Un accent sépare reprouver de réprouver (Denise Vella-Chemla, fin mai 2023)

Ci-dessous la traduction de différentes notes, afférentes à la preuve topologique de Furstenberg de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers.

Sur l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers
Harry Furstenberg, Université Yeshiva

Dans cette note, nous souhaiterions proposer une preuve "topologique" élémentaire de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. On introduit une topologie dans l'espace des entiers S, en utilisant les progressions arithmétiques (de $-\infty$ à $+\infty$) comme base. Il n'est pas difficile de vérifier que cela en fait effectivement un espace topologique. En fait, dans cette topologie, on peut montrer que S est normal et même mesurable. Chaque progression arithmétique est aussi bien fermée qu'ouverte, puisque son complémentaire est l'union des autres progressions arithmétiques (de même raison). Il en résulte que n'importe quel nombre fini de progressions arithmétiques est fermé. Considérons l'ensemble $A = \bigcup A_p$, où A_p contient tous les multiples de p et où p couvre l'ensemble des nombres premiers ≥ 2. Les seuls nombres n'appartenant pas à A sont -1 et 1 et puisque l'ensemble $\{-1, 1\}$ n'est clairement pas un ensemble ouvert, A ne peut pas être fermé. Par conséquent A n'est pas une union finie d'ensembles fermés, ce qui prouve qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Une preuve topologique du théorème d'Euclide[1]

Publié le 11 mai 2023

Théorème d'Euclide : Il y a une infinité de nombres premiers.

La preuve d'Euclide de ce résultat est classique. Elle est souvent décrite comme étant une preuve par contradiction mais, en fait, Euclide nous montre comment, étant donnée une liste de nombres premiers jusqu'à un certain nombre, l'on peut construire, à l'aide d'un processus fini, un nouveau nombre premier ; ainsi, la preuve est constructive.

Dans un récent article du magazine Quanta, Anna Kramer (2023) s'est intéressée à la raison qui pousse les mathématiciens à chercher de nouvelles preuves de résultats anciens dont on connaît la véracité. Un exemple qu'elle considère est le théorème d'Euclide sur l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Des centaines de démonstrations de ce théorème ont été trouvées, la plus remarquable d'entre elles étant la preuve de 1955 de Hillel Furstenberg, qui utilise une topologie d'ensembles de points.

Contrairement à la preuve classique d'Euclide, la preuve de Furstenberg est une preuve par contradiction. Cette démonstration a été publiée en 1955, alors que Furstenberg étant encore un étudiant de premier cycle à l'Université Yeshiva de New York.

[1]Traduction d'un article du blog "That's maths", ici https://thatsmaths.com/2023/05/11/a-topological-proof-of-euclids-theorem/

La démonstration de Furstenberg

Furstenberg définit une topologie $\mathcal{O}$ sur les entiers $\mathbb{Z}$, la topologie des entiers régulièrement espacés, en utilisant comme base les séquences arithmétiques (doublement infinies)

$$S(a,b) = \{an+b | n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z} + b.$$

Un sous-ensemble $U \subseteq \mathbb{Z}$ est ouvert si et seulement s'il est l'union de séquences arithmétiques $S(a,b)$ pour $a \neq 0$, ou si c'est l'ensemble vide. Il est clair que U est ouvert si et seulement si, pour tout $x \in U$, il existe un certain entier non nul a tel que $S(a,x) \subseteq U$.

On démontre facilement que $\mathcal{O}$ vérifie les axiomes d'une topologie :

- par définition, $\varnothing$ est ouvert. $\mathbb{Z}$ est égal à la séquence $S(1,0)$, et est donc ouvert ;
- toute union d'ensembles ouverts est ouverte : pour toute collection d'ensembles ouverts U_i, et x dans leur union U, quels que soient les nombres a_i pour lesquels $S(a_i,x) \subseteq U_i$, on a également $S(a_i,x) \subseteq U$;
- l'intersection de deux ensembles ouverts est ouverte : soient U_1 et U_2 des ensembles ouverts et $x \in U_1 \cap U_2$, avec les nombres a_1 et a_2 tels que $x \in S(a_1,x) \cap S(a_2,x)$. Soit a le plus petit commun multiple de a_1 et a_2. Alors $S(a,x) \subseteq S(a_i,x) \subseteq U_i$.

