

Résumé : La propagation dans l'espace lointain change les ondes initiales en leur transformée de Fourier. Cela implique que les zéros de Riemann devraient être observés expérimentalement dans des motifs de variations engendrées par une onde initiale dont la transformée de Fourier est proportionnelle à la fonction zeta de Riemann sur la droite critique. Deux telles ondes sont examinées, engendrant la fonction de Riemann $\Xi(t)$ (motif n° 1) et la fonction $\zeta(1/2 + it)/(1/2 + it)$ (motif n° 2). Pour le motif n° 1, les lobes latéraux de la radiation sont probablement trop faibles pour permettre la détection des zéros, mais pour le motif n° 2, les lobes sont plus grands, suggérant une expérience faisable.

1. Introduction

Comme on le sait bien, la propagation d'une onde de l'espace proche vers l'espace lointain transforme un état initial en sa transformée de Fourier. Plus explicitement, considérons la paire de transformées

$$(1.1) \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) \exp(itu).$$

et une onde $\psi(x, z)$ se propageant dans le plan selon l'équation de Helmholtz, avec comme état initial

$$(1.2) \quad \psi(x, 0) = f\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

où x_0 est une longueur, spécifiant la mise à l'échelle spatiale. Alors, si le nombre d'onde ($2\pi/\text{la longueur d'onde}$) est k , l'onde en x, z peut s'écrire, exactement, comme une superposition d'ondes planes :

$$(1.3) \quad \psi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) \exp\left(i\left(t\frac{x}{x_0} + z\sqrt{k^2 - \frac{t^2}{x_0^2}}\right)\right).$$

(Le signe de la racine carrée est choisi de telle façon que les contributions $|t| > kx_0$ représentent des ondes s'évanouissant.) Dans l'espace lointain $r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$, les arguments standards de phase stationnaire donnent

$$(1.4) \quad \psi(r \sin \theta, r \cos \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x_0 \sqrt{\frac{k}{2\pi i r}} \exp(ikr) \cos \theta g(kx_0 \sin \theta),$$

et par conséquent le motif de l'intensité de la radiation

$$(1.5) \quad I(\theta) = |g(kx_0 \sin \theta)|^2 \cos^2 \theta.$$

On traitera les fonctions pour lesquelles $f(t)$ est réel, donc $g(t)^* = g(-t)$, i.e. $|g(t)| = |g(-t)|$.

Laboratoire de physique H. H. Wills, Université de Bristol, Tyndall Avenue,
Bristol BS8 ITL, Royaume-Uni.

Reçu le 8 Juin 2012, en forme finale le 28 Juin 2012.

Publié le 16 Juillet 2012.

Référence : J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 302001 (9pp).

Traduction : Denise Vella-Chemla, février 2023.

Ici, l'accent sera sur les zéros $\pm t_n$, c'est-à-dire tels que $g(\pm t_n) = 0$. Ceux-ci séparent les lobes latéraux du motif de la radiation. Les zéros adviennent dans les directions θ_n , où

$$(1.6) \quad \sin \theta_n = \pm \frac{t_n}{kx_0}.$$

Ainsi, pour un coefficient d'échelle kx_0 de l'onde initiale, les zéros qui apparaissent dans le domaine des directions physiques vers l'avant $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ sont $\pm t_1$ à $\pm t_N$, où

$$(1.7) \quad t_N \approx kx_0.$$

Plusieurs fonctions $f(u)$ sont connues dont la transformée de Fourier s'annule aux hauteurs (parties imaginaires) t_n , des zéros complexes de la fonction zeta de Riemann [1, 2]. Par conséquent, l'implémentation de telles $f(u)$ comme amplitude d'onde dans un plan initial amènera à un motif de radiation dans l'espace lointain pour laquelle l'intensité s'évanouit dans les directions (1.6) correspondant aux zéros de Riemann. Cela amène la possibilité d'une observation directe des zéros de Riemann dans un système physique, par exemple en optique, où les formes d'ondes spécifiées analytiquement peuvent être sculptées en utilisant un modulateur spatial de la lumière [3, 4]. Dans la suite, on étudiera la faisabilité de telles expériences pour les deux fonctions reliées de Riemann $f(u)$, en donnant deux motifs de radiation prédits différents.

