

La théorie quantique de l'émission et de l'absorption de radiation

P. A. M. Dirac

St. John's College, Cambridge, et Institut de Physique Théorique, Copenhague

Communiquée par N. Bohr, For. Mem. R.S. Reçue le 2 février 1927 ¹

1 Introduction et résumé

La nouvelle théorie quantique, basée sur la supposition que les variables dynamiques n'obéissent pas à la loi commutative de la multiplication, s'est maintenant développée suffisamment pour former une théorie complète de la dynamique. Elle permet de traiter mathématiquement le problème de n'importe quel système dynamique composé d'un certain nombre de particules et des forces instantanées agissant entre elles, lorsque ce système est décrit par une fonction hamiltonienne, et on peut interpréter les mathématiques d'un point de vue physique par une méthode assez générale. D'autre part, presque rien n'a été fait jusqu'à présent sur l'électrodynamique quantique. Les questions du traitement correct d'un système dans lequel les forces se propagent à la vitesse de la lumière plutôt qu'instantanément, de la production d'un champ électromagnétique par un électron en mouvement, et de la réaction de ce champ sur l'électron n'ont pas encore été traitées. De plus, il y a une sérieuse difficulté pour faire que la théorie satisfasse toutes les exigences du principe restreint de la relativité, puisqu'alors une fonction hamiltonienne ne peut plus être utilisée. Cette question de la relativité est, bien sûr, liée aux précédentes, et il sera impossible de répondre à aucune de ces questions sans répondre à toutes. Pourtant, il semble possible de construire une théorie satisfaisante de l'émission de radiation et de la réaction du champ de la radiation sur le système l'émettant sur la base d'une cinématique et d'une dynamique qui ne soient pas strictement relativistes. C'est le principal objectif de cet article. La théorie est non-relativiste seulement par le fait que le temps est toujours compté via un c -nombre, plutôt que d'être traité symétriquement avec l'espace des coordonnées. La variation de la relativité de la masse avec la vitesse est prise en compte sans difficulté.

Les idées sous-tendant la théorie sont très simples. Considérons un atome interagissant avec un champ de radiation, que l'on peut supposer pour sa définissabilité comme étant enfermé dans une boîte de telle sorte à n'avoir qu'un ensemble discret de degrés de liberté. En résolvant la radiation en ses composantes de Fourier, on peut considérer l'énergie et la phase de chacun des composants comme étant des variables dynamiques décrivant le champ de radiation. Ainsi, si E_r est l'énergie d'un composant appelé r et si θ_r est la phase correspondante (définie comme la durée depuis laquelle l'onde est dans une phase standard), on peut supposer chaque E_r et θ_r comme formant une paire de variables canoniquement conjuguées. En l'absence de toute interaction entre le champ et l'atome, le système complet champ plus atome sera décrit par l'hamiltonien

$$(1) \quad H = \sum_r E_r + H_0$$

égal à l'énergie totale, H_0 étant l'hamiltonien pour l'atome seul, puisque les variables E_r , θ_r satisfont trivialement leurs équations canoniques de mouvement

$$\dot{E}_r = -\frac{\partial H}{\partial \theta_r} = 0, \quad \dot{\theta}_r = -\frac{\partial H}{\partial E_r} = 1.$$

¹J'ai traduit ce texte en français et cette traduction comporte sûrement des erreurs qui n'engagent que moi, Denise Vella-Chemla.

Quand il y a interaction entre le champ et l'atome, cela pourrait être pris en compte par la théorie classique par une addition d'un terme d'interaction à l'hamiltonien (1), qui pourrait être une fonction des variables de l'atome et des variables E_r, θ_r , qui décrivent le champ. Ce terme d'interaction donnerait l'effet de la radiation sur l'atome, et également la réaction de l'atome sur le champ de radiation.

Pour qu'une méthode analogue puisse être utilisée en théorie quantique, il est nécessaire de supposer que les variables E_r, θ_r , sont des q -nombres satisfaisant les conditions quantiques standard $\theta_r E_r - E_r \theta_r = ih$ etc., où h est $(2\pi)^{-1}$ fois la constante de Planck habituelle, comme les autres variables dynamiques du problème. Cette supposition donnent immédiatement à la radiation des propriétés quantiques lumineuses². Car si ν_r est la fréquence du composant r , $2\pi\nu_r\theta_r$ est une variable d'angle, de telle façon que son conjugué canonique $E_r/2\pi\nu_r$ peut seulement prendre un ensemble discret de valeurs différant par des multiples de h , ce qui signifie que E_r peut uniquement varier par multiples entiers du quantum $(2\pi h)\nu_r$. Si maintenant on ajoute un terme d'interaction (pris en compte par la théorie classique) à l'hamiltonien (1), le problème peut être résolu selon les règles de la mécanique quantique, et l'on s'attend à obtenir les résultats corrects pour l'action de la radiation et de l'atome l'un sur l'autre. Nous montrerons que nous obtenons effectivement les lois correctes pour l'émission et l'absorption de radiation, et les valeurs correctes pour les A et B d'Einstein. Dans la théorie précédente de l'auteur³, où les énergies et les phases des composants de la radiation étaient des c -nombres, seuls les B pouvaient être obtenus, et la réaction de l'atome sur la radiation ne pouvait pas être prise en compte.

Il sera également montré que l'hamiltonien qui décrit l'interaction de l'atome et des ondes électromagnétiques peut être rendu identique à l'hamiltonien pour le problème de l'interaction d'un atome avec un ensemble de particules en mouvement à la vitesse de la lumière et satisfaisant les statistiques d'Einstein-Bose, par un choix judicieux de l'énergie d'interaction pour les particules. Le nombre de particules ayant n'importe quelle direction de mouvement et d'énergie, qui peut être utilisé comme une variable dynamique dans l'hamiltonien pour les particules, est égal au nombre de quanta d'énergie de l'onde correspondante dans l'hamiltonien des ondes. Il y a ainsi une harmonie complète entre les descriptions ondulatoire et lumineuse quantique de l'interaction. Nous allons effectivement construire la théorie à partir du point de vue quantique et montrer que l'hamiltonien se transforme naturellement en une formule qui ressemble à la formule pour les ondes.

Le développement mathématique de la théorie a été rendu possible par une théorie générale de l'auteur de transformation des matrices quantiques⁴. Comme nous comptons le temps comme un c -nombre, nous pouvons utiliser la notion de valeur de toute variable dynamique à tout instant. Cette valeur est un q -nombre, qui peut être représenté par une "matrice" généralisée selon de nombreux modèles matriciels différents, certains d'entre eux pouvant avoir des intervalles continus pour les colonnes et les lignes, et pouvant nécessiter que les éléments des matrices appartiennent à certaines sortes d'infinités (du type donné par les fonctions δ)⁵. Un modèle de matrices peut être trouvé dans lequel tous les ensembles souhaités de constantes d'intégration du système dynamique qui commutent sont représentés par des matrices diagonales, ou dans lequel les variables qui commutent sont représentées par des matrices qui sont diagonales à un temps spécifié⁶. Les valeurs des

²Des suppositions similaires ont été utilisées par Born and Jordan [*Z. f. Physik*, vol. 34, p. 886 (1925)] dans le but de prendre en charge la formule classique de l'émission de radiation par un dipole en théorie quantique, et par Born, Heisenberg and Jordan [*Z. f. Physik*, vol. 35, p. 606 (1925)] pour calculer les fluctuations d'énergie dans le champ de radiation du corps noir.]

³*Roy. Soc. Proc. A*, vol. 112, p. 661, §5 (1926). Cela est cité ensuite dans *loc. cit.*, I.

⁴*Roy. Soc. Proc. A*, vol. 113, p. 621 (1927). Cela est cité ensuite par *loc. cit.*, II. Une théorie globalement équivalente a été obtenue indépendamment par Jordan [*Z. f. Physik*, vol. 40, p. 809 (1926)]. Voir aussi F. London, *Z. f. Physik*, vol. 40, p. 193 (1926)

⁵*Loc. cit.* II, §2.

⁶On peut utiliser un modèle de matrices dans lequel les variables qui commutent sont à tout instant représentées

éléments diagonaux d'une matrice diagonale représentant un q -nombre quelconque sont les valeurs caractéristiques de ce q -nombre. Les coordonnées cartésiennes ou le moment auront en général toutes les valeurs caractéristiques de $-\infty$ à $+\infty$, alors qu'une variable d'action prend seulement un ensemble discret de valeurs caractéristiques. (Nous prendrons pour règle d'utiliser des lettres sans prime (')) pour dénoter les variables dynamiques ou q -nombres, et les mêmes lettres avec prime (') ou double prime ('') pour dénoter leurs valeurs caractéristiques. Les fonctions de transformation ou fonctions propres sont des fonctions des valeurs caractéristiques et non les q -nombres eux-mêmes, de telle sorte qu'elles peuvent toujours s'écrire en termes de variables avec prime (' ou '').)

