

# $H = xp$ et les zéros de Riemann

M.V. BERRY ET J.P. KEATING

## I. Introduction

L'hypothèse de Riemann [1,2] énonce que les zéros complexes de  $\zeta(s)$  sont sur la droite critique  $\text{Re } s = 1/2$ ; c'est-à-dire que les solutions non imaginaires  $E_n$  de

$$(1) \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + iE_n\right) = 0$$

sont toutes réelles. Ici, nous présenterons la preuve que les  $E_n$  sont des niveaux d'énergie, c'est-à-dire les valeurs propres d'un opérateur quantique hermitien (l'"opérateur de Riemann"), associées à l'hamiltonien classique

$$(2) \quad H_{\text{cl}}(x, p) = xp$$

avec ici  $x$  la coordonnée de position (dans un espace à une dimension) et  $p$  le moment conjugué. Ceci est franchement spéculatif, parce que de larges problèmes subsistent qui ne sont pas simples techniquement.

Nous avons été invités à écrire cet article par Connes [3] (voir également [4]) qui a conçu un opérateur hermitien dont les valeurs propres sont les zéros de Riemann qui appartiennent à la droite. Son opérateur est l'opérateur de transfert (de Perron-Frobenius) d'une transformation *classique*. De tels opérateurs classiques (les opérateurs de Liouville fois  $i$  dans le cas des flots) ressemblent formellement à des hamiltoniens quantiques, mais habituellement ils ont des spectres non discrets très compliqués et des fonctions propres singulières. Connes obtient un spectre discret en faisant agir l'opérateur sur un espace abstrait dans lequel les nombres premiers apparaissant dans le produit eulérien de  $\zeta(s)$  sont construits; l'espace est construit à partir des classes de nombres  $p$ -adiques (adèles) et de leurs unités associées (idèles). La preuve de l'hypothèse de Riemann se réduit alors à la preuve d'une certaine formule de trace classique. Sa construction a réussi à outrepasser certaines difficultés [5] associées à l'analogie quantique. Cependant, notre espoir pendant quelques temps a été qu'une caractérisation plus simple de l'opérateur de Riemann peut être trouvée par le cheminement que nous explorons ici; peut-être que ce cheminement sera équivalent à celui de Connes.

Nous commençons par lister et commenter brièvement les propriétés de l'opérateur de Riemann qui sont suggérées par l'analogie quantique (voir également [5-7]). Nous appellerons cet opérateur  $H$ .

- a.  $H$  a une contre-partie classique (la "dynamique de Riemann"), correspondant à un flot hamiltonien, ou une transformation symplectique, sur un espace des phases. Ceci est basé sur la ressemblance formelle entre l'expansion de von Mangoldt [2] pour le logarithme du produit

---

M.V.B. : H. H. Wills Laboratoire de Physique,  
Tyndall Avenue, Bristol BS8 1TL, U.K.

J.P.K. : École de mathématiques, Université Walk,  
Bristol BS8 1TW, U.K.,

et Institut de recherches fondamentales en sciences mathématiques,  
Hewlett-Packard Laboratories Bristol, Filton Road,  
Stoke Gifford, Bristol BS12 6QZ, U.K.

Référence de l'article : in *Supersymmetry and Trace Formulae : Chaos and Disorder*, Édité par Lerner et al.,  
Kluwer, Éditeurs Academic / Plenum, New York, 1999.

Traduction en français : Denise Vella-Chemla, août 2021

eulérien pour  $\zeta(1/2 + iE)$  et l'expansion semi-classique [8, 9] des traces quantiques comme sommes sur les orbites périodiques classiques, et également sur l'évidence statistique (voir la propriété b ci-dessous).