Quatre remarques préliminaires. D'abord, on note qu'il y a une possibilité alternative pour implémenter physiquement une transformation de Fourier, comme cela a été noté par Crandall [5, 6]. Appelons $f(u)$ la dépendance spatiale de l'état initial d'un système quantique évoluant dans un potentiel d'oscillateur harmonique. Après un certain temps, correspondant à une rotation rigide de $\pi/2$ dans l'espace des phases, l'état devient $g(t)$: la position u s'est transformée en le moment t . Deuxièmement, l'existence de fonctions $f(u)$ dont la transformée de Fourier s'évanouit sur les zéros de Riemann a amené à plusieurs explorations mathématiques [7-10] de transformées de Fourier à zéros réels, motivées par l'hypothèse de Riemann [1, 2], qui énoncent que tous les t_n sont réels. Troisièmement, j'insiste sur le fait que cette relation possible avec la physique n'est pas destinée à suggérer une quelconque stratégie pour prouver ou infirmer l'hypothèse de Riemann ; en effet, il sera pratique de supposer que tous les t_n sont réels. Quatrièmement, comme l'a noté un referee, un précédent pour utiliser la radiation pour illustrer la question fondamentale est la dispersion qui en résulterait si le photon avait une masse non nulle [11].

2. Motif de radiation n° 1

La fonction de Riemann,

$$(2.1) \quad g(t) = \Xi(t) = -\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \pi^{-\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right)} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

est connue [1] pour être une fonction entière paire, réelle pour un t réel, ne s'évanouissant qu'en les zéros de Riemann complexes (les zéros triviaux, c'est-à-dire que ceux tels que $\zeta(-2n) = 0$, sont éliminés par les pôles de la fonction gamma, et le pôle $\zeta(1) = \infty$ est éliminé par le facteur $t^2 + 1/4$). En fonction des zéros, $\Xi(t)$ peut s'écrire explicitement en fonction du produit de Hadamard

$$(2.2) \quad \Xi(t) = \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{t_n^2 - t^2}{t_n^2 + \frac{1}{4}},$$

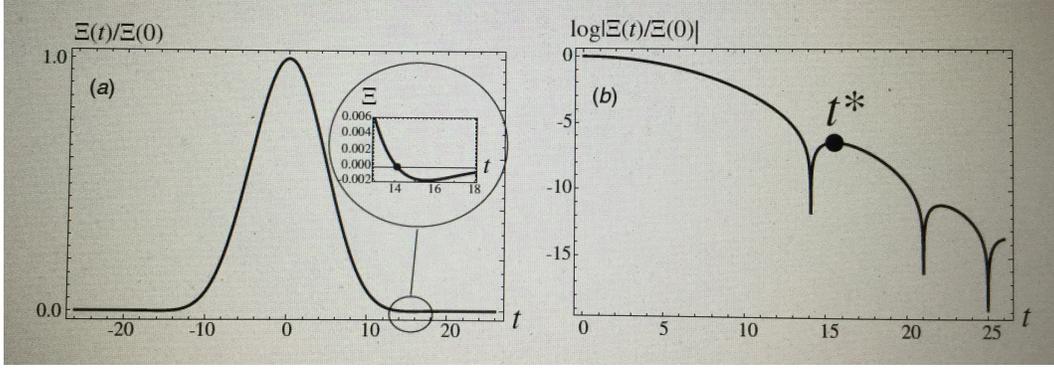


Figure 1. (a) $\Xi(t)$ (équation (2.2)) avec un encart montrant le premier zéro de Riemann ; (b) $\log|\Xi(t)|$, montrant la position t^* du maximum entre les deux premiers zéros.