Deux propriétés-clés de la topologie $\mathcal{O}$ sont utilisées dans la démonstration :

1. Tout ensemble ouvert non vide contient une suite infinie ; par conséquent, aucun ensemble fini non vide n'est ouvert. Donc le complémentaire de n'importe quel ensemble vérifiant cela ne peut pas être fermé.
2. Les ensembles de base $S(a,b)$ sont à la fois ouverts et fermés. Ils sont ouverts par définition et on peut écrire
$$S(a,b) = \mathbb{Z} \backslash \bigcup_{n=1}^{a-1} S(a,b+n)$$
de telle façon que $S(a,b)$ est le complémentaire d'un ensemble ouvert.

Maintenant, Furstenberg observe que les seuls entiers qui ne sont pas multiples entiers de nombres premiers sont $+1$ et -1. Par conséquent,

$$\bigcup_{p \text{ premier}} S(p,0) = \mathbb{Z} \backslash \{-1,+1\}. \tag{1}$$

Maintenant, la première propriété ci-dessus - que le complémentaire d'un ensemble fini non vide ne peut être fermé - implique que l'ensemble $\mathbb{Z}\backslash\{-1,+1\}$ ne peut pas être fermé. Par la seconde propriété, les ensembles $S(p,0)$ sont fermés. Mais, s'il y avait seulement un nombre fini de tels nombres premiers, l'union finie $\bigcup_p S(p,0)$ des ensembles fermés serait aussi fermée. Donc (1) impliquerait l'égalité entre un ensemble fermé (sur la gauche) et un ensemble non fermé (sur la droite).

Cette contradiction nous oblige à aboutir à la conclusion qu'**il y a une infinité de nombres premiers.**

L'argument ci-dessus est essentiellement celui qui a été présenté par Furstenberg, et est similaire à la preuve donnée dans l'article de Wikipedia "la preuve de Furstenberg de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers."

Discussion

Mercer (2009) a donné une variation de la preuve de Furstenberg qui évite le langage topologique. Cela montre que les techniques essentielles utilisées dans la preuve sont arithmétiques, et ne nécessitent pas d'idées topologiques avancées. Pourtant, la preuve de Mercer n'a pas le côté direct de la preuve de Furstenberg (bien que ceci soit grandement une affaire de goût).

Furstenberg était encore au lycée quand sa preuve a été publiée. Elle n'a que douze lignes et est d'une grande élégance selon les mathématiciens. Bien sûr, on doit reconnaître que la preuve originale d'Euclide était également remarquable par son élégance, et était constructive, alors que la preuve topologique de Furstenberg est une preuve par contradiction.

Furstenberg a eu une carrière brillante, et il a apporté sa contribution à plusieurs disciplines. En 1955, il a reçu son diplôme du Lycée Yeshiva après avoir reçu une licence et une maîtrise. Il avait déjà publié un certain nombre d'articles avec sa *Note sur un type de forme indéterminée* (1953) et *Sur l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers* (1955) apparues ensemble dans le mensuel American Mathematical Monthly.

Furstenberg a étudié à l'Université de Princeton pour sa thèse, supervisée par Salomon Bochner, et a reçu son doctorat en 1958. Cette thèse a été publiée en 1960 sous le titre *Processus stationnaires et théorie de la prédiction.* Furstenberg a travaillé à l'Institut de technologie du Massachusetts (MIT), et au département de mathématiques de l'Université du Minnesota, où il faisait partie du groupe travaillant en théorie des probabilités. En 1965, il fut recruté comme Professeur de mathématiques à l'Université hébraïque de Jérusalem. Furstenberg resta à l'Université hébraïque jusqu'à l'année de sa retraite en 2003.

Furstenberg reçut de nombreuses récompenses pour son travail mathématique : le prix Israël, une récompense de l'état d'Israël qui est la plus haute récompense reçue dans ce pays, en 1993 et, la même année, le prix Harvey, remis annuellement par Technion à Haifa, "pour ses travaux révolutionnaires en théorie ergodique et probabilités, groupes de Lie et dynamique topologique". En 2007, il a reçu le prix Wolf "pour ses profondes contributions à la théorie ergodique, aux probabilités, à la dynamique topologique, à l'analyse des espaces symétriques et des flots homogènes".

