BIT 15 (1975), 239-243

Résultats numériques sur la conjecture de Goldbach

Jan Bohman et Carl-Erik Fröberg

< ou =

Résumé. Le nombre de décompositions de Goldbach a été calculé pour tous les nombres pairs $\geq 350\,000$ et comparé aux estimées théoriques bien connues. Les fluctuations aléatoires sont lentement décroissantes et inférieures à ± 5 pour cent à l'extrémité supérieure de l'intervalle. Le nombre de décompositions est donné explicitement pour les $2^n, n = 3(1)22$. De plus, si pour un N donné, le plus petit premier de toutes les décompositions de $2N$ est $a = a(2N)$, on a également déterminé $a_1(2N_1) < a_2(2N_2) < \ldots$ avec $N_1 < N_2 < \ldots$ tel que $n < N_k$ implique $a(2n) < a_k(2N_k)$ jusqu'à $2n = 40\,000\,000$.

Introduction.

La conjecture de Goldbach, qui stipule que tout nombre pair $2N \geq 6$ peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers impairs d'au moins une manière, a été précédemment vérifiée jusqu'à au moins $2N = 33\,000\,000$ [1], et la possibilité de trouver un échec semble être extrêmement petite. Au lieu de cela, nous étudierons le nombre de décompositions dans un intervalle raisonnablement grand comparé aux résultats théoriques obtenus d'un modèle probabiliste pour la densité des nombres premiers.

Nous mentionnerons d'abord brièvement l'existence d'une fonction génératrice.

Soit p un nombre premier et

$$f(x) = \sum_{(\text{p } 1^{\text{er}} \text{ impair})} x^p = x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + \ldots.$$

Alors

$$\left(\frac{1}{2}\right) \left[\{f(x)\}^2 + f(x^2)\right] = x^6 + x^8 + 2x^{10} + x^{12} + 2x^{14} + \ldots = \sum_{n=3}^{\infty} G(2n) x^{2n}$$

définira le nombre $G(2n)$ de décompositions de Goldbach du nombre pair $2n$. Malheureusement, cette fonction génératrice apporte peu de lumière sur l'une quelconque des propriétés de $G(2n)$.

Estimations probabilistes.

Le nombre $G(2n)$ dépend fortement de la structure du nombre $2n$. Si, par exemple, 3 est un facteur de $2n$, alors aucun des nombres $2n-5, 2n-7, 2n-11, 2n-13, \ldots$ ne peut avoir pour facteur 3, et donc il est hors de question que ce facteur intervienne dans des candidats pour les décompositions de Goldbach. D'un autre côté, si 3 n'est pas un facteur de $2n$, alors $2n-5, 2n-7, \ldots$ sera $\equiv 0, \equiv 1, \equiv 2 \pmod 3$ selon les probabilités $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, mais seuls les deux derniers cas seront candidats pour les décompositions de Goldbach puisque la première alternative représente des

Reçu le 20 avril 1975.

Référence de l'article : BIT Numerical Mathematics volume 15, pages 239–243 (1975).

Traduction et transcription en Latex, Denise Vella-Chemla, janvier 2023.

nombres divisibles par 3. Par conséquent, si d'autres facteurs de $2n$ sont si grands que leur influence peut être négligée, nous aurons environ deux fois plus de décompositions dans le premier cas que dans le second. En général, pour un facteur p de $2n$, on doit réduire le nombre de décompositions par $(p-1)/(p-2)$ pour rendre toutes les décompositions comparables. Évidemment, les nombres de la forme 2^n ou $2p$ auront peu de décompositions d'un point de vue absolu.

En 1915, Brun [2] a donné la formule asymptotique

$$G(2n) \sim 2\omega \prod_{\substack{p_r|2n \\ p_r \leq \sqrt{(2n)}}} ((p_r-1)/(p_r-2))\ n/(\ln 2n)^2$$

avec

$$\omega = \prod_{p=3}^{\infty} p(p-2)/(p-1)^2 = 0.6601618.$$

En 1942, Selmer [4] a donné une formule plus précise $G(2n) \sim H(2n)$, où

$$H(2n) = 2\omega \prod_{\substack{p_r|2n \\ p_r \leq \sqrt{(2n)}}} ((p_r-1)/(p_r-2)) \int_0^n dx/(\ln(n+x)\ln(n-x)).$$

L'intégrale devrait être interprétée au sens de Cauchy.