- b. La dynamique de Riemann est chaotique, c'est-à-dire instable et bornée. Ceci est basé sur l'observation que les statistiques locales des  $E_n$  sont celles des valeurs propres de matrices aléatoires [10-14], et la connexion des statistiques des matrices aléatoires avec la mécanique quantique d'un mouvement chaotique classique [6, 15-17]. Les corrélations à longue distance, entre des  $E_n$  distants, diffèrent de celles prédites par la théorie des matrices aléatoires [17, 18], et les différences sont caractéristiques des systèmes quantiques qui ont des contreparties classiques.
- c. La dynamique de Riemann n'a pas de symétrie par inversion du temps. C'est à cause du fait que les statistiques des  $E_n$  sont localement celle de l'ensemble unitaire gaussien des matrices aléatoires complexes hermitiennes [19, 20], plutôt que l'ensemble orthogonal gaussien des matrices réelles (qui correspond aux systèmes avec symétrie par inversion temporelle). Lié à cela, il y a la découverte récente [21, 22] des statistiques modifiées des zéros de petites parties imaginaires pour l'ensemble des  $L$ -fonctions de Dirichlet, associé à une structure symplectique.
- d. La dynamique de Riemann est homogènement instable. Cela est suggéré par le fait que les exposants (de Lyapounov) d'instabilité des orbites périodiques sont tous unitaires, ce qui découle du décalage exponentiel des termes dans la formule de von Mangoldt :  $q^{-m/2} = \exp(-T_{m,q}/2)$ , où  $T_{m,q}$  est la période de l'orbite définie en (3).
- e. Les orbites périodiques classiques de la dynamique de Riemann ont des périodes qui sont indépendantes de l'énergie  $E$ , et sont données par les multiples des logarithmes des nombres premiers, c'est-à-dire

$$(3) \quad T_{m,q} = m \log q \quad (m = 1, 2, \dots, q \text{ premiers})$$

et les actions associées sont

$$(4) \quad S_{m,q} = Em \log q$$

Cela découle de la forme des termes oscillants dans l'analogie avec la formule de trace semi-classique. En fonction de la dynamique symbolique, la dynamique de Riemann est particulière et semble incompréhensible : chaque orbite primitive est étiquetée par son propre symbole (le nombre premier  $q$ ) en contraste avec la situation habituelle où les orbites périodiques peuvent être représentées comme des mots faits de lettres dans un alphabet fini.

- f. Les phases de Maslov associées aux orbites sont aussi particulières : elles sont toutes égales à  $\pi$ . Cela découle [5] des signes négatifs des termes dans la formule de von Mangoldt. Le résultat semble paradoxal au vu de la relation entre ces phases et les nombres d'enroulement des variétés stables et instables associées aux orbites périodiques [23], mais ce phénomène trouve son explication dans le modèle de Connes [3].

- g. La dynamique de Riemann possède des orbites périodiques complexes (instantons) dont les périodes sont

$$(5) \quad T_{\text{complex},m} = im\pi$$

Cela est suggéré par les petites exponentielles surgissant dans les asymptotes pour les grandes valeurs de  $E$  de  $\zeta(1/2 + iE)$ , associées avec les ordres élevés du prolongement de Riemann-Siegel [24] et les ordres élevés des séries de Stirling pour les fonctions gamma représentant la partie lisse de la fonction de comptage des zéros [25].

- h. Pour l'opérateur de Riemann, la mécanique semi-classique d'ordre principal est exacte :  $\zeta(1/2 + iE)$  est un produit sur des orbites périodiques classiques, sans correction (comme dans le cas de la formule de trace de Selberg [26] pour le mouvement géodésique sur des surfaces de courbure constante négative).
- i. La dynamique de Riemann est quasiment uni-dimensionnelle. Il y a deux indications à cela. Premièrement, le nombre de zéros inférieurs à  $E$  croît comme  $E \log E$  (voir (9) ci-dessous) ; pour un système de mise à l'échelle  $d$ -dimensionnel, avec paramètre d'énergie  $\alpha(E)$  proportionnel à  $1/\hbar$ , le nombre de niveaux d'énergie croît comme  $\alpha(E)^d$ . Deuxièmement, la présence du facteur  $q^{-m/2}$  dans la formule de von Mangoldt, plutôt que le déterminant dans la formule plus générale de Gutzwiller, suggère qu'il y a une direction de dilatation unique et aucune direction de contraction.