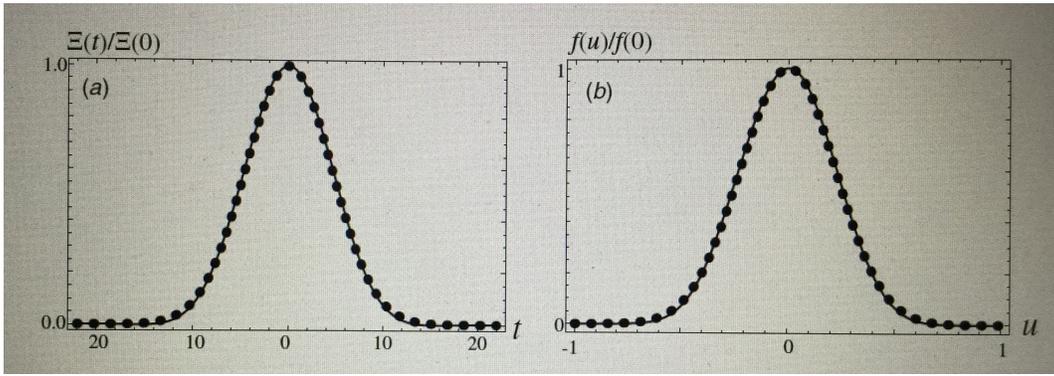


Figure 2. (a) $\Xi(t)$ et (b) $f(u)$ (équation (2.3)) (courbes pleines) comparés à des approximations gaussiennes avec les mêmes largeurs pour les moyennes quadratiques (courbes en pointillés).

dont la convergence est examinée en appendice. Comme la figure 1 l'illustre, $\Xi(t)$ décroît rapidement lorsque t croît, et prend de très petites valeurs entre les zéros.

La fonction $f(u)$, dont $\Xi(t)$ est la transformée de Fourier, est [1,6]

$$(2.3) \quad f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (4\pi^2 n^4 \exp(\frac{9}{2}u) - 6\pi n^2 \exp(\frac{5}{2}u)) \exp(-\pi n^2 \exp(2u)).$$

De façon évidente, cette fonction est réelle pour u réel, et l'application de la formule sommatoire de Poisson montre que, nonobstant une apparence naïve, la fonction est paire : $f(u) = f(-u)$.

La figure 2 (b) montre la fonction $f(u)$. Au niveau de résolution présenté, elle semble similaire à $\Xi(t)$ dans la figure 2 (a). De plus, toutes deux sont approchées de près par des gaussiennes. Une mesure de cette proximité peut être décrite en fonction des largeurs des moyennes quadratiques

$$(2.4) \quad w_u = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} du u^2 f^2(u)}{\int_0^{\infty} du f^2(u)}} = 0.1567894, \quad w_t = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} dt t^2 g^2(t)}{\int_0^{\infty} dt g^2(t)}} = 3.1949280,$$

ceci donnant le produit d'incertitude

$$(2.5) \quad w_u w_t = 0.500902.$$

Cette valeur est très proche de la valeur $1/2$ de la paire de Fourier d'incertitude minimum dans laquelle $f(u)$ et $g(t)$ seraient exactement des gaussiennes. Mais bien sûr $f(u)$ et $\Xi(t)$ ne sont pas

des gaussiennes, et c'est précisément les déviations, spécialement les zéros de $\Xi(t)$, qui présentent un intérêt ici. Ceci illustre plus avant le comportement connu comme étant extrêmement délicat du comportement analytique de la fonction zeta.

La figure 3 montre le motif de radiation correspondant à $\Xi(t)$, pour une valeur kx_0 choisie pour montrer les trois premiers zéros de Riemann. Ces zéros seraient invisibles sur une simple représentation polaire de $I(\theta)$, parce que $\Xi(t)$ décroît si rapidement que la représentation polaire serait dominée par une aiguille fine près de $\theta = 0$. Pour voir les lobes latéraux, et les zéros qui les séparent, il était nécessaire de réduire la variation de $\Xi(t)$ en montrant le graphe de la fonction $I(\theta)^{1/15}$ plutôt que celui de $I(\theta)$ elle-même. Une mesure de la décroissance rapide est donnée par l'intensité dans la direction θ^* du premier lobe latéral, correspondant au maximum de $|\Xi|$ entre les zéros t_1 et t_2 :

$$(2.6) \quad \frac{I(\theta^*)}{I(0)} = 2.6 \times 10^{-6}.$$

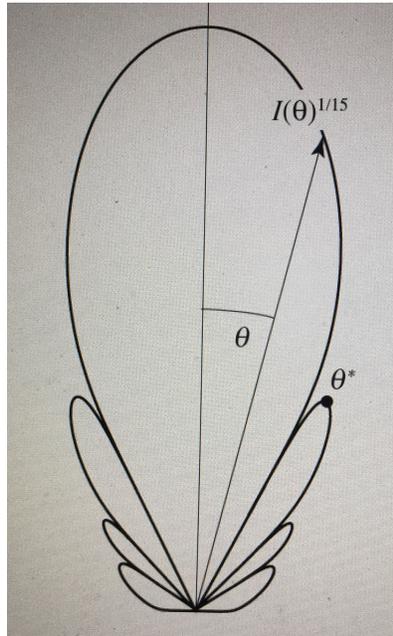


Figure 3. Motif de radiation n° 1, donné par (1.5) avec $\Xi(t)$ (équation (2.1)), pour $kx_0 = 30$, comme représentation graphique polaire de $I(\theta)^{1/15}$, montrant les trois premiers zéros de Riemann.