Dans cet article, nous rendons compte de nos études sur le quotient $G(2n)/H(2n)$ pour $6 \leq 2n \leq 350\ 000$. On construit une représentation adéquate en prenant le maximum et le minimum de 1000 valeurs couvrant un intervalle de 2000 nombres. La figure 1 a été obtenue de cette façon. Les fluctuations aléatoires décroissent lentement vers environ 15 pour cent à l'extrémité supérieure de l'intervalle.

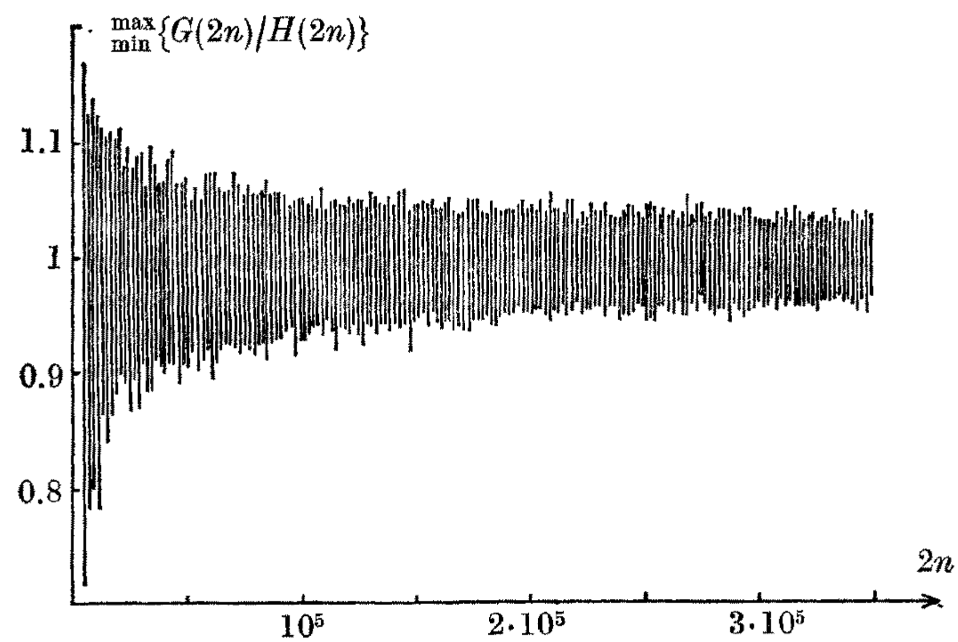

Figure 1 : Maximum et minimum du quotient $G(2n)/H(2n)$ dans des intervalles de longueur 2000.

On a également enregistré le nombre minimum absolu de décompositions dans les mêmes intervalles jusqu'à 300 000 (voir figure 2 ; cf. aussi table 1), et comme on peut s'y attendre, ces valeurs sont légèrement plus petites que les valeurs "moyennes" $H(2n)$ quand les facteurs $(p_r - 1)/(p_r - 2)$ sont négligés.