Si $f(\xi, \eta)$ est n'importe quelle fonction des variables canoniques ξ_k, η_k , la matrice représentant f à tout instant dans le modèle de matrices dans lequel les ξ_k à l'instant t sont des matrices diagonales peut s'écrire sans aucun problème, puisque les matrices représentant les ξ_k et les η_k eux-mêmes au temps t sont connues, notamment,

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_k(\xi' \xi'') = \xi'_k \delta(\xi' \xi'') \\ \eta_k(\xi' \xi'') = -ih \delta(\xi'_1 - \xi''_1) \dots \delta(\xi'_{k-1} - \xi''_{k-1}) \delta'(\xi'_k - \xi''_k) \delta(\xi'_{k+1} - \xi''_{k+1}) \dots \end{cases}$$

Ainsi, si l'hamiltonien H est défini comme une fonction des ξ_k et des η_k , on peut immédiatement écrire la matrice $H(\xi' \xi'')$. On peut ainsi obtenir la fonction de transformation, disons (ξ' / α') , qui se transforme en un modèle de matrice (α) dans lequel l'hamiltonien est une matrice diagonale, puisque (ξ' / α') doit satisfaire l'équation intégrale

$$(3) \quad \int H(\xi' \xi'') d\xi''(\xi'' / \alpha') = W(\alpha') . (\xi' / \alpha'),$$

dans lequel les valeurs caractéristiques $W(\alpha')$ sont les niveaux d'énergie. Cette équation est juste l'équation d'onde de Schrödinger pour les fonctions propres (ξ' / α') , qui devient une équation différentielle ordinaire quand H est une fonction algébrique simple des ξ_k et des η_k selon les équations spéciales (2) des matrices représentant les ξ_k et les η_k . L'équation (3) peut s'écrire sous la forme plus générale

$$(3') \quad \int H(\xi' \xi'') d\xi''(\xi'' / \alpha') = ih \partial(\xi' / \alpha') / \partial t,$$

forme dans laquelle elle peut s'appliquer à des systèmes pour lesquels l'hamiltonien fait intervenir le temps explicitement.

On peut avoir un système dynamique spécifié par un hamiltonien H qui ne peut pas être exprimé comme une fonction algébrique d'un quelconque ensemble de variables canoniques, mais qui peut être représenté par une matrice $H(\xi' \xi'')$. Un tel problème peut encore être résolu par la méthode présente, puisqu'on peut encore utiliser l'équation (3) pour obtenir les niveaux d'énergie et les fonctions propres. Nous trouverons que l'hamiltonien qui décrit l'interaction d'un quantum lumineux et d'un système atomique est de ce type plus général, de telle sorte que l'interaction peut être traitée mathématiquement, bien que l'on ne puisse pas alors parler d'énergie potentielle d'interaction au sens usuel.

Il faudrait observer qu'il y a une différence entre une onde lumineuse et l'onde de de Broglie ou Schrödinger associée aux quanta lumineux. D'abord, l'onde lumineuse est toujours réelle, alors que l'onde de de Broglie associée à un quantum lumineux se déplaçant dans une direction définie doit

par des matrices diagonales si l'on sacrifie la condition que les matrices satisfont les équations du mouvement. La fonction de transformation d'un tel modèle dans un modèle dans lequel les équations du mouvement sont satisfaites utilisera le temps explicitement. Voir p. 628 in *loc. cit.* II.

faire intervenir une exponentielle imaginaire. Une différence plus importante est que leurs intensités doivent être interprétées de façons différentes. Le nombre de quanta lumineux par unité de volume associés à une onde lumineuse mono-chromatique est égal à l'énergie par unité de volume de l'onde divisée par l'énergie $(2\pi h)\nu$ d'un quantum lumineux simple. D'un autre côté, une onde de Broglie mono-chromatique d'amplitude a (multipliée par le facteur exponentiel imaginaire) doit être interprétée comme représentant a^2 quanta lumineux par unité de volume pour toutes les fréquences. C'est un cas spécial de la règle générale pour interpréter l'analyse des matrices⁷ selon lequel, si (ξ'/α') ou $\psi_{\alpha'}(\xi'_k)$ est la fonction propre des variables ξ_k de l'état α' d'un système atomique (ou particule simple), $|\psi_{\alpha'}(\xi'_k)|^2$ est la probabilité que chaque ξ_k ayant la valeur ξ'_k , [ou $|\psi_{\alpha'}(\xi'_k)|^2 d\xi'_1 d\xi'_2 \dots$ soit la probabilité de chaque ξ_k se trouvant entre les valeurs ξ'_k et $\xi'_k + d\xi'_k$, quand les ξ_k parcourent des intervalles continus de valeurs caractéristiques] selon la supposition que toutes les phases du système sont équiprobables. L'onde dont l'intensité doit être interprétée de la première de ces deux manières apparaît dans la théorie seulement quand on traite un assemblage de particules associées satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose. Il n'y a alors pas de telle onde associée aux électrons.

2 Perturbation d'un assemblage de systèmes indépendants

Nous allons maintenant considérer les transitions produites dans un système atomique par une perturbation arbitraire. La méthode que nous adopterons sera celle précédemment fournie par l'auteur⁸ qui amène simplement aux équations qui déterminent la probabilité du système d'être dans un état stationnaire quelconque du système non perturbé à tout instant⁹. Cela, bien sûr, fournit immédiatement le nombre probable de systèmes dans cet état à cet instant pour un assemblage de systèmes qui sont indépendants les uns des autres et sont tous perturbés de la même manière. L'objet de la présente section est de montrer que les équations pour les niveaux de transition pour ces nombres probables peuvent être mises sous forme hamiltonienne de manière simple, ce qui autorisera des développements plus avant dans la théorie à construire.

Soit H_0 l'hamiltonien du système non perturbé et V l'énergie perturbante, qui peut être une fonction arbitraire des variables dynamiques et peut ou peut ne pas faire intervenir le temps explicitement, de telle sorte que l'hamiltonien pour le système perturbé soit $H = H_0 + V$. Les fonctions propres du système perturbé doivent satisfaire l'équation d'onde

$$ih\partial\psi/\partial t = (H_0 + V)\psi,$$

où $(H_0 + V)$ est un opérateur. Si $\psi = \sum_r a_r \psi_r$ est la solution de l'équation qui satisfait les conditions initiales elles-mêmes, où les ψ_r sont des fonctions propres du système non perturbé, chacune associée à un état stationnaire indicé par r , et si les a_r sont des fonctions du temps seulement, alors $|a_r|^2$ est la probabilité que le système soit dans l'état r à tout moment. Les a_r doivent être initialement normalisés, et resteront du coup toujours normalisés. La théorie s'appliquera directement à un assemblage de N systèmes indépendants similaires si nous multiplions chacun de ces a_r par $N^{1/2}$ de manière à rendre $\sum_r |a_r|^2 = N$. Nous aurons maintenant que $|a_r|^2$ est le nombre probable de systèmes dans l'état r .

L'équation qui détermine le niveau de transition des a_r est¹⁰

$$(4) \quad ih\dot{a}_r = \sum_s V_{rs} a_s,$$

⁷ *Loc. cit.* II. §§6, 7

⁸ *Loc. cit.* I.

⁹ La théorie a été récemment étendue par Born [*Z. f. Physik*, vol. 40, p. 167 (1926)] de manière à prendre en compte les transitions adiabatiques dans les états stationnaires qui pourraient être produits par la perturbation aussi bien que par les transitions. Cette extension n'est pas utilisée dans le présent article.