Références

1. Furstenberg, Harry Furstenberg, 1955, On the Infinitude of Primes. *Amer. Math. Monthly*, **62** (5), pg. 353 (1 page).
2. Golomb, Solomon W., 1959, A Connected Topology for the Integers *Amer. Math. Monthly*, 66 (8), pp. 663-665.

3. Anna Kramer, 2023, Why Mathematicians Re-Prove What They Already Know. Quanta Magazine.
4. Mercer, Idris D., 2009, On Furstenberg's Proof of the Infinitude of Primes. *Amer. Math. Monthly*, 116 (4), pp. 355-356.
5. Biographie MacTutor d'Hillel Furstenberg.
6. article Wikipedia : *Furstenberg's proof of the infinitude of primes.*

Traduction de l'article de Golomb en référence ci-dessus.

Une topologie connexe pour les nombres entiers

Solomon W. Golomb
Laboratoire de propulsion à réaction - Institut de technologie de Californie

On obtient une topologie D pour les entiers positifs quand les progressions arithmétiques $(an + b)$ avec $(a, b) = 1$ sont prises comme bases pour les ensembles ouverts. Elles forment une base parce que l'intersection de deux telles progressions est du même type, ou vide, comme on le vérifie aisément. Notons que tout ensemble ouvert non vide, étant l'union de progressions arithmétiques, doit être infini. Cette topologie fournit une preuve intéressante du

Théorème 1. Le nombre de nombres premiers est infini.

Preuve. Si p est un nombre premier, la progression $\{np\}$ est fermée, puisque son complémentaire est $\{np + 1\} \cup \{np + 2\} \cup ... \cup \{np + (p - 1)\}$, une union d'ensembles ouverts. Considérons l'union $X = \bigcup_p \{np\}$ étendue sur tous les nombres premiers. Si c'est une union finie d'ensembles fermés, alors X est fermée. Mais le complémentaire de X est $\{1\}$, qui n'est ni vide ni infini. Puisque le complémentaire de X n'est pas ouvert, X ne peut pas être fermé, l'union n'est pas une union finie, et le nombre de nombres premiers est infini.

(Une preuve similaire, dans une topologie plus forte et non connexe, a été donnée par Furstenberg [2].)

Théorème 2. La topologie D est de Hausdorff.

Preuve. Étant donnés deux entiers positifs distincts s et t, choisir un nombre premier p (par le théorème 1) qui est supérieur à $\max(s, t)$. Alors $\{pn + s\}$ et $\{pn + t\}$ sont des ensembles ouverts disjoints qui séparent s et t.

Théorème 3. La topologie D est connexe.

Preuve. Supposons que les entiers puissent être représentés comme l'union de deux ensembles disjoints non vides O_1 et O_2. Soit $\{a_1 n + b_1\}$ un ensemble base dans O_1, et soit $\{a_2 n + b_2\}$ un ensemble base dans O_2. Soit α un multiple de a_1. Si α était dans O_2, on aurait $\alpha = An_0 + B$, où $\{An + B\} \subset O_2$. Puisque $(A, B) = 1$, on devrait avoir $(\alpha, A) = 1$, et par conséquent $(a_1, A) = 1$. Mais alors $\{a_1 n + b_1\}$ et $\{An + B\}$ devraient s'intersecter infiniment souvent, ce qui contredirait la disjonction de O_1 et O_2. Donc tous les multiples de a_1 doivent appartenir à O_1. Similairement, les multiples de a_2 doivent appartenir à O_2. Mais alors les multiples communs de a_1 et a_2 doivent appartenir à la fois à O_1 et O_2, ce qui contredit la disjonction.

L'auteur a récemment appris qu'une preuve de la connexité de la topologie D, sans référence à la théorie des nombres a été présentée par Morton Brown au meeting d'avril 1953 de l'American Mathematical Society à New York [1].

Théorème 4. La topologie D n'est pas régulière.

Preuve. Supposons que des recouvrements ouverts sont donnés pour l'ensemble fermé $\{2n\}$ et pour l'ensemble qui lui est extérieur $\{1\}$. Tout recouvrement ouvert de $\{1\}$ n'intersectant pas $\{2n\}$ doit inclure une progression $\{en + 1\}$, où e est un nombre pair. C'est à dire, $e \in \{2n\}$. Soit $\{an + b\}$ l'élément du recouvrement ouvert $\{2n\}$ qui contient e, de telle façon que $e = an_0 + b$. Puisque $(a, b) = 1$, on a $(a, e) = 1$, où $\{an + b\}$ intersecte $\{en + 1\}$ infiniment souvent. Donc l'ensemble $\{2n\}$ et le point $\{1\}$ ne peuvent avoir de voisinages disjoints ouverts.