Ceci est petit, donc l'observation des zéros, comme envisagé ici, serait difficile : même avec un domaine dynamique suffisant pour détecter l'intensité des lobes latéraux, le bruit serait un problème. Par conséquent, on se tourne maintenant vers la seconde fonction implémentant les zéros de Riemann, pour laquelle le ratio est beaucoup plus grand.

3. Motif de radiation n° 2

C'est la fonction complexe

$$(3.1) \quad g(t) = \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\frac{1}{2} + it},$$

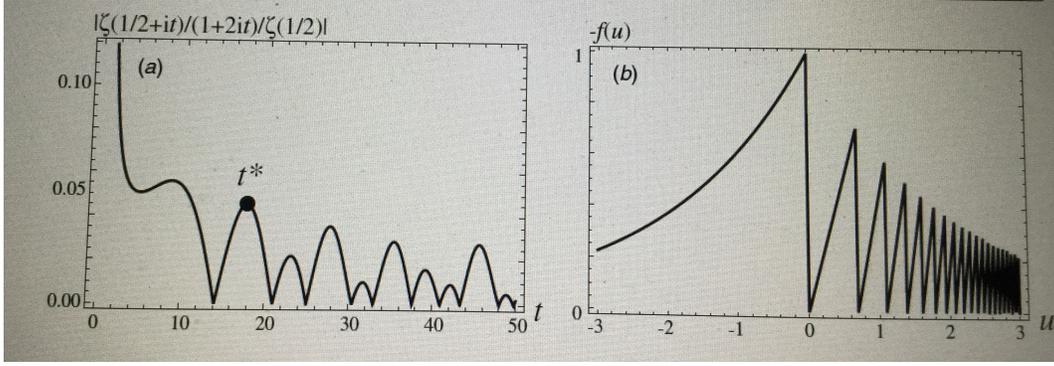


Figure 4. (a) $|\zeta(1/2 + it)/(1 + 2it)/\zeta(1/2)|$ et (b) $f(u)$ (équation (3.2)) pour la réalisation de van der Pol [12] des zéros de Riemann.

dont le module - une fonction paire de t - est montré sur la figure 4 (a). Comme on peut le voir, la fonction décroît plus lentement que $\Xi(t)$ (figure 1), et les zéros de Riemann sont davantage mis en évidence.

Cette fonction $g(t)$ est une fonction complexe avec $|g(t)|$ pair, de telle façon que la transformée de Fourier $f(u)$ est réelle mais non paire. van der Pol a montré que [12]

$$(3.2) \quad f(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u\right) \text{floor}(\exp u) - \exp\left(\frac{1}{2}u\right).$$

Cette fonction est illustrée sur la figure 4 (b). Cette représentation, surprenante au premier abord, peut être aisément confirmée en évaluant la transformée de Fourier de $f(u)$ après avoir découpé le domaine d'intégration en intervalles $\log n \leq u \leq \log(n + 1)$. Elle découle également de

$$(3.3) \quad \zeta(s) = \frac{1}{1-s} \left(-s + \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-s} \left(1 - \left(1 + \frac{s}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \right) \right),$$

qui elle-même se réduit à la série de Dirichlet familière $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ pour $\Re s > 1$ et converge - à l'intérieur de la bande critique $0 < \Re s < 1$.

La figure 5 montre le motif de radiation correspondant à celui montré dans la figure 3 pour $\Xi(t)$. Puisque les variations de l'intensité sont plus modérées, les lobes latéraux et les zéros peuvent être discernés avec une mise à l'échelle plus modeste dans la représentation polaire : $I(\theta)^{1/3}$ plutôt que $I(\theta)^{1/15}$ comme dans la figure 3. De manière correspondante, l'intensité du premier lobe latéral est beaucoup plus grand que dans (2.6) :

$$(3.4) \quad \frac{I(\theta^*)}{I(0)} = 0.00203.$$

Ceci est toujours petit, mais a une plus grande chance d'être détectable expérimentalement.