Nous notons immédiatement que le système (2) représente la forme la plus simple d'instabilité, parce qu'elle a un point hyperbolique en  $x = 0, p = 0$ . Les équations de Hamilton, et leurs solutions, sont

$$(6) \quad \dot{x} = x, \quad \text{i.e. } x(t) = x(0) \exp(t); \quad \dot{p} = -p, \quad \text{i.e. } p(t) = p(0) \exp(-t)$$

Ainsi, l'évolution classique est simplement une dilatation en  $x$  (c'est-à-dire une multiplication) et la contraction en  $p$ , et l'exposant d'étirement est l'unité, de telle façon que l'instabilité est en effet homogène comme nécessité. De plus,  $xp$  ne possède pas de symétrie par inversion temporelle, parce qu'il n'est pas invariant selon la transformation  $p \rightarrow -p$  : plus fondamentalement, le renversement de vitesse  $\dot{x}$  pour  $x$  fixé n'amène pas à retracer l'orbite, pour la simple raison que  $\dot{x}$  est lié à  $x$  et par conséquent ne peut être inversé indépendamment. De plus, la dynamique engendrée par  $xp$  est exacte semi-classiquement.

## 2. Comptage de niveau semi-classique

Pour n'importe quel hamiltonien classiquement borné  $H_{\text{cl}}(x, p)$  en une dimension, le nombre de niveaux quantiques d'énergie moindre que  $E$ , la fonction de comptage est

$$(7) \quad N(E) = A(E)/h + \dots$$

où  $\dots$  dénote les termes d'ordre plus élevé selon la constante de Planck  $\hbar = h/2\pi$  et  $A(E)$  est l'aire de l'espace des phases sous le contour  $H_{\text{cl}}(x, p) = E$ . Avec (1), il y a le problème immédiat que le mouvement classique n'est pas borné, de telle façon que  $A$  est infini. Par conséquent, le système doit être régularisé. La régularisation la plus simple consiste à tronquer  $x$  et  $p$  en étendant la cellule de Planck avec les côtés  $l_x, l_p$  et d'aire  $h = l_x l_p$  comme dans la figure 1, de telle façon que  $A$  devient l'aire finie indiquée, qui dépend de  $\hbar$ . Cela rend le système de mécanique quantique quasi-

ment uni-dimensionnel. Nous ne pouvons pas justifier la procédure de régularisation, mais notons l'analogie entre cette régularisation de l'espace des phases et le fait que le billard hyperbolique en deux dimensions est classiquement non borné mais qu'il a un spectre discret [27-29]. Ainsi

$$(8) \quad N(E) = \frac{1}{h} \left[ E \int_{l_x}^{E/l_p} \frac{dx}{x} - l_p \left( \frac{E}{l_p} - l_x \right) \right] + \dots$$

$$= \frac{E}{h} \left( \log \left( \frac{E}{h} \right) - 1 \right) + 1 + \dots$$

Le terme constant (sous-dominant) devrait être modifié par la phase de Maslov. Pour deviner cela, on note que pour un contour de l'espace des phases fermé qui tourne de  $-2\pi$ , le terme supplémentaire dans la fonction de comptage est  $+1/2$  (cf. l'oscillateur harmonique avec la fréquence  $\omega$ , pour laquelle  $N(E) = \text{Int}(E/\hbar\omega + 1/2)$ ). Pour (1), le tour est  $+\pi/2$ , et ainsi le terme supplémentaire devrait être  $-1/8$ . En choisissant les unités de telle façon que  $\hbar = 1$ , (ce qui équivaut à remplacer  $E$  par  $\hbar E$ ), nous obtenons maintenant

$$(9) \quad N(E) = \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + \frac{7}{8} + \dots$$

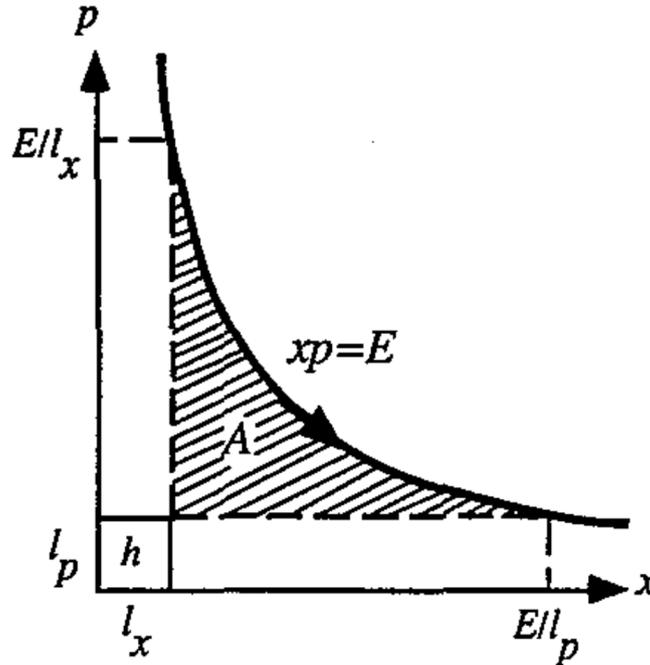


FIGURE 1 : espace des phases pour  $H_{cl} = xp$ , avec cutoffs  $l_x$  et  $l_p$  pour régularisation semi-classique.