Théorème 5. La topologie D n'est pas compacte.

Preuve. L'union $\bigcup_p \{np - 1\}$ étendue sur tous les nombres premiers est un recouvrement ouvert infini pour les entiers positifs. Puisque l'omission d'une quelconque progression $\{nq - 1\}$ laisse le nombre $q - 1$ non couvert, la propriété de Heine-Borel échoue.

En fait, la topologie D n'est même pas localement compacte, parce que tout espace de Hausdorff localement compact est régulier. Pour une preuve de cela, ainsi que des définitions les plus basiques de la topologie des ensembles de points, le lecteur est renvoyé à [5]. Le théorème de Dirichlet qui énonce que toute progression $\{an + b\}$ avec $(a, b) = 1$ contient une infinité de nombres premiers, a une formulation élégante en fonction de la topologie D.

Théorème 6. Le théorème de Dirichlet est équivalent à l'assertion que les nombres premiers sont un sous-ensemble dense des entiers dans la topologie D.

Preuve. Supposons d'abord la validité du théorème de Dirichlet. Alors tout ensemble ouvert non vide contient des nombres premiers, de telle façon que les nombres premiers sont un sous-ensemble dense des nombres entiers. Inversement, supposons que les nombres premiers forment un sous-ensemble dense. Alors tout ensemble ouvert non vide, et en particulier toutes les progressions $\{an + b\}$ avec $(a, b) = 1$, doivent contenir des nombres premiers. Il est bien connu [4] que si toute telle progression contient au moins un nombre premier, alors toute telle progression contient une infinité de nombres premiers. (Dans la terminologie topologique : "si la fermeture de l'ensemble des nombres premiers, c'est l'ensemble des entiers, alors l'ensemble dérivé des nombres premiers est l'ensemble des entiers.").

Il semble peu probable qu'une preuve topologique complète du théorème de Dirichlet puisse être donnée selon ces lignes sans l'introduction de nouvelles idées et méthodes puissantes.

Un autre fait familier rendu possible par la formulation topologique est le

Théorème 7. Dans la topologie D, l'intérieur de l'ensemble des nombres premiers est vide.

Preuve. S'il y avait un ensemble ouvert constitué seulement complètement de nombres premiers, il y aurait une progression $\{an + b\}$ avec $1 \leq b \leq a$ constituée entièrement de nombres premiers. Mais avec $n_0 = a + b + 1$, $an_0 + b = (a + b)(a + 1)$, qui est composé.

Il est intéressant de considérer également la topologie D' pour les entiers positifs, qui a pour base ces progressions $\{an + b\}$ avec $(a, b) = 1$ pour tout $n > N$.

(Ici N peut prendre toutes les valeurs.) Cette topologie est clairement plus forte que D, bien que les théorèmes 1 à 7 soient encore valides dans D'. De plus, certains théorèmes reliés au crible d'Ératosthène sont valides dans D'. En particulier,

Théorème 8. L'ensemble des entiers positifs m tels que $6m-1$ et $6m+1$ est une paire de "nombres premiers jumeaux" est fermé dans D'.

Preuve. On sait [3] que les nombres m en question sont précisément ces nombres entiers positifs *non* exprimables sous la forme $6ab \pm a \pm b$ pour tout $a \geq 1$ et $b \geq 1$. Par conséquent le complémentaire de notre ensemble est $\bigcap_{b \geq 1}\{(6b \pm 1)a \pm b\}$, où chaque progression est restreinte aux $a \geq 1$, et est ouverte parce que $(6b \pm 1, b) = 1$. L'union est ouverte dans D', parce que c'est une union d'ensembles ouverts. Par conséquent, les entiers m pour lesquels $6m - 1$ et $6m + 1$ sont tous les deux des nombres premiers forment un ensemble fermé.

Références

1. M. Brown, A countable connected Hausdorff space, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 59, 1953, p. 367.
2. H. Furstenberg, On the infinitude of primes, this MONTHLY, vol. 62, 1955, p. 353.
3. S. Golomb, Problem E 969, this MONTHLY vol. 58, 1951, p. 338.
4. R. Spira, Problem E 1218, this MONTHLY, vol. 63, 1956, p. 342.
5. J. L. Kelley, General Topology, New York, 1955.