En pratique, il est impossible de créer une onde initiale sur la totalité du domaine $-\infty < x < +\infty$. Par conséquent, il est important d'estimer si la troncature inévitable de $f(u)$ gâchera la détection des zéros. Avec une coupure nette, c'est-à-dire

$$(3.5) \quad f_N(u) = f(u)\Theta(\log N - |x|)$$

(dans laquelle Θ est l'unité de saut), le motif de radiation sera déterminé non pas par $g(t)$ dans (3.1) mais par la transformation

$$(3.6) \quad g_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du f_N(u) \exp(-itu) = \frac{\zeta(\frac{1}{2} - it)}{\frac{1}{2} - it} - \Delta_N(t)$$

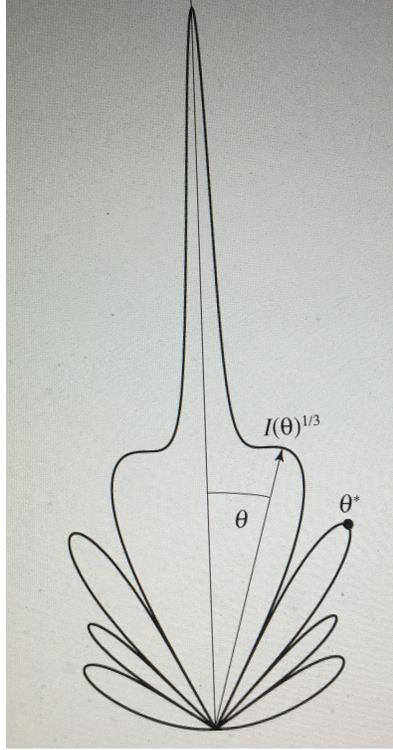


Figure 5. Motif de radiation n° 2, donné par (1.5) avec $\zeta(1/2 + it)/(1/2 + it)$ (équation (3.1)), pour $kx_0 = 30$, comme représentation graphique polaire de $I(\theta)^{1/3}$, montrant les trois premiers zéros de Riemann.

de $f_N(u)$. L'asymptote simple (faisant intervenir une moyenne sur les dents de scie pour $u \gg 1$) donne comme erreur de troncature

$$(3.7) \quad \Delta_N(t) = \int_{\log N}^{\infty} du \exp(-iut) f(u) + \int_{-\infty}^{-\log N} du \exp(-iut) f(u) \\ \times_{N \gg \frac{t}{2\pi}, N \gg 1} \approx -\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{\exp(it \log N)}{\frac{1}{2} - it} + \frac{\exp(-it \log N)}{2(\frac{1}{2} + it)} \right).$$

Comme une comparaison des courbes épaisse et pointillé de la figure 6 l'illustre, une troncature raisonnable introduit quelques ondulations dans le motif de radiation mais ne cache pas les zéros. Et la courbe fine dans la figure 6, calculée pour une troncature plus brutale, montre la précision de la queue de la courbe approximée (3.7).

Les fonctions $f(u)$ et $g(t)$ dans cette section, définies par (3.1) et (3.2), sont très éloignées d'une paire de Fourier d'incertitude minimum. La raison en est que bien que la largeur de $f(u)$, définie similairement à (2.4), soit finie, notamment

$$(3.8) \quad w_u = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} du u^2 f^2(u)}{\int_{-\infty}^{\infty} du f^2(u)}} = 1.455\dots,$$

