$, qui se rapportent au module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \sin 15^{\mathrm{o}}$, et les fonctions $F^1(b), E^1(b)$, qui se rapportent au module complémentaire $b = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \cos\ 15^{\mathrm{o}}$, les trois équations trouvées conduisent à ce résultat remarquable

$$(d') \qquad \frac{\pi}{2} = F^1(c)E^1(b) + F^1(b)E^1(c) - F^1(b)F^1(c)$$

où l'on voit que les deux quantités b, c peuvent être échangées entre elles, et qu'ainsi cette équation est vérifiée dans deux cas, celui de $c = \sin 15^{\mathrm{o}}$ et celui de $c = \sin 75^{\mathrm{o}}$. Il serait facile de démontrer directement qu'elle est encore vraie dans deux autres cas, lorsque c est infiniment petit, et lorsque $c = \sqrt{\frac{1}{2}} = b$ mais nous allons prouver généralement qu'elle a lieu quel que soit c.

Pour abréger la notation, désignons simplement par F, E, les quantités $F^1(c), E^1(c)$ et par F', E' les quantités $F^1(b), E^1(b)$ et supposons

$$P = FE' + F'E - FF',$$

P étant une fonction de c encore inconnue.

Je différencie les deux membres par rapport à c qui est la seule variable qu'ils contiennent. Or ayant $E(\varphi) = \int \Delta d\varphi,\ F(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta},\ \Delta^2 = 1 - c^2\sin^2\varphi$, la différentiation donne

$$\frac{dE}{dc} = -\int \frac{cd\varphi \sin^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c}(E-F),$$

$$\frac{dF}{dc} = \int \frac{cd\varphi \sin^2\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{c}\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{1}{c}\int \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Tome 1, 1825, Imprimerie de Huzard-Courcier.
Transcription en Latex : Denise Vella-Chemla, avril 2024.

Mais par les formules de l'art. 9, on a $\displaystyle\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2}\int \Delta d\varphi - \frac{c^2 \sin\varphi \ \cos\varphi}{b^2\Delta}$ et dans le cas de $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ dont il s'agit, le second terme s'évanouit : ainsi on aura

$$\frac{dF}{dc} = \frac{1}{b^2 c}(E - b^2 F).$$

On aura semblablement $\dfrac{dE'}{db} = \dfrac{1}{b}(E' - F')$, $\dfrac{dF'}{db} = \dfrac{1}{c^2 b}(E' - c^2 F')$ et parce que $bdb + cdc = 0$, on en déduira

$$\frac{dE'}{dc} = -\frac{c}{b^2}(E' - F'),$$

$$\frac{dF'}{dc} = -\frac{1}{b^2 c}(E' - c^2 F').$$

Substituant ces valeurs dans celle de dP, on aura $dP = 0$; donc $P = \text{const}$. Mais on a trouvé dans un cas particulier $P = \dfrac{1}{2}\pi$ donc l'équation (d') a lieu généralement, quel que soit c.

Lorsque $c = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = b$, l'équation (d') donne

$$\frac{\pi}{2} = F^1(2E^1 - F^1).$$

Ainsi dans ce cas particulier, E^1 se détermine encore par F^1.

Il peut y avoir quelques autres cas particuliers où la fonction de seconde espèce $E^1(c)$ s'exprime par la fonction de première espèce $F^2(c)$ [1] ; nous ferons voir en effet que chaque cas particulier connu en fait connaître une infinité d'autres; mais il paraît impossible de réduire généralement les fonctions de seconde espèce à celles de la première.

[1] bizarre, on penserait que ^{1} signifie première espèce et ^{2} signifie seconde espèce.