Traduction de l'article de Mercer en référence plus haut.

Sur la preuve de Furstenberg de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers

Idris D. Mercer

Théorème. Il y a une infinité de nombres premiers.

La démonstration d'Euclide de ce théorème est un morceau classique des mathématiques. Et bien qu'une seule preuve suffise à établir la vérité du théorème, de nombreuses générations de mathématiciens se sont amusées à trouver des preuves alternatives. Voir, par exemple, [2], ou le chapitre 1 soit de [1] soit de [4].

Il y a une preuve particulièrement surprenante, due à Furstenberg en 1955 [3], qui utilise, parmi toutes choses, le langage topologique ! Dans cette note, nous donnons une variante de la preuve de Furstenberg qui évite le langage topologique et par conséquent, selon l'opinion du présent auteur, exhibe mieux la "véritable raison" pour laquelle l'approche de Furstenberg marche.

Définition. Si m et r sont des entiers avec $m \geq 1$, on dénote par $r + m\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers congrus à r mod m, donc par exemple,

$$2 + 7\mathbb{Z} = 9 + 7\mathbb{Z} = -5 + 7\mathbb{Z} = \{\ldots, -12, -5, 2, 9, 16, \ldots\}.$$

On appelle un tel ensemble une progression arithmétique, ou PA en abrégé.

Notation. Pour $m \geq 2$, l'ensemble des entiers non divisibles par m est

$$(1 + m\mathbb{Z}) \cup \ldots \cup ((m-1) + m\mathbb{Z}).$$

qu'on abrège en $\mathrm{NM}(m)$ (les initiales de "non multiples" de m).

Assertion 1. *Une intersection finie de* PA *est soit vide soit infinie.*

Preuve. Si x appartient à $r_i + m_i\mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq k$, alors il en est de même de $x + y$ où y est n'importe quel multiple commun des m_i.

Assertion 2. *Si $\mathcal{S}$ est une collection quelconque d'ensembles, alors une intersection finie d'unions finies d'ensembles dans $\mathcal{S}$ est également une union d'intersections finies d'ensembles dans $\mathcal{S}$.*

Preuve. Ceci énonce juste le fait que l'intersection se distribue sur l'union. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}(R) \cap (U \cup V) \cap (W \cup X) \;&= (R \cap U \cap W) \cup (R \cap U \cap X)\\ &\cup (R \cap V \cap W) \cup (R \cap V \cap X)\\ &\cup (S \cap U \cap W) \cup (S \cap U \cap X)\\ &\cup (S \cap V \cap W) \cup (S \cap V \cap X)\\ &\cup (T \cap U \cap W) \cup (T \cap U \cap X)\\ &\cup (T \cap V \cap W) \cup (T \cap V \cap X)\end{aligned}$$ □

Preuve du théorème. Si $p_1, \ldots, p_k$ étaient tous des nombres premiers, on aurait

$$\{-1, +1\} = \mathrm{NM}(p_1) \cap \mathrm{NM}(p_2) \cap \ldots \cap \mathrm{NM}(p_k),$$

qui est une intersection finie d'unions finies de PA et par conséquent, par l'assertion 2, une union finie d'intersections finies de PA, qui par l'assertion 1 doit être soit vide soit infinie. Ceci est une contradiction. □

Références

1. M. Aigner and G. M. Ziegler, Proofs from The Book, Springer-Verlag, New York, 1998.
2. C. K. Caldwell, Proofs that there are infinitely many primes (2007), available at http://primes.utmedu/notes/proofs/infinite.
3. H. Furstenberg, On the infinitude of primes, this MONTHLY 62 (1955) 353.
4. P. Ribenboim, The New Book of Prime Number Records, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 1996.

181 Wychwood Avenue, Toronto, ON, Canada M6C 2T4 idmercer@yorku.ca

---

Posté sur le forum les-mathematiques.net ici :

https://les-mathematiques.net/vanilla/index.php?p=/discussion/991521/absurde-et-tiers-exclu/p1.

denise chemla
December 2014 Signaler

Bonjour,
Merci de la réponse, même si je n'y comprends rien, désolée d'ailleurs, je vais tout bien relire tranquillement mais un ouvert fermé, a priori, c'est totalement au-dessus de mes forces.
Cordialement,
Denise

Citer