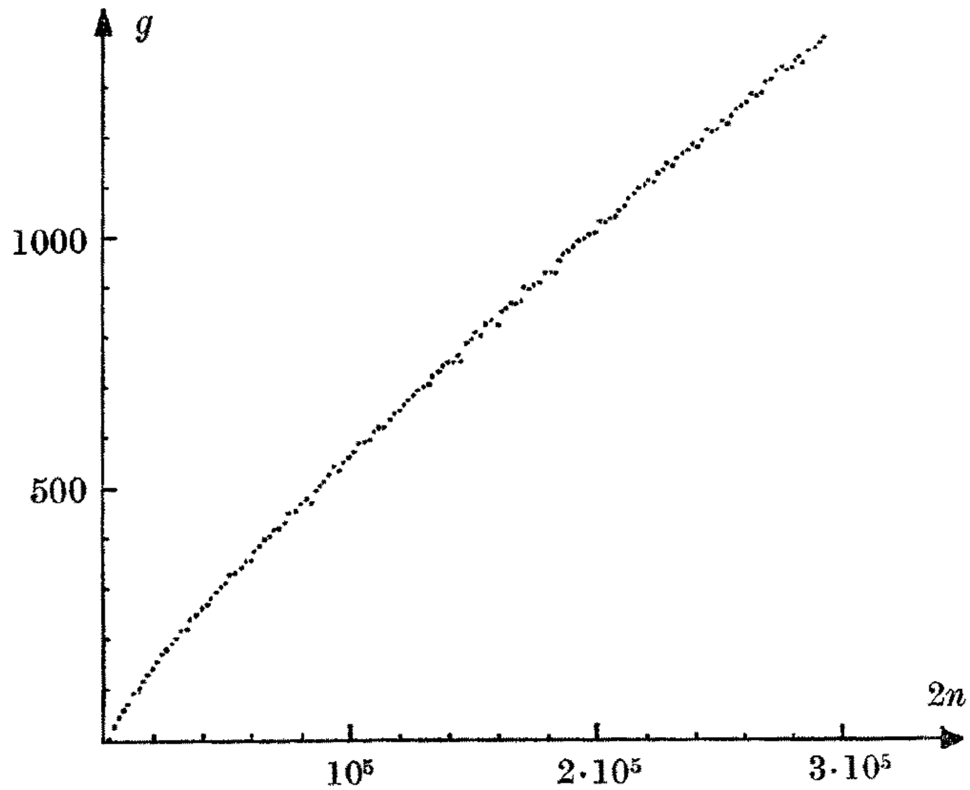

Figure 2. Le nombre minimum de décompositions de Goldbach dans des intervalles de longueur 2000. Pour $98000 < 2n \leq 100000$, ce nombre est égal à 559. Notons que des intervalles plus gros sont utilisés dans la table 1.

k	g	k	g	k	g
1	0	11	570	21	1029
2	92	12	617	22	1062
3	155	13	666	23	1109
4	218	14	706	24	1142
5	269	15	751	25	1179
6	328	16	806	26	1225
7	374	17	853	27	1265
8	421	18	896	28	1311
9	472	19	929	29	1346
10	526	20	979	30	1385

Table 1. Nombre minimum de décompositions de Goldbach g dans l'intervalle $(k-1) \cdot 10^4 < 2n \leq k \cdot 10^4$.

De plus, les valeurs $G(2^n), n = 3(1)22$, ont également été calculées, et les résultats sont fournis dans la table 2 et la figure 3.

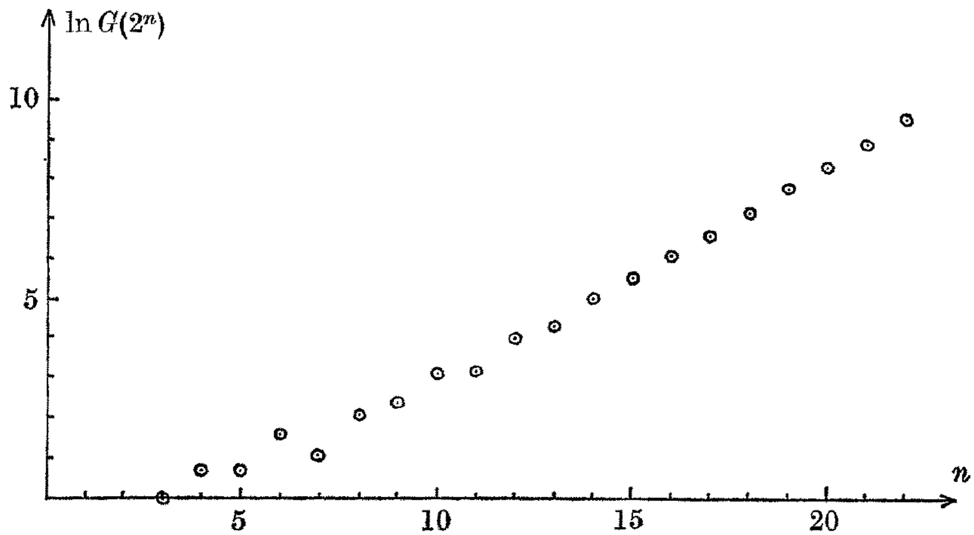

Figure 3. Nombre de décompositions de Goldbach sur une échelle logarithmique pour les puissances de 2.

n	$G(2^n)$	n	$G(2^n)$
3	1	13	76
4	2	14	151
5	2	15	244
6	5	16	435
7	3	17	749
8	8	18	1314
9	11	19	2367
10	22	20	4239
11	25	21	7471
12	53	22	13705

Table 2. Nombre de décompositions de Goldbach pour les puissances de 2.