Ceci est précisément la forme asymptotique de la fonction de comptage lissée pour les zéros de Riemann, notamment

$$(10) \quad N_{sm}(E) = \theta(E)/\pi + 1$$

où

$$(11) \quad \theta(E) = -\frac{E}{2} \log \pi + \text{Im} \log \Gamma \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2}iE \right)$$

corrigé en les termes qui ne s'évanouissent pas lorsque  $E \rightarrow \infty$ . Cela n'est vraisemblablement pas une coïncidence.

### 3. Fonctions propres de configuration et moment

L'opérateur hermitien le plus simple formellement correspondant à (1) est

$$(12) \quad H = \frac{1}{2}(xp + px) = -i\hbar \left( x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right)$$

Les fonctions propres formelles, satisfaisant

$$(13) \quad H\Psi_E(x) = E\Psi_E(x)$$

sont

$$(14) \quad \Psi_E(x) = \frac{A}{x^{1/2-iE/\hbar}}$$

Notons l'apparence de la puissance  $x^{-s}$  apparaissant dans la série de Dirichlet pour  $\zeta(s)$  (comme entier $^{-s}$ ) et dans le produit eulérien (comme premier $^{-s}$ ).

La fonction propre du moment correspondant est

$$(15) \quad \phi_E(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_E(x) \exp(-ipx/\hbar)$$

Pour évaluer cela, nous devons choisir un prolongement de  $\Psi_E(x)$  à travers la singularité en  $x = 0$ . Le choix le plus simple est que les fonctions propres soient paires. Alors

$$(16) \quad \begin{aligned} \phi_E(p) &= \frac{A}{|p|^{1/2+iE/\hbar} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{|u|^{1/2-iE/\hbar}} \exp(-iu) \\ &= \frac{A}{|p|^{1/2+iE/\hbar}} \left( \frac{\hbar}{\pi} \right)^{iE/\hbar} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{iE}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{iE}{2\hbar}\right)} \end{aligned}$$

où les formules de réflexion et de duplication pour la fonction gamma ont été utilisées. En notant la similarité avec (11), et en écrivant  $x$  et  $p$  en fonction des côtés de la cellule de Planck, on trouve

$$(17) \quad \begin{aligned} \Psi_E(x) &= \frac{\exp\{i\theta(E/\hbar)\}}{\sqrt{l_x} |x/l_x|^{1/2+iE/\hbar}} \\ \phi_E(p) &= \frac{\exp\{i\theta(E/\hbar)\}}{\sqrt{l_p} |p/l_p|^{1/2+iE/\hbar}} = \sqrt{\frac{l_x}{l_p}} [\Psi_E(pl_x/l_p)]^* \end{aligned}$$

Désormais posons  $l_x = l_p = \sqrt{2\pi}$ , i.e.  $\hbar = 1$ .

La signification de cette symétrie est que les fonctions propres de position et de moment sont l'inverse temporel l'une de l'autre (cf. figure 1) : ainsi, nous avons une interprétation physique de la fonction  $\theta(E)$  au cœur de l'équation fonctionnelle pour  $\zeta(s)$  [30], qui énonce que la fonction

$$(18) \quad Z(E) = \exp\{i\theta(E)\} \zeta(1/2 + iE)$$

est paire, et de laquelle il découle que  $Z(E)$  est réelle quand  $E$  est réel.

Si l'hamiltonien n'avait pas été symétrisé pour le rendre formellement hermitien, nous n'aurions pas obtenu les résultats (14) et (17), contenant la même combinaison  $1/2 + iE$  que celle qui advient dans  $\zeta(s)$  sur la droite critique.