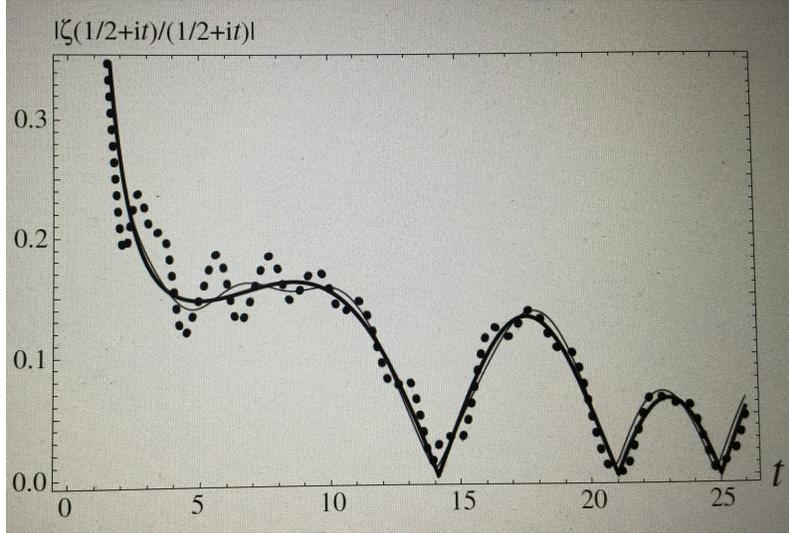


Figure 6. Fonction zeta tronquée. La courbe complète montre la fonction $g(t)$ exacte à partir de (3.1); la courbe en pointillé montre la troncature $g_N(t)$ donnée par (3.6), pour $N = 20$ (i.e. la troncature $|u| \leq \log 20 = 2.996$) ; la courbe fine montre la troncature plus la queue approximée $\Delta_N(t)$ (équation (3.7)) pour $N = 5$ (i.e. la troncature $|u| \leq \log 5 = 1.609$).

la largeur correspondante de $g(t)$, c'est-à-dire la largeur du motif de radiation, diverge comme l'intégrale de $\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2$. Néanmoins, la puissance totale dans le motif de la radiation est finie ; en fait [6]

$$(3.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt |g(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\frac{1}{2} + it} \right|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} du f(u)^2 = 2\pi(\log 2\pi - \gamma) = 7.921\dots$$

4. Remarques pour conclure

L'observation envisagée ici devrait compléter une remarquablement vieille expérimentation de van der Pol [12] : au lieu de tronquer $f(u)$ comme dans (3.5), la fonction (3.2) a été rendue périodique en la coupant autour de la périphérie d'un disque circulaire de papier (rayon = $r_0 + \varepsilon f(N\theta/2\pi)$, où $\varepsilon \ll r_0$ et $N \gg 1$ sont des constantes), que l'on faisait tourner rapidement et qu'on illuminait par un faisceau de lumière étroit, dont la transmission était détectée et on obtenait électroniquement la transformée de Fourier du signal obtenu. De cette manière, les 25 zéros de Riemann les plus bas purent être identifiés.

Si l'expérience de diffraction proposée ici était implémentée de façon optique, une simplification serait de focaliser le motif de radiation sur un plan avec une lentille. Une autre possibilité serait d'utiliser des micro-ondes ou des ondes radio, et de créer la fonction $f(u)$ avec une antenne adéquate. Avec l'une ou l'autre méthode, détecter autant de zéros que 25 serait un défi, même en utilisant le

motif n° 2 qui est le plus prometteur des deux. Mais ça vaut sûrement la peine d'essayer, même seulement pour explorer la possibilité intrigante de voir les zéros de Riemann directement, simplement en permettant à une onde convenablement sculptée de se propager.

Remerciements

Je remercie les départements de physique et de mathématiques de l'université de l'état de Portland pour leur généreuse hospitalité pendant l'écriture du premier brouillon du présent article.

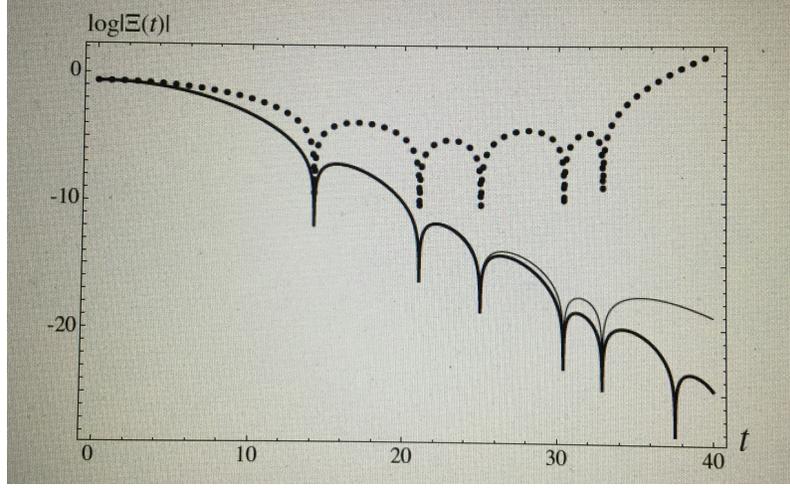


Figure A.1. Fonction de Riemann $\Xi(t)$ (courbe épaisse), comparée avec le produit de Hadamard tronqué en $N = 5$ (courbe en pointillés), et troncature en $N = 5$ avec queue de la courbe approximée (A.4) (courbe fine). Notons que les approximations échouent au-delà de $t = t_5 = 32.94$, comme attendu, parce que les zéros $n > 5$ ne sont pas inclus.