¹⁰ *Loc. cit.* I, equation (25)

où les V_{rs} 's sont les éléments de la matrice représentant V . L'équation imaginaire conjuguée est

$$(4') \quad -i\hbar\dot{a}_r^* = \sum_r V_{rs}^* a_s^* = \sum_s a_s^* V_{sr}$$

Si l'on regarde a_r et $i\hbar\dot{a}_r^*$ comme des conjugués canoniques, les équations (4) et (4') prennent la forme hamiltonienne avec la fonction hamiltonienne $F_1 = \sum_{rs} a_r^* V_{rs} a_s$, notamment,

$$\frac{da_r}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial F_1}{\partial a_r^*}, \quad i\hbar \frac{da_r^*}{dt} = -\frac{\partial F_1}{\partial a_r}.$$

Nous pouvons transformer en variables canoniques N_r, ϕ_r , par la transformation de contact

$$a_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi_r/\hbar}, \quad a_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\phi_r/\hbar}.$$

Cette transformation rend les nouvelles variables N_r et ϕ_r réelles, N_r étant égal à $a_r a_r^* = |a_r|^2$, le nombre probable de systèmes dans l'état r , et ϕ_r/\hbar étant la phase de la fonction propre qui les représente. L'hamiltonien F_1 devient maintenant

$$F_1 = \sum_{rs} V_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\phi_r - \phi_s)/\hbar},$$

et les équations qui déterminent le niveau auquel les transitions ont lieu ont la forme canonique

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi_r}, \quad \dot{\phi}_r = \frac{\partial F_1}{\partial N_r}.$$

Une manière plus pratique de mettre les équations de transition dans une forme hamiltonienne peut être obtenue à l'aide des quantités

$$b_r = a_r e^{-iW_r t/\hbar}, \quad b_r^* = a_r^* e^{iW_r t/\hbar},$$

W_r étant l'énergie de l'état r . On a $|b_r|^2$ égal à $|a_r|^2$, le nombre probable de systèmes dans l'état r . Pour \dot{b}_r , on trouve

(5)

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{b}_r &= W_r b_r + i\hbar\dot{a}_r e^{-iW_r t/\hbar} \\ &= W_r b_r + \sum_s V_{rs} b_s e^{i(W_s - W_r)t/\hbar} \end{aligned}$$

avec l'aide de (4). Si on pose $V_{rs} = v_{rs} b_s e^{i(W_r - W_s)t/\hbar}$ de telle sorte que v_{rs} est une constante quand V ne fait pas intervenir le temps explicitement, cela se réduit à

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{b}_r &= W_r b_r + \sum_s v_{rs} b_s \\ &= \sum_s H_{rs} b_s, \end{aligned}$$

où $H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs}$, est un élément de la matrice de l'hamiltonien global $H = H_0 + V$ avec le facteur temps $e^{i(W_r - W_s)t/\hbar}$ éliminé, de telle façon que H_{rs} est une constante quand H ne fait pas intervenir le temps explicitement. L'équation (5) est de la même forme que l'équation (4), et peut être mise sous forme hamiltonienne de la même manière.

On devrait remarquer que l'équation (5) est obtenue directement si l'on écrit l'équation de Schrödinger sur un ensemble de variables qui spécifient les états stationnaires du système non perturbé. Si ces variables sont ξ_h , et si $H(\xi'\xi'')$ dénote un élément matriciel de l'hamiltonien global H dans le modèle (ξ), cette équation de Schrödinger serait

$$(6) \quad i\hbar\partial\psi(\xi')/\partial t = \sum_{\xi''} H(\xi'\xi'')\psi(\xi''),$$

comme l'équation (3'). Elle diffère de l'équation précédente (5) seulement dans la notation, un simple suffixe r étant utilisé là pour dénoter un état stationnaire plutôt qu'un ensemble de valeurs

numériques ξ'_k pour les variables ξ_k , et b_r étant utilisé à la place de $\psi(\xi')$. L'équation (6), et par conséquent également l'équation (5), peuvent encore être utilisées quand l'hamiltonien est du type plus général qui ne peut pas être exprimé comme une fonction algébrique d'un ensemble de variables canoniques, mais peut encore être représenté par une matrice $H(\xi'\xi'')$ ou H_{rs} .

Prenons maintenant b_r et ihb_r^* des variables canoniquement conjuguées plutôt que a_r et $ih a_r^*$. L'équation (5) et son équation conjuguée imaginaire prendra maintenant la forme hamiltonienne avec la fonction hamiltonienne

$$(7) \quad F = \sum_{rs} b_r^* H_{rs} b_s.$$

En procédant comme précédemment, on effectue la transformation de contact

$$(8) \quad b_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h}, \quad b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h},$$

sur les nouvelles variables canoniques N_r, θ_r , où N_r est, comme précédemment, le nombre probable de systèmes dans l'état r , et θ_r est une nouvelle phase. L'hamiltonien F deviendra alors

$$F = \sum_{rs} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h},$$

et les équations pour les niveaux de transitions des N_r et θ_r prendront la forme canonique

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F}{\partial \theta_r}, \quad \dot{\theta}_r = \frac{\partial F}{\partial N_r}$$

L'hamiltonien peut alors s'écrire

$$(9) \quad F = \sum_r W_r N_r + \sum_{rs} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}.$$

Le premier terme $\sum_r W_r N_r$ est l'énergie propre totale de l'assemblage, et le second terme peut être vu comme l'énergie additionnelle due à la perturbation. Si la perturbation est nulle, les phases θ_r augmenteront linéairement avec le temps, tandis que les phases précédentes ϕ_r seront constantes dans ce cas.

3 Perturbation d'un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose

Selon la section précédente, nous pouvons décrire l'effet d'une perturbation sur un assemblage de systèmes indépendants au moyen de variables canoniques et d'équations hamiltoniennes du mouvement. Le développement de la théorie qui nous vient naturellement à l'esprit consiste à faire de ces variables canoniques des q -nombres satisfaisant les conditions quantiques habituelles plutôt que des c -nombres, de telle façon que leurs équations hamiltoniennes du mouvement deviennent de vraies équations quantiques. La fonction hamiltonienne va maintenant fournir une équation d'onde de Schrödinger, qui doit être résolue et interprétée de la façon habituelle. L'interprétation donnera non seulement le nombre probable de systèmes dans n'importe quel état, mais également la probabilité d'une distribution quelconque donnée des systèmes parmi les différents états, cette probabilité étant, en fait, égale au carré du module de la solution normalisée de l'équation d'onde qui satisfait les conditions initiales adéquates. Nous pourrions, bien sûr, calculer directement à partir de considérations élémentaires la probabilité de toute distribution donnée quand les systèmes sont indépendants, puisque nous connaissons la probabilité de chaque système d'être dans un état donné particulier. Nous trouverions que la probabilité calculée directement de cette manière n'est pas en accord avec celle obtenue par l'équation d'onde, excepté dans le cas particulier où il y a seulement un seul système dans l'assemblage. Dans le cas général, il sera montré que l'équation d'onde amène

à la valeur correcte pour la probabilité de n'importe quelle distribution donnée quand les systèmes, plutôt que d'être indépendants, obéissent aux statistiques de Einstein-Bose.

Supposons que les variables b_r, ihb_r^* du §2 sont des q -nombres canoniques satisfaisant les conditions quantiques

$$b_r \cdot ihb_r^* - ihb_r^* \cdot b_r = ih$$

ou

$$b_r b_r^* - b_r^* b_r = 1$$

et

$$\begin{aligned} b_r b_s - b_s b_r &= 0, & b_r^* b_s^* - b_s^* b_r^* &= 0, \\ b_r b_s^* - b_s^* b_r &= 0 & (s \neq r). \end{aligned}$$

Les équations de transformation (8) doivent maintenant être écrites sous forme quantique

(10)

$$\begin{cases} b_r = (N_r + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h} = e^{-i\theta_r/h} N_r^{\frac{1}{2}} \\ b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} = e^{i\theta_r/h} (N_r + 1)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

de telle façon que les N_r, θ_r puissent aussi être des variables canoniques. Ces équations montrent que les N_r peuvent seulement avoir des valeurs caractéristiques entières non négatives¹¹, ce qui nous fournit une justification de la supposition que les variables sont des q -nombres tels que nous les avons choisis. Les nombres de systèmes dans les différents états sont maintenant des nombres quantiques ordinaires.

L'hamiltonien (7) devient alors

(11)

$$\begin{aligned} F &= \sum_{rs} b_r^* H_{rs} b_s = \sum_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} H_{rs} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h} \\ &= \sum_{rs} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h} \end{aligned}$$

dans lequel les H_{rs} sont toujours des c -nombres. Nous pouvons écrire ce F dans la forme correspondant à (9)

(11')

$$F = \sum_r W_r N_r + \sum_{rs} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$$

dans laquelle il est à nouveau composé d'un terme correspondant à l'énergie propre $\sum_r W_r N_r$ et d'un terme correspondant à l'énergie d'interaction.

L'équation d'onde écrite en fonction des variables N_r est¹²

$$(12) \quad ih \frac{\partial}{\partial t} \psi(N'_1, N'_2, N'_3 \dots) = F \psi(N'_1, N'_2, N'_3 \dots),$$

où F est un opérateur, chaque θ_r apparaissant dans F étant interprété comme signifiant $ih\partial/\partial N'_r$.

