Traduction d'un extrait du livre "Redécouvrons la géométrie" de Harold Scott MacDonald Coxeter, sur l'axe radical de deux cercles, page 35.

2.2. Axe radical de deux cercles

Dans l'un de ses livres[1], E. T. Bell a raconté l'anecdote suivante. Pendant son exil hors de la Bohême, la jeune princesse Elisabeth avait, un jour, abordé avec succès un problème de géométrie élémentaire en utilisant les coordonnées. Et Bell écrit : "ce problème est un bel exemple du genre qui ne se prête pas à l'emploi direct et sans nuances de la géométrie cartésienne élémentaire". La princesse avait pour maître René Descartes (auquel les coordonnées cartésiennes doivent leur nom[2]), et celui-ci déclara "qu'il n'entreprendrait pas d'achever la solution... en un mois !"

La leçon à tirer est claire : si elle est possible avec une certaine méthode, une solution peut très bien n'être pas, pour autant, la meilleure ou la plus rapide. Voici, en tout cas, un théorème dont la démonstration analytique, sans être en rien plus difficile que la démonstration synthétique habituelle, a quelques conséquences intéressantes :

Théorème 2.21. - *Le lieu géométrique des points ayant même puissance par rapport à deux cercles non concentriques est une droite perpendiculaire à la ligne des centres de ces cercles.*

Exprimé en coordonnées cartésiennes, le carré de la distance d entre deux points (x, y) et (a, b) est

$$d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

La puissance du point (x, y) par rapport au cercle dont le centre est le point (a, b) et le rayon r est donc :

$$d^2 - r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2.$$

En particulier, étant le lieu des points (x, y) de puissance nulle, le cercle lui-même a pour équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0. \qquad (2.22)$$

Mise sous la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, cette même équation exprime que le cercle est le lieu des points dont les distances au point (a, b) ont la valeur constante r.

Si, maintenant, on écrit l'équation du cercle sous la forme

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \qquad (2.23)$$

Aux éditions Jacques Gabay, 1971.
Denise Vella-Chemla, août 2023.

[1] *Men of mathematics.*

[2] Certains affirment qu'en fait c'est Pierre Fermat (1601-1665) qui inventa la géométrie analytique parce que, dans une lettre à Descartes, il en donna le principe essentiel.
Voir Pierre Fermat, *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante*, 1853, réédition Jacques Gabay, 1989.

(avec $c = a^2 + b^2 - r^2$), le premier membre de cette équation c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

exprime encore la puissance d'un point quelconque (x, y).

Un autre cercle, de même centre (a, b) mais de rayon différent, aura une équation de même forme, c étant naturellement différent ; tandis que tout cercle n'ayant pas le même centre aura une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0, \tag{2.24}$$

dans laquelle $a' \neq a$, ou $b' \neq b$, ou les deux à la fois. Pour les deux cercles non concentriques dont il est question dans le théorème 2.21, nous pouvons donc utiliser les équations (2.23) et (2.24). Ainsi, le lieu des points (x, y) ayant même puissance par rapport à ces deux cercles sera défini par l'égalité

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c'$$

qui, après simplification, s'écrit

$$(a' - a)x + (b' - b)y = 1/2(c' - c).$$

Le lieu est donc une *droite.*

Si l'on adopte un système de référence où l'axe des x est la ligne des centres, les équations des cercles se simplifient comme suit :

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2a'x + c' = 0, \tag{2.25}$$

avec $a' \neq a$, et l'équation du lieu devient

$$x = \frac{c' - c}{2(a' - a)}.$$

On a donc une droite *perpendiculaire* à l'axe des x, c'est-à-dire à la ligne des centres. Or, du fait qu'elle représente l'ensemble de tous les points d'égale puissance, cette droite peut être définie géométriquement en fonction des cercles : nous aurions donc pu la prendre comme axe des y, comme sur la figure 2.2A. Les équations de deux cercles non concentriques peuvent, ainsi, se simplifier encore et s'écrire

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0 \tag{2.26}$$

Le lieu est alors $x = 0$. Réciproquement, tout point $(0, y)$ de la droite $x = 0$ a la *même* puissance $y^2 + c$ par rapport aux deux cercles.

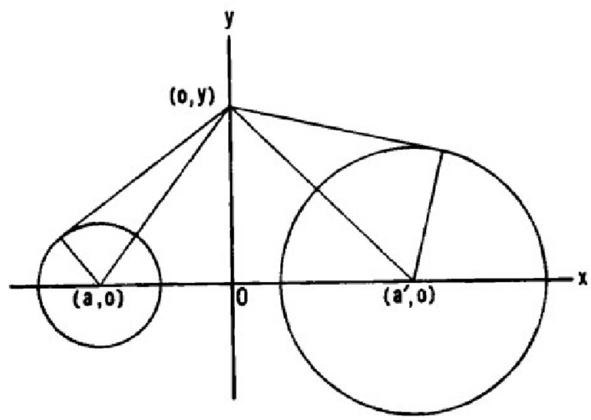

Fig. 2.2A

La remarque précédente achève la démonstration. Nous aurions pu, naturellement, abréger cette dernière en écrivant immédiatement les équations des deux cercles sous la forme (2.25) ; mais, dans ce cas, nous aurions omis le beau lemme suivant lequel, pour tout cercle exprimé sous la forme générale (2.23), *la puissance d'un point quelconque* (x, y) *est représentée par le premier membre de l'équation.*

Le lieu géométrique des points ayant même puissance par rapport à deux cercles non concentriques s'appelle *l'axe radical* de ces derniers. Dans le cas particulier où les deux cercles se coupent en deux points A et A' (fig. 2.2B), chacun de ces points a une puissance nulle par rapport aux deux cercles dont l'axe radical est alors la droite AA'. De même, lorsque deux cercles sont tangents (fig. 2.2C), leur axe radical est leur tangente commune au point de contact.

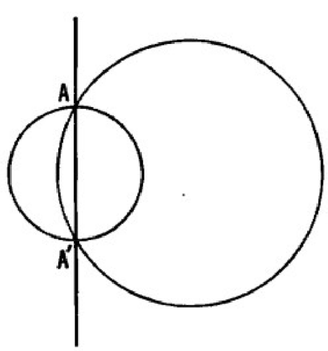

Fig. 2.2B

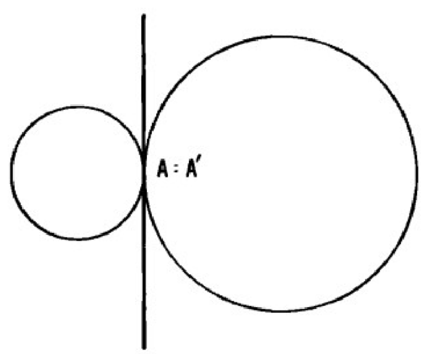

Fig. 2.2C