Appendice. Convergence du produit (2.2)

Si l'on souhaite représenter la première $\Xi(t)$ incluant précisément les zéros $t \leq t_N$, en utilisant le produit (2.2), il est évidemment nécessaire d'inclure au moins les N premiers facteurs. Pour estimer l'effet collectif des facteurs restant sur $\Xi(t)$ pour $t \leq t_N$, on écrit le produit ainsi

$$(A.1) \quad \Xi(t) = \frac{1}{2} \prod_{n=1}^N \frac{t_n^2 - t^2}{t_n^2 + \frac{1}{4}} P_N(t).$$

Des manipulations élémentaires donnent pour la queue de la courbe

$$(A.2) \quad \begin{aligned} P_N(t) &= \prod_{N+1}^{\infty} \frac{t_n^2 - t^2}{t_n^2 + \frac{1}{4}} = \exp \left(\sum_{N+1}^{\infty} \left(\log \left(1 - \frac{t^2}{t_n^2} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{4t_n^2} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(t^{2m} - \frac{(-1)^m}{4^m} \right) \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{t_n^{2m}} \right). \end{aligned}$$

Pour estimer cela pour $N \gg 1$, on peut remplacer les sommes sur les zéros par des intégrales sur leur densité asymptotique connue [1]. Ainsi

$$(A.3) \quad \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{t_n^{2m}} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{t_{N+1}}^{\infty} dt \frac{\log(t/2\pi)}{t^{2m}} = \frac{\log\left(e \left(\frac{t_{N+1}}{2\pi}\right)^{2m-1}\right)}{2\pi(2m-1)^2 t_{N+1}^{2m-1}}.$$

La somme sur m dans (A.2) peut maintenant être évaluée analytiquement, mais il suffit de considérer juste l'ordre dominant pour la queue, notamment

$$(A.4) \quad P_N(t) \approx \exp\left(-\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \frac{\log\left(\frac{t_N e}{2\pi}\right)}{2\pi t_N} + O\left(\frac{t^4 \log t_N}{t_N^3}\right)\right).$$

La figure A.1 montre une amélioration drastique dans le produit tronqué pour $t < t_N$ quand la queue d'ordre dominant est incluse.

Références

- [1] Edwards H. M., 1974, *Riemann's Zeta Function* (New York : Academic).
- [2] Borwein P., Choi S., Rooney B., Weirathmueller A., 2008, *The Riemann Hypothesis : A Resource for the Aficionado and Virtuoso Alike* (Berlin : Springer).
- [3] Slinger C., Cameron C., Stanley M., 2005, Computer-generated holography as a generic display technology *Computer* **38** 46-53.
- [4] Savage N., 2009, Digital spatial light modulators *Nature Photon.* **3** 170-2.
- [5] Crandall R. E., 1991, *Mathematica for the Sciences* (Redwood City, CA: Addison-Wesley).
- [6] Borwein J. M., Bradley D. M., Crandall R. E., 2000, Computational strategies for the Riemann zeta function *J. Comput. Appl. Math.* **121** 247-96.
- [7] Polya G., 1923, On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral *Messenger Math.* **52** 185-8.
- [8] Polya G., 1926, On the zeros of certain trigonometric integrals *J. Lond. Math. Soc.* **1** 98-99.
- [9] Newman C. M., 1976, Fourier transforms with only real zeros *Proc. Am. Math. Soc.* **61** 245-51.
- [10] Cardon D. A., 2004, Fourier transforms having only real zeros *Proc. Am. Math. Soc.* **133** 1349-56.
- [11] Crandall R. E., Wheeler N. A., 1984, Klein-Gordon radio and the problem of photon mass *Nuovo Cimento B* **80** 231-42.
- [12] van der Pol B., 1947, An electro-mechanical investigation of the Riemann zeta function in the critical strip *Bull. Am. Math. Soc.* **53** 976-81.