Si nous appliquons l'opérateur $e^{\pm i\theta_r/h}$ à n'importe quelle fonction $f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r, \dots)$ des variables N'_1, N'_2, \dots , le résultat est

$$\begin{aligned} e^{\pm i\theta_r/h} f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r \dots) &= e^{\mp \delta/\delta N'_r} f(N'_1, N'_2 \dots N'_r \dots) \\ &= f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r \mp 1, \dots). \end{aligned}$$

¹¹Voir §8 de l'article de l'auteur *Roy. Soc. Proc. A*, vol. 111, p. 281 (1926). Ce qu'on appelait les valeurs d'un c -nombre, et qui sont ici les valeurs qu'un q -nombre peut prendre, se verront donner le nom plus précis de valeurs caractéristiques de ce q -nombre.

¹²On suppose pour la définissabilité que l'indice r des états stationnaires prend les valeurs 1, 2, 3, ...

Si nous utilisons cette règle dans l'équation (12) et que nous utilisons l'expression (11) pour F , nous obtenons¹³

$$(13) \quad \begin{aligned} & ih \frac{\partial}{\partial t} \psi(N'_1, N'_2, N'_3 \dots) \\ & = \sum_{rs} H_{rs} N_r'^{\frac{1}{2}} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} \psi(N'_1, N'_2 \dots N'_r - 1, \dots N'_s + 1, \dots). \end{aligned}$$

Nous voyons du côté droit de cette équation que dans la matrice représentant F , le terme de F faisant intervenir $e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$ contribuera seulement aux éléments de la matrice qui représentent les transitions dans lesquelles N_r décroît d'une unité et N_s croît d'une unité, i.e. aux éléments de la matrice de la forme $F(N'_1, N'_2 \dots N'_r \dots N'_s; N'_1, N'_2 \dots N'_r - 1 \dots N'_s + 1 \dots)$. Si nous trouvons une solution $\psi(N'_1, N'_2 \dots)$ de l'équation (13) qui est normalisée [i.e. une solution pour laquelle $\sum_{N'_1, N'_2 \dots} |\psi(N'_1, N'_2 \dots)|^2 = 1$] et qui satisfait les conditions propres initiales, alors $|\psi(N'_1, N'_2 \dots)|^2$ sera la probabilité de cette distribution dans laquelle N'_1 systèmes sont dans l'état 1, N'_2 dans l'état 2, ... à tout instant.

Considérons d'abord le cas où il y a un seul système dans l'assemblage. La probabilité qu'il soit dans l'état q est déterminée par la fonction propre $\psi(N'_1, N'_2, \dots)$ dans laquelle tous les N' sont égaux à zéro sauf N'_q , qui est égal à l'unité. Nous noterons cette fonction propre $\psi\{q\}$. Quand elle est substituée dans le côté gauche de (13), tous les termes de la somme du côté droit s'évanouissent sauf ceux pour lesquels $r = q$, et il reste

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \psi\{q\} = \sum_r H_{qs} \psi\{s\}$$

qui est la même équation que (5) avec $\psi\{q\}$ jouant le rôle de b_q . Cela établit le fait que la théorie présente est équivalente à celle de la section précédente quand il y a seulement un système dans l'assemblage.

Maintenant prenons le cas général d'un nombre arbitraire de systèmes dans l'assemblage, et supposons qu'ils obéissent à la mécanique statistique de Einstein-Bose. Cela nécessite que, dans le traitement habituel du problème, seules les fonctions propres qui sont symétriques entre tous les systèmes doivent être prises en compte, ces fonctions propres étant par elles-mêmes suffisantes pour donner une solution quantique complète du problème¹⁴. Nous allons maintenant obtenir l'équation pour le niveau de transition de l'une de ces fonctions propres symétriques, et montrer qu'elle est identique à l'équation (13).

Si nous indiquons chaque système par un nombre n , alors le hamiltonien pour l'assemblage sera $H_A = \sum_n H(n)$, où $H(n)$ est le H du §2 (égal à $H_0 + V$) exprimé en fonction des variables du n -ième système. Un état stationnaire de l'assemblage est défini par les nombres $r_1, r_2 \dots r_n \dots$ qui sont les indices des états stationnaires dans lesquels stagnent les systèmes séparés. L'équation de Schrödinger pour l'assemblage en un ensemble de variables qui spécifient les états stationnaires sera de la forme (6) [avec H_A plutôt que H], et nous pouvons l'écrire dans la notation de l'équation (5) ; ainsi :

$$(14) \quad ih \dot{b}(r_1 r_2 \dots) = \sum_{s_1 s_2 \dots} H_A(r_1 r_2 \dots; s_1 s_2 \dots) b(s_1 s_2 \dots),$$

où $H_A(r_1 r_2 \dots; s_1 s_2 \dots)$ est l'élément de la matrice globale de H_A [en enlevant le facteur temps]. Cet élément matriciel s'évanouit quand plus d'un s_n diffère du r_n correspondant ; il est égal à $H_{r_m s_m}$ quand s_m diffère de r_m et que tous les autres s_n sont égaux aux r_n ; et il est égal à $\sum_n H_{r_n r_n}$ quand tout s_n est égal à r_n . En substituant ces valeurs dans (14), nous obtenons

$$(15) \quad ih \dot{b}(r_1 r_2 \dots) = \sum_m \sum_{s_m \neq r_m} H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \dots r_{m-1} s_m r_{m+1} \dots) + \sum_n H_{r_n r_n} b(r_1 r_2 \dots).$$

¹³ où $s = r$, $\psi(N'_1, N'_2 \dots N'_r - 1 \dots N'_s + 1)$ doit être pris comme signifiant $\psi(N'_1 N'_2 \dots N'_r \dots)$.

¹⁴ *Loc. cit.* §3

Nous devons maintenant contraindre $b(r_1 r_2 \dots)$ à être une fonction symétrique des variables r_1, r_2, \dots de façon à obtenir les statistiques de Einstein-Bose. Cela est rendu possible puisque si $b(r_1 r_2 \dots)$ est symétrique à tout instant, alors l'équation (15) montre que $\dot{b}(r_1 r_2 \dots)$ est aussi symétrique à cet instant, de telle sorte que $b(r_1 r_2 \dots)$ restera symétrique.

Notons N_r le nombre de systèmes dans l'état r . Alors un état stationnaire de l'assemblage décrivable par une fonction propre symétrique doit être spécifié par les nombres $N_1, N_2, \dots, N_r, \dots$ aussi bien que par les nombres $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, et nous serons capables de transformer l'équation (15) en les variables N_1, N_2, \dots . Nous ne pouvons pas vraiment prendre la nouvelle fonction propre $b(N_1, N_2, \dots)$ égale à la précédente $b(r_1 r_2 \dots)$, mais nous devons en prendre une qui soit un multiple de l'autre de façon à ce que les deux soient correctement normalisées selon leurs variables respectives. Nous devons avoir, en fait,

$$\sum_{r_1, r_2, \dots} |b(r_1 r_2 \dots)|^2 = 1 = \sum_{N_1, N_2, \dots} |b(N_1, N_2 \dots)|^2,$$

et ainsi, nous devons prendre $|b(N_1, N_2 \dots)|^2$ égal à la somme des $|b(r_1 r_2 \dots)|^2$ pour toutes les valeurs des nombres r_1, r_2, \dots de telle façon que N_1 d'entre eux soient égaux à 1, N_2 égaux à 2, etc. Ainsi, il y a $N!/N_1!N_2! \dots$ termes dans cette somme, où $N = \sum_r N_r$ est le nombre total de systèmes, et ils sont tous égaux, puisque $b(r_1 r_2 \dots)$ est une fonction symétrique de ses variables r_1, r_2, \dots . Par conséquent, nous devons avoir

$$b(N_1, N_2, \dots) = (N!/N_1!N_2! \dots)^{\frac{1}{2}} \dot{b}(r_1 r_2 \dots).$$

Si nous effectuons cette substitution dans l'équation (15), le côté gauche deviendra

$$ih(N_1!N_2! \dots / N!)^{\frac{1}{2}} b(N_1, N_2 \dots).$$

Le terme $H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \dots r_{m-1} s_m r_{m+1} \dots)$ dans la première somme du côté droit deviendra

$$(16) \quad [N_1!N_2! \dots (N_r - 1)! \dots (N_s + 1)! \dots / N!]^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots),$$

où nous avons écrit r pour r_m et s pour s_m . Ce terme doit être ajouté pour toutes les valeurs de s sauf r , et doit alors être ajouté pour r prenant chacune des valeurs r_1, r_2, \dots . Ainsi chaque terme (16) se voit répété par le procédé de sommation jusqu'à ce qu'il apparaisse un total de N_r fois, de telle façon qu'il contribue

$$N_r [N_1!N_2! \dots (N_r - 1)! \dots (N_s + 1)! \dots / N!]^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots) \\ N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} (N_1!N_2! \dots / N!)^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots)$$

au côté droit de (15). Finalement, le terme $\sum_n H_{r_n r_n} b(r_1, r_2, \dots)$ devient

$$\sum_r N_r H_{rr} \cdot b(r_1 r_2 \dots) = \sum_r N_r H_{rr} \cdot (N_1!N_2! \dots / N!)^{\frac{1}{2}} b(N_1, N_2 \dots).$$

Par conséquent, l'équation (15) devient, en enlevant le facteur $(N_1!N_2! \dots / N!)^{\frac{1}{2}}$,

$$(17) \quad ih\dot{b}(N_1, N_2 \dots) = \sum_r \sum_{s \neq r} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots) + \sum_r N_r H_{rr} b(N_1, N_2 \dots),$$

ce qui est identique à (13) [excepté le fait que dans (17), les primes (?) ont été omis pour les N , ce qui est permis quand on n'a pas besoin de faire référence aux N comme à des q -nombres]. Nous avons ainsi établi que l'hamiltonien (11) décrit l'effet d'une perturbation sur un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose.