Finalement, on a également étudié les nombres $a_k = a_k(2N_k)$ définis par la propriété que $n < N_k$ impliquerait l'existence d'une partition $2n = p + q,\ p \leq q$, avec $p < a_k$. Par exemple, tous les nombres pairs inférieurs à 98 ont au moins une décomposition avec un décomposant le plus petit ≤ 7, mais quand $2n = 98$, la “plus petite” décomposition est $19 + 79$. Le résultat est donné dans la table 3 et la figure 4.

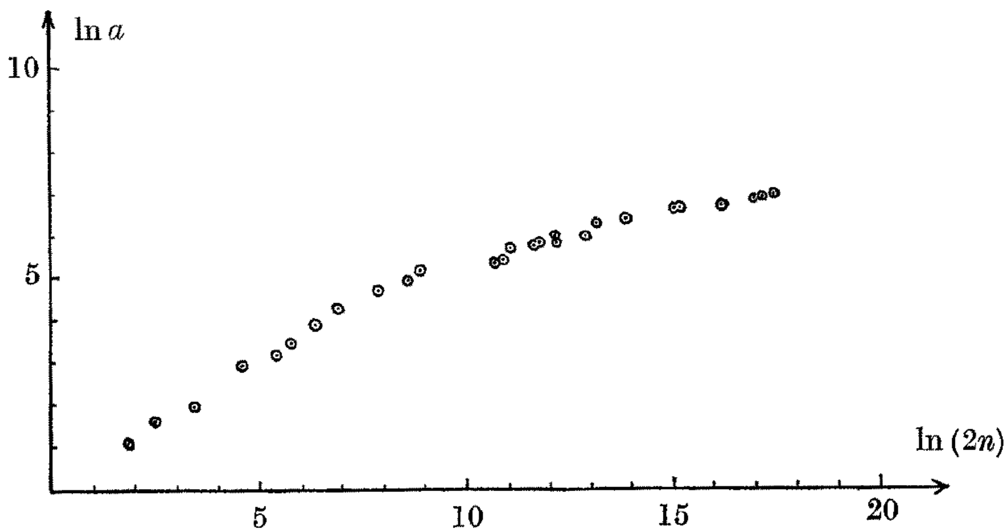

Figure 4. Si $(2n_1, a_1)$ et $(2n_2, a_2)$ définissent deux points adjacents, alors $n_1 \leq n < n_2$, implique l'existence d'une décomposition de Goldbach de $2n$ contenant un nombre premier $p \leq a_1$.

$2n$	a	$2n$	a	$2n$	a
6	3	5372	139	413572	389
12	5	7426	173	503222	523
30	7	43532	211	1077422	601
98	19	54244	233	3526958	727
220	23	63274	293	3807404	751
308	31	113672	313	10759922	829
556	47	128168	331	24106882	929
992	73	194428	359	27789878	997
2642	103	194470	383	37998938	1039

Table 3. Pour des explications, consulter la figure 4.

Pour de plus grandes valeurs de $2n$, le quotient $\ln(2n)/(\ln a)^2$ semble être approximativement constant (variant à partir de la huitième valeur entre 0.335 et 0.375).

Références

1. Mok-Kong Shen, *On Checking the Goldbach Conjecture*, BIT 4 (1964), 243-245.

2. V. Brun, *Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare*, Arch. f. Math. og Naturv., B. XXXIV, Nr. 8, 1916.

3. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some problems of "Partitio numerorum" III: On the Expression of a Number as a Sum of Primes*, Acta Math. 44, 1923.

4. Ernst S. Selmer, *Eine neue hypothetische Formel für die Anzahl der Goldbachechen Spaltungen einer geraden Zahl, und eine numerische Kontrolle*, Arch. f. Math. og Naturv., B. XLVI, Nr. 1, 1942.

Département d'informatique
Lund Université Solvegatan 14 A
S-22362 Lund, Suède