L'équation (17) est un cas particulier d'une relation plus générale entre les fonctions propres de position et de moment, obtenue en autorisant les multiplicandes  $A$  dans (14) à être différents pour les  $x$  positifs et négatifs. La relation est

$$(19) \quad \Psi_E(x) = \frac{\exp\{i\theta(E)\}}{|x/2\pi|^{1/2+iE}} [A_+\Theta(x) + A_-\Theta(-x)]$$

$$\phi_E(p) = \frac{\exp\{i\theta(E)\}}{|p/2\pi|^{1/2+iE}} [B_+\Theta(x) + B_-\Theta(-x)]$$

où  $\Theta$  dénote la fonction en escalier de un en un, et les multiplicandes  $x$  et  $p$  sont reliés par

$$(20a) \quad \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}$$

où  $M$  est la matrice unitaire

$$(20b) \quad M = \frac{(\exp(E\pi) - i)}{2\cosh(E\pi)} \begin{pmatrix} 1 & i\exp(-E\pi) \\ i\exp(-E\pi) & 1 \end{pmatrix}$$

Le fait que  $M$  soit unitaire implique

$$(21) \quad |A_+|^2 + |A_-|^2 = |B_+|^2 + |B_-|^2$$

- une relation qui peut être interprétée en fonction des flots de l'espace des phases : le flot courant total  $x$  sortant de l'origine est égal au flot courant total  $p$  entrant dans l'origine (figure 2a). Ces flots  $J_x$  et  $J_p$  sont les valeurs attendues des opérateurs locaux de vitesse :

$$(22a) \quad J_x(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \Psi^*(x') \left[ \delta(x-x') \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \delta(x-x') \right] \Psi(x')$$

$$= x |\Psi(x)|^2 = 2\pi [ |A_+|^2 \Theta(x) - |A_-|^2 \Theta(x) ]$$

et similairement

$$(22b) \quad J_p(p) = 2\pi [ - |B_+|^2 \Theta(p) + |B_-|^2 \Theta(p) ]$$

Bien sûr, l'hamiltonien  $xp$  est simplement une forme canoniquement tournée de l'oscillateur harmonique tourné vers le haut  $p^2 - x^2$ , qui est en retour une version complexifiée de l'oscillateur harmonique habituel  $p^2 + x^2$ . Ces connexions ont été notées précédemment. Nonnemacher et Voros [1] calculent la fonction de Wigner correspondant à  $xp$ , dans une étude des états propres proches des points hyperboliques. Bhaduri et al [32] et Khare [33] montrent que la densité des états de diffusion du second ordre  $p^2 - x^2$  ressemble à  $d\theta(E)/dE$  (la différence est une constante) : Armitage [34] étudie les combinaisons du quatrième ordre  $(p^2 \pm x^2)^2$ ; et Okubo [35] étudie l'hamiltonien en deux dimensions  $p_x^2 - x^2 - p_y^2 + y^2$ . L'opérateur du premier ordre  $xp$  est le représentant le plus simple de cette classe, avec les monômes (14) évitant les complications des fonctions propres du cylindre parabolique de  $p^2 - x^2$ . En effet, il est possible de fournir une dérivation très simple de la transmission et de la réflexion à partir du potentiel  $-x^2$ , en utilisant une transformation canonique quantique des états (14) avec les connexions appropriées à travers la singularité en  $x = 0$ .

## 4. Connexions $x$ et $p$

Il serait souhaitable de remplacer la régularisation semi-classique de  $xp$  dans la (section 2) par une condition quantique de borne qui engendrerait un spectre discret de façon naturelle. Nous ne savons pas comment réaliser cela, mais pouvons fournir quelques remarques.

C'est comme si  $x$  et  $-x$  devaient être identifiées, et également  $p$  et  $-p$ , comme dans (17). Cela est suggéré en considérant les orbites périodiques complexes de  $xp$ . Avec un temps imaginaire, les orbites (6) sont périodiques (comme dans un oscillateur harmonique ordinaire, plutôt qu'inversé), mais les périodes sont fausses :  $2i\pi m$ , plutôt que  $i\pi m$  comme requis par la propriété g de la section 1. Notons cependant qu'après des durées multiples impaires du temps  $i\pi$ ,  $x$  évolue en  $-x$  et  $p$  en  $-p$ , de telle façon que l'identification de  $\pm x$  et  $\pm p$ , comme cela est montré dans la figure 2, produit les périodes complexes requises.