4 Réaction de l'assemblage sur le système perturbant

Jusqu'à présent, nous avons seulement considéré des perturbations qui peuvent être représentées par une énergie de perturbation V ajoutée à l'hamiltonien du système perturbé, V étant une fonction seulement des variables dynamiques de ce système et peut-être du temps. Il est possible que la théorie s'étende au cas où la perturbation consiste en une interaction avec un système dynamique perturbant, la réaction du système perturbé sur le système perturbant étant prise en compte (la distinction entre le système perturbant et le système perturbé est, bien sûr, non réelle, mais elle sera gardée par facilité).

Nous considérons maintenant un système perturbant, décrit, disons, par les variables canoniques J_k, ω_k , les J étant ses premières intégrales quand il est seul, interagissant avec un assemblage de systèmes perturbés sans interaction mutuelle, qui satisfont les statistiques de Einstein-Bose. L'hamiltonien global sera de la forme

$$H_T = H_P(J) + \sum_n H(n),$$

où H_r est l'hamiltonien du système perturbant (une fonction des J seulement) et $H(n)$ est égale à l'énergie propre $H_0(n)$ plus l'énergie de perturbation $V(n)$ du n -ième système de l'assemblage. $H(n)$ est une fonction des seules variables du n -ième système de l'assemblage et des J et w , et ne fait pas intervenir le temps explicitement.

L'équation de Schrödinger correspondant à l'équation (14) est maintenant

$$i\hbar b(J', r_1 r_2 \dots) = \sum_{J''} \sum_{s_1, s_2 \dots} H_r(J', r_1 r_2 \dots; J'', s_1 s_2 \dots) b(J'', s_1 s_2 \dots),$$

dans laquelle la fonction propre b fait intervenir les variables J'_k .

L'élément matriciel $H_r(J', r_1 r_2 \dots; J'', s_1 s_2 \dots)$ est maintenant toujours une constante. Comme précédemment, il s'évanouit quand plus d'un s_n diffère du r_n correspondant. Quand s_m diffère de r_m et que tout autre s_n est égal à r_n , il se réduit à $H(J' r_m; J'' s_m)$, qui est l'élément matriciel $(J' r_m; J'' s_m)$ (avec le facteur temps éliminé) de $H = H_0 + V$, l'énergie propre plus l'énergie de perturbation d'un seul système de l'assemblage ; alors que lorsque tout s_n est égale à r_n , il prend la valeur $H_p(J') \delta_{J' J''} + \sum_n H(J' r_n; J'' r_n)$. Si, comme précédemment, nous contraignons les fonctions propres à être symétriques en les variables $r_1, r_2 \dots$, nous pouvons à nouveau les transformer en les variables $N_1, N_2 \dots$, ce qui amènera, comme précédemment, au résultat.

(18)

$$i\hbar b(J', N'_1, N'_2 \dots) = H_p(J') b(J', N'_1, N'_2 \dots) + \sum_{J''} \sum_{r,s} N_r^{\frac{1}{2}} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} H(J' r; J'' s) b(J'', N'_1, N'_2 \dots N'_r - 1 \dots N'_s + 1 \dots)$$

Ceci est l'équation de Schrödinger correspondant à la fonction hamiltonienne

$$(19) \quad F = H_P(J) + \sum_{r,s} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar},$$

dans laquelle H_{rs} est maintenant une fonction des J et des w , telle que quand on le représente par une matrice du modèle (J), son élément $(J' J'')$ est $H(J' r; J'' s)$ (il convient de noter que H_{rs} commute encore avec les N et les θ).

Ainsi l'interaction d'un système perturbant avec un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose peut être décrit par un hamiltonien de la forme (19). Nous pouvons le mettre dans une forme correspondant à (11') en observant que l'élément matriciel $H(J'_r; J''_s)$ est composé de la somme de deux termes, un terme qui provient de l'énergie propre H_0 , qui est égale à W_r quand

$J''_k = J'_k$ et $s = r$ et qui s'évanouit sinon, et un terme qui provient de l'énergie d'interaction V , qui peut être notée $v(J'_r; J''_s)$. Ainsi, nous aurons

$$H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs},$$

où v_{rs} est cette fonction des J et des w qui est représentée par la matrice dont l'élément $(J'J'')$ est $v(J'_r; J''_s)$, et de ce fait, (19) devient

(20)

$$F = H_P(J) + \sum_r W_r N_r + \sum_{r,s} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}.$$

L'hamiltonien est ainsi la somme de l'énergie propre du système perturbant $H_P(J)$, de l'énergie propre des systèmes perturbés $\sum_r W_r N_r$ et de l'énergie de perturbation $\sum_{r,s} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$.

5 Théorie des transitions d'un système d'un état vers d'autres états de même énergie.

Avant d'appliquer les résultats des sections précédentes aux quanta de lumière, nous allons considérer la solution du problème représenté par un hamiltonien du type (19). La caractéristique essentielle de ce problème est qu'il concerne un système dynamique qui peut, sous l'influence d'une énergie de perturbation dans laquelle le temps n'intervient pas explicitement, effectuer des transitions d'un état vers d'autres états de même énergie. Le problème des collisions entre un système atomique et un électron, qui a été traité par Born¹⁵ est un cas particulier de ce type. La méthode de Born consiste à trouver une solution *périodique* de l'équation d'onde qui consiste, aussi loin qu'elle fasse intervenir les coordonnées de l'électron qui percute le système, en des ondes planes, qui représentent l'électron incident, et qui approchent le système atomique, et qui sont éparpillées ou diffractées dans toutes les directions. Le carré de l'amplitude des ondes éparpillées dans n'importe quelle direction avec n'importe quelle fréquence est supposé par Born être la probabilité que l'électron soit éparpillé dans cette direction avec l'énergie correspondante.

Cette méthode ne semble pas pouvoir s'étendre d'une manière simple au problème général des systèmes qui effectuent des transitions d'un état vers d'autres de même énergie. De plus, il n'y a pas à présent de moyen très direct et certain d'interpréter une solution périodique d'une équation d'onde pour l'appliquer à un phénomène physique non périodique tel qu'une collision (la méthode plus précise qui va être donnée maintenant montre que la supposition de Born n'est pas tout à fait correcte, dans la mesure où il est nécessaire de multiplier le carré de l'amplitude par un certain facteur).

Une méthode alternative pour résoudre un problème de collision est de trouver une solution non périodique à l'équation d'onde qui consiste simplement au départ en ondes planes se déplaçant dans l'espace entier dans les directions imposées avec la fréquence imposée pour représenter l'électron incident. Au cours du temps, les ondes se déplaçant dans d'autres directions peuvent apparaître de telle façon que l'équation d'onde reste satisfaite. La probabilité pour l'électron d'être éparpillé dans n'importe quelle direction avec n'importe quelle énergie sera alors déterminée par le niveau de croissance des composants harmoniques correspondant de ces ondes. La manière d'interpréter les mathématiques utilisées par cette méthode est assez bien définie, cette interprétation étant la même que celle du début du §2.

Nous allons appliquer cette méthode au problème général d'un système qui effectue des transitions d'un état à d'autres états de même énergie sous l'action d'une perturbation. Soit H_0 l'hamiltonien

¹⁵Born, *Z. f. Physik*, vol. 38, p. 803 (1926)

du système non perturbé et V l'énergie perturbante, qui doit ne pas faire intervenir le temps explicitement. Si nous prenons le cas d'une suite continue d'états stationnaires, spécifiée par les premières intégrales, disons α_k , du mouvement non perturbé, alors, en suivant la méthode du §2, nous obtenons

$$(21) \quad ih\dot{a}(\alpha') = \int V(\alpha'\alpha'')d\alpha'' \cdot a(\alpha''),$$

correspondant à l'équation (4). La probabilité du système d'être dans un état pour lequel chaque α_k est compris entre α'_k et $\alpha'_k + d\alpha'_k$ à tout instant est $|a(\alpha')|^2 d\alpha'_1 \cdot d\alpha'_2 \dots$ quand $a(\alpha')$ est correctement normalisé et satisfait les conditions propres initiales. Si initialement le système est dans l'état α^0 , nous devons imposer que la valeur initiale de $a(\alpha')$ soit de la forme $a^0 \cdot \delta(\alpha' - \alpha^0)$. Nous laisserons α^0 prendre une valeur arbitraire, parce que ça serait un inconvénient que de normaliser $a(\alpha')$ dans le cas présent. Pour une première approximation, nous pouvons substituer à $a(\alpha'')$ du côté droit de (21) sa valeur initiale. Cela donne

$$ih\dot{a}(\alpha') = a^0 V(\alpha'\alpha^0) = a^0 v(\alpha'\alpha^0) e^{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]t/h},$$

où $v(\alpha'\alpha^0)$ est une constante et $W(\alpha')$ est l'énergie de l'état α' . Par conséquent

$$(22) \quad iha(\alpha') = a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0) + a^0 v(\alpha'\alpha^0) \frac{e^{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]t/h} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/h}.$$

Pour les valeurs des α'_k telles que $W(\alpha')$ diffère de façon appréciable de $W(\alpha^0)$, $a(\alpha')$ est une fonction périodique du temps dont l'amplitude est petite quand l'énergie perturbante V est petite, de telle sorte que les fonctions propres correspondant à ces états stationnaires ne sont pas excitées d'une quelconque façon appréciable. D'un autre côté, pour les valeurs des α'_k telles que $W(\alpha') = W(\alpha^0)$ et $\alpha'_k \neq \alpha_k^0$ pour un certain k , $a(\alpha')$ augmente uniformément par rapport au temps, de telle façon que la probabilité du système d'être dans l'état α' à tout instant augmente proportionnellement avec le carré du temps. Physiquement, la probabilité du système d'être dans un état avec exactement la même énergie propre que l'énergie propre initiale $W(\alpha^0)$ n'a pas d'importance, étant infinitésimale. Nous sommes seulement intéressés par l'intégrale de la probabilité qui couvre un petit intervalle de valeurs d'énergie propre proche de l'énergie propre initiale et qui, comme nous le trouverons, augmente linéairement avec le temps, en accord avec les lois des probabilités ordinaires.

Nous transformons les variables $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_u$ en un ensemble de variables qui sont des fonctions arbitrairement indépendantes des α telles que l'une d'entre elles est l'énergie propre W , disons les variables $W, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{u-1}$. La probabilité à tout instant du système de rester dans un état stationnaire pour lequel tout γ_k est compris entre γ'_k et $\gamma'_k + d\gamma'_k$ est maintenant (au facteur de normalisation près) égal à

$$(23) \quad d\gamma'_1 \cdot d\gamma'_2 \dots d\gamma'_{u-1} \int |a(\alpha')|^2 \frac{\partial(\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_u)}{\partial(W', \gamma'_1 \dots \gamma'_{u-1})} dW'.$$

Pour une durée qui est grande comparée aux durées des périodes du système, nous trouverons que pratiquement la totalité de l'intégrale dans (23) provient des valeurs des W' très proches de $W^0 = W(\alpha^0)$. Posons

$$a(\alpha') = a(W', \gamma') \text{ et } \partial(\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_u) / \partial(W', \gamma'_1 \dots \gamma'_{u-1}) = J(W', \gamma').$$

Alors, pour l'intégrale dans (23), nous trouvons, avec l'aide de (22) (à la condition que $\gamma'_k \neq \gamma_k^0$ pour

un certain k)

$$\begin{aligned}
& \int |a(W', \gamma')| J(W', \gamma') dW' \\
&= |a^0|^2 \int |v(W', \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W', \gamma') \frac{[e^{i(W'-W^0)t/h} - 1][e^{-i(W'-W^0)t/h} - 1]}{(W' - W^0)^2} dW' \\
&= 2|a^0|^2 \int |v(W', \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W', \gamma') [1 - \cos(W' - W^0)t/h] / (W' - W^0)^2 . dW' \\
&= 2|a^0|^2 t/h . \int |v(W^0 + hx/t, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0 + hx/t, \gamma') (1 - \cos x) / x^2 . dx,
\end{aligned}$$

si l'on fait la substitution $(W' - W^0)t/h = x$. Pour de grandes valeurs de t , cela se réduit à

$$\begin{aligned}
& 2|a^0|^2 t/h . |v(W^0, \gamma')|^2 J(W^0, \gamma') \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos x) / x^2 . dx \\
&= 2\pi |a^0|^2 t/h . |v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0, \gamma').
\end{aligned}$$

La probabilité par unité de temps d'une transition vers un état pour lequel γ_k est compris entre γ'_k et $\gamma'_k + d\gamma'_k$ est alors (à un facteur de normalisation près)

$$(24) \quad 2\pi |a^0|^2 / h . |v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0, \gamma') d\gamma'_1 . d\gamma'_2 \dots d\gamma'_{u-1},$$

qui est proportionnel au carré de l'élément de matrice associé à cette transition de l'énergie perturbante.

Pour appliquer ce résultat au problème d'une simple collision, nous définissons les α comme étant les composantes du moment p_x, p_y, p_z de l'électron percutant et les γ comme étant les θ , et les ϕ , comme étant les angles qui déterminent la direction du mouvement. Si en prenant en compte le changement de masse de la relativité avec la vitesse, nous appelons P le moment résultant, égal à $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}}$, et E l'énergie, égale à $(m^2 c^4 + P^2 c^2)^{\frac{1}{2}}$, de l'électron, m étant sa masse restante, nous trouvons pour le Jacobien

$$J = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(E, \theta, \phi)} = \frac{EP}{c^2} \sin \theta.$$

Ainsi $J(W^0, \gamma')$ de l'expression (24) a la valeur

$$(25) \quad J(W^0, \gamma') = E' P' \sin \theta' / c^2,$$

où E' et P' se réfèrent à cette valeur pour l'énergie de l'électron éparpillé qui rend l'énergie totale égale à l'énergie initiale W^0 (i.e. à cette valeur nécessitée par la conservation de l'énergie).

Nous devons maintenant interpréter la valeur initiale de $a(\alpha')$, notamment, $a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0)$, que nous n'avons pas normalisée. Selon le §2, la fonction d'onde des variables α_k est $b(\alpha') = a(\alpha') e^{-iW't/h}$ de telle sorte que sa valeur initiale est

$$a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0) e^{-iW't/h} = a^0 \delta(p'_x - p_x^0) \delta(p'_y - p_y^0) \delta(p'_z - p_z^0) e^{-iW't/h}.$$

Si nous utilisons la fonction de transformation¹⁶

$$(x'/p') = (2\pi h)^{-\frac{3}{2}} e^{i\Sigma_{xyz} p'_x x' / h},$$

¹⁶Pour alléger l'écriture, le symbole x est utilisé pour représenter x, y, z .

et la règle de transformation

$$\psi(x') = \int (x'/p')\psi(p')dp'_x dp'_y dp'_z,$$

nous obtenons pour la fonction d'onde initiale en les coordonnées x, y, z la valeur

$$a^0(2\pi h)^{-\frac{3}{2}} e^{i\Sigma_{xyz}p_x^0 x'/h} e^{-iW't/h}.$$

Cela correspond à une distribution initiale de $|a^0|^2(2\pi h)^{-3}$ électrons par unité de volume. Puisque leur vitesse est $P^0 c^2/E^0$, le nombre par unité de temps frappant une unité de surface à angles perpendiculaires à leur direction de mouvement est $|a^0|^2 P^0 c^2/(2\pi h)^3 E^0$.

En divisant cela dans l'expression (24), nous obtenons, avec l'aide de (25),

$$(26) \quad 4\pi^2(2\pi h)^2 \frac{E'E^0}{c^4} |v(p'; p^0)|^2 \frac{P'}{P^0} \sin \theta' d\theta' d\phi'.$$

C'est la zone effective qui doit être frappée par un électron de manière à ce qu'il soit éparpillé dans l'angle solide $\sin \theta' d\theta' d\phi'$ avec l'énergie E' . Ce résultat diffère par un facteur $(2\pi h)^2/2mE'$. P'/P^0 de celui de Born¹⁷. La nécessité du facteur P'/P^0 dans (26) aurait pu être prédite par le principe d'équilibre, puisque le facteur $|v(p'; p^0)|^2$ présente une symétrie des processus direct et inverse¹⁸.

6 Application aux quanta lumineux

Nous allons maintenant appliquer la théorie du paragraphe §4 au cas où les systèmes de l'assemblage sont des quanta lumineux, la théorie étant applicable à ce cas puisque les quanta obéissent aux lois statistiques de Einstein-Bose et n'ayant pas d'interaction mutuelle. Un quantum lumineux est dans un état stationnaire quand il se déplace à moment constant en ligne droite. Par conséquent, un état stationnaire r est déterminé par les trois composantes du moment du quantum lumineux et par une variable qui spécifie son état de polarisation. Nous travaillerons en supposant qu'il y a un nombre fini de ces états stationnaires, très proches les uns des autres, parce que ça présenterait un inconvénient d'utiliser des intervalles continus. L'interaction des quanta de lumière avec un système atomique sera décrite par un hamiltonien de la forme (20), dans lequel $H_P(J)$ est l'hamiltonien du système atomique seul, et les coefficients v_{rs} correspondent aux inconnues. Nous montrerons que cette forme du hamiltonien, avec les v_{rs} arbitraires, amène aux lois d'Einstein pour l'émission et l'absorption de radiation.

Le quantum lumineux a la particularité qu'il cesse apparemment d'exister quand il est dans l'un de ses états stationnaires, notamment l'état nul, dans lequel son moment, et par conséquent son énergie également, sont nuls. Quand un quantum lumineux est absorbé, il peut être considéré comme sautant vers son état zéro, et quand il est émis, il peut être considéré comme sautant de l'état zéro vers un état dans lequel il est physiquement en évidence, de telle façon qu'il apparaît comme venant d'être créé. Puisqu'il n'y a pas de limite au nombre de quanta lumineux qui peuvent être créés de cette manière, nous devons supposer qu'il y a un nombre infini de quanta lumineux dans l'état zéro, de telle façon que le N_0 du hamiltonien (20) est infini. Nous devons maintenant avoir θ_0 , la variable canoniquement conjuguée à N_0 , qui est constante, puisque

$$\dot{\theta}_0 = \partial F/\partial N_0 = W_0 + \text{termes faisant intervenir } N_0^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } (N_0 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

¹⁷Dans un article plus récent (*Nachr. Gesell. d. Wiss., Göttingen, p. 146 (1926)*), Born a obtenu un résultat en accord avec celui du présent article pour la mécanique non relativiste, en utilisant une interprétation de l'analyse basée sur les théorèmes de conservation. J'ai une reconnaissance particulière à l'égard du Prof. N. Bohr pour avoir pu lire à l'avance une copie de ce travail.

¹⁸Voir Klein et Rosseland, *Z. f. Physik*, vol. 4, p. 46, équation (4) (1921).

et W_0 est nul. Pour que l'hamiltonien (20) puisse rester fini, il est nécessaire que les coefficients v_{r0}, v_{0r} soient infiniment petits. Nous supposons qu'ils sont infiniment petits de façon à rendre $v_{r0}N_0^{\frac{1}{2}}$ et $v_{0r}N_0^{\frac{1}{2}}$ finis, de façon à ce que les coefficients de probabilité de transition puissent être finis. Ainsi nous posons

$$v_{r0}(N_0 + 1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_0/h} = v_r, \quad v_{0r}N_0^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_0/h} = v_r^*,$$

où v_r et v_r^* sont des imaginaires finis conjugués. Nous pouvons considérer que v_r et v_r^* sont des fonctions seulement des J et des w du système atomique, puisque leurs facteurs $(N_0 + 1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_0/h}$ et $N_0^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_0/h}$ sont pratiquement des constantes, le niveau de transition de N_0 étant très petit comparé à N_0 . L'hamiltonien (20) devient maintenant

(27)

$$F = H_P(J) + \sum_r W_r N_r + \sum_{r \neq 0} [v_r N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} + v_r^* (N_r + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h}] + \sum_{r \neq 0} \sum_{s \neq 0} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}.$$

La probabilité de transition dans laquelle un quantum lumineux dans l'état r est absorbé est proportionnelle au carré du module de l'élément matriciel de l'hamiltonien qui correspond à cette transition. Cet élément matriciel doit venir du terme $v_r N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h}$ dans l'hamiltonien, et doit ainsi être proportionnel à $N_r^{\frac{1}{2}}$ où N_r' est le nombre de quanta lumineux dans l'état r avant le processus. La probabilité du processus d'absorption est ainsi proportionnelle à N_r' . De la même façon, la probabilité qu'un quantum lumineux dans l'état r soit émis est proportionnelle à $(N_r' + 1)$, et la probabilité qu'un quantum lumineux dans l'état r soit bombardé dans l'état s est proportionnelle à $N_r'(N_s' + 1)$. Les processus de radiation du type le plus général considérés par Einstein et Ehrenfest¹⁹ dans lesquels plus d'un quantum lumineux entrent en jeu simultanément ne sont pas pris en charge dans la présente théorie.

Pour établir une connexion entre le nombre de quanta lumineux par état stationnaire et l'intensité de la radiation, nous considérons une boîte de volume fini, disons A , contenant la radiation. Le nombre d'états stationnaires pour les quanta lumineux d'un type donné de polarisation dont la fréquence est comprise entre ν_r et $\nu_r + d\nu_r$, et dont la direction de déplacement est plus petite que l'angle solide entre $d\omega_r$ et la direction du mouvement de l'état r sera maintenant $A\nu_r^d \nu_r d\nu_r / c^3$. L'énergie des quanta lumineux dans ces états stationnaires est par conséquent $N_r' \cdot 2\pi h \nu_r \cdot A\nu_r^2 d\nu_r d\omega_r / c^3$. Cela doit être égal à $Ac^{-1} I_r d\nu_r d\omega_r$, où I_r est l'intensité par unité d'intervalle de fréquence de la radiation sur l'état r . Ainsi

$$(28) \quad I_r = N_r'(2\pi h)\nu_r^3/c^2$$

de telle sorte que N_r' est proportionnel à I_r et $(N_r' + 1)$ est proportionnel à $I_r + (2\pi h)\nu_r^3/c^2$.

Nous obtenons ainsi que la probabilité d'un processus d'absorption est proportionnelle à I_r , l'intensité incidente par unité d'intervalle de fréquence, et que celle du processus d'émission est proportionnelle à $I_r + (2\pi h)\nu_r^3/c^2$, qui sont justement les lois d'Einstein²⁰. De la même manière, la probabilité d'un processus dans lequel un quantum lumineux est éparpillé d'un état r à un état s est proportionnelle à $I_r[I_s + (2\pi h)\nu_r^3/c^2]$, qui est la loi de Pauli pour le bombardement d'une radiation par un électron²¹.

¹⁹ *Z. f. Physik*, vol. 19, p. 301 (1923)

²⁰ Le rapport entre une émission stimulée et une émission spontanée dans la présente théorie est juste deux fois sa valeur dans la théorie d'Einstein. Cela est dû au fait que dans la présente théorie, un composant polarisé de la radiation incidente ne peut que stimuler une radiation polarisée de la même façon, alors que dans la théorie d'Einstein les deux composants polarisés sont traités ensemble. Cette remarque s'applique aussi au processus d'éparpillement.

²¹ Pauli, *Z. f. Physik*, vol. 18, p. 272 (1923).

7 Coefficients de probabilité pour l'émission et l'absorption

Nous allons maintenant considérer l'interaction d'un atome et d'une radiation du point de vue ondulatoire. Nous résolvons la radiation en ses composantes de Fourier, et supposons que leur nombre est très grand mais fini. Indiquons chaque composant par un suffixe r , et supposons qu'il y a σ_r composants associés à la radiation d'un type défini de polarisation par unité d'angle solide et par unité d'intervalle de fréquence concernant le composant r . Chaque composant r peut être décrit par un potentiel vecteur κ_r , choisi de façon à annuler le potentiel scalaire. Le terme de perturbation à ajouter à l'hamiltonien sera maintenant, conformément à la théorie classique en négligeant la mécanique relativiste $c^{-1}\Sigma_r\kappa_r\dot{X}_r$, où X_r est le composant de la polarisation complète de l'atome dans la direction de κ_r , qui est la direction du vecteur électrique du composant r .

Nous pouvons, comme expliqué dans le §1, supposer que le champ peut être décrit par les variables canoniques N_r, θ_r , avec N_r le nombre de quanta d'énergie du composant r , et θ_r est sa phase conjuguée canonique, égale à $2\pi h\nu_r$ fois le θ_r de §1. Nous aurons maintenant $\kappa_r = a_r \cos \theta_r / h$ où a_r est l'amplitude de κ_r , qui peut être connecté à N_r comme suit : le flot d'énergie par unité de surface et par unité de temps pour le composant r est $\frac{1}{2}\pi c^{-1}a_r^2\nu_r^2$. Par conséquent, l'intensité par unité d'intervalle de fréquence de la radiation dans le voisinage du composant r est $I_r = \frac{1}{2}\pi c^{-1}a_r^2\nu_r^2\sigma_r$. En comparant cela avec l'équation (28), nous obtenons $a_r = 2(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}$, et par conséquent,

$$\kappa_r = 2(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h.$$

L'hamiltonien pour le système entier de l'atome plus la radiation sera maintenant, conformément à la théorie classique,

$$(29) \quad F = H_P(J) + \Sigma_r(2\pi h\nu_r)N_r + 2c^{-1}\sigma_r(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r^{\frac{1}{2}}N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h,$$

où $H_P(J)$ est l'hamiltonien pour l'atome seul. En théorie quantique, nous devons faire des variables N_r et θ_r des q -nombres canoniques comme les variables J_k, w_k qui décrivent l'atome. Nous devons maintenant remplacer le $N_r^{\frac{1}{2}}\cos\theta_r/h$ dans (29) par le q -nombre réel

$$\frac{1}{2}\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + e^{-i\theta_r/h}N_r^{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{2}\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + (N_r + 1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_r/h}\}$$

de telle façon que l'hamiltonien (29) devienne

$$(30) \quad F = H_P(J) + \Sigma_r(2\pi h\nu_r)N_r + h^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}\Sigma_r(\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r\{N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h} + (N_r + 1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_r/h}\}.$$

Celui-ci est de la forme (27), avec

$$(31) \quad v_r = v_r^* = h^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}(\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r$$

et

$$v_{rs} = 0 \quad (r, s \neq 0).$$

Le point de vue ondulatoire est ainsi consistant avec le point de vue quantique et il donne des valeurs aux coefficients inconnus d'interaction v_{rs} dans la théorie quantique. Ces valeurs ne sont pas telles qu'elles permettent d'exprimer l'énergie d'interaction comme une fonction algébrique des variables canoniques. Puisque la théorie ondulatoire donne $v_{rs} = 0$ pour $r, s \neq 0$, cela semblerait montrer qu'il n'y a pas de processus directs d'éparpillement, mais cela pourrait être dû à une incomplétude de la théorie ondulatoire proposée ici.

Nous montrerons maintenant que l'hamiltonien (30) amène les expressions correctes des A et des B d'Einstein. Nous devons d'abord modifier légèrement l'analyse du §5 pour l'appliquer au cas où le

système a un grand nombre discret d'états stationnaires plutôt qu'un continuum de tels états. Au lieu de l'équation (21), nous aurons maintenant

$$i\hbar\dot{a}(\alpha') = \sum_{\alpha''} V(\alpha'\alpha'')a(\alpha'').$$

Si le système est initialement dans l'état α^0 , nous devons prendre pour valeur initiale de $a(\alpha')$ la valeur $\delta_{\alpha'\alpha^0}$, qui est maintenant correctement normalisée. Cela donne en première approximation

$$i\hbar\dot{a}(\alpha') = V(\alpha'\alpha^0) = v(\alpha'\alpha^0) = v(\alpha'\alpha^0)e^{i[W(\alpha')-W(\alpha^0)]t/\hbar},$$

qui amène à

$$i\hbar a(\alpha') = \delta_{\alpha'\alpha^0} + v(\alpha'\alpha^0) \frac{e^{i[W(\alpha')-W(\alpha^0)]t/\hbar} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/\hbar},$$

correspondant à (22). Si, comme précédemment, nous transformons les variables $W, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{u-1}$, nous obtenons (quand $\gamma' \neq \gamma^0$)

$$a(W'\gamma') = v(W', \gamma' ; W^0, \gamma^0) [1 - e^{i(W'-W^0)t/\hbar}] / (W' - W^0).$$

La probabilité du système d'être dans un état pour lequel chaque γ_k est égal à γ'_k est $\sum_{W'} |a(W'\gamma')|^2$. Si les états stationnaires sont proches les uns des autres et si le temps t n'est pas trop grand, nous pouvons remplacer cette somme par l'intégrale $(\Delta W)^{-1} \int |a(W'\gamma')|^2 dW'$, où ΔW est l'écart entre les niveaux d'énergie. En évaluant cette intégrale comme précédemment, nous obtenons pour probabilité par unité de temps d'une transition vers un état pour lequel chaque $\gamma_k = \gamma'_k$

$$(32) \quad 2\pi/\hbar \Delta W \cdot |v(W^0, \gamma' ; W^0, \gamma^0)|^2.$$

En appliquant ce résultat, nous pouvons prendre pour γ n'importe quel ensemble de variables qui sont indépendantes de l'énergie propre totale W et qui avec W définissent un état stationnaire.

Nous retournons maintenant au problème défini par l'hamiltonien (30) et considérons le processus d'absorption dans lequel l'atome saute de l'état J^0 à l'état J' avec absorption d'un photon de l'état r . Nous prenons comme variables γ' les variables J' of the de l'atome avec les variables qui définissent la direction du mouvement et l'état de polarisation du quantum absorbé, mais pas son énergie. L'élément matriciel $v(W^0, \gamma' ; W^0, \gamma^0)$ devient

$$h^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{3}{2}} (\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}} \dot{X}_r(J^0 J') N_r^0,$$

où $\dot{X}_r(J^0 J')$ est l'élément matriciel ordinaire ($J^0 J'$) de \dot{X}_r . Par conséquent, à partir de (32), la probabilité par unité de temps du processus d'absorption est

$$\frac{2\pi}{\hbar \Delta W} \cdot \frac{h\nu_r}{c^3 \sigma_r} |\dot{X}_r(J^0 J')|^2 N_r^0.$$

Pour obtenir la probabilité du processus lorsque le photon vient depuis n'importe quelle direction dans un angle solide $d\omega$, nous devons multiplier cette expression par le nombre de directions possibles pour le quantum de lumière dans l'angle solide $d\omega$, qui est $d\omega \sigma_r \Delta W / 2\pi\hbar$. Cela donne

$$d\omega \frac{\nu_r}{\hbar c^3} |\dot{X}_r(J^0 J')|^2 N_r^0 = d\omega \frac{1}{2\pi \hbar^2 c \nu_r^2} |\dot{X}_r(J^0 J')|^2 I_r$$

avec l'aide de (28). Par conséquent le coefficient de probabilité pour le processus d'absorption est $1/2\pi \hbar^2 c \nu_r^2 \cdot |\dot{X}_r(J^0 J')|^2$, conformément à la valeur habituelle du coefficient d'absorption d'Einstein en mécanique matricielle. La concordance des coefficients d'émission peut être vérifiée de la même manière.

La présente théorie, puisqu'elle rend compte de sa propre façon de l'émission spontanée, doit supposément donner l'effet de la réaction de la radiation sur le système émettant, et permettre de calculer les largeurs naturelles des raies spectrales, si l'on réussit à dépasser les difficultés mathématiques que présente la recherche d'une solution générale au problème de l'onde correspondant à l'hamiltonien (30). La théorie permet également de comprendre comment il se fait qu'il n'y ait pas de violation des lois de conservation de l'énergie quand, disons, un photo-électron est émis par un atome sous l'action d'une radiation incidente extrêmement faible. L'énergie de l'interaction entre l'atome et la radiation est un q -nombre qui ne commute pas avec les premières intégrales du mouvement de l'atome seul ou avec l'intensité de la radiation. De ce fait, on ne peut pas spécifier cette énergie par un c -nombre en même temps qu'on spécifie l'état stationnaire de l'atome et l'intensité de la radiation par des c -nombres. En particulier, on ne peut pas dire que l'énergie d'interaction tend vers zéro quand l'intensité de la radiation incidente tend vers zéro. Il y a du coup toujours une partie non spécifiable de l'énergie d'interaction qui peut fournir de l'énergie au photo-électron.

Je voudrais exprimer ma gratitude au Prof. Niels Bohr pour son intérêt pour ce travail et pour de nombreuses discussions amicales à ce propos.

Résumé

On traite le problème d'un assemblage de systèmes similaires satisfaisant les contraintes de Einstein-Bose de la mécanique statistique, qui interagit avec un autre système différent, une fonction hamiltonienne étant obtenue pour décrire le mouvement. La théorie est appliquée à l'interaction d'un assemblage de quanta lumineux et d'un atome ordinaire, et l'on montre que cela fournit les lois d'Einstein pour l'émission et l'absorption d'une radiation.

L'interaction d'un atome avec des ondes électromagnétiques est alors considérée, et il est montré que si l'on prend des énergies et des phases d'ondes qui sont des q -nombres satisfaisant les conditions propres du quantum lui-même plutôt que des c -nombres, la fonction hamiltonienne prend la même forme que celle du traitement quantique. La théorie amène à l'expression correcte des A et B d'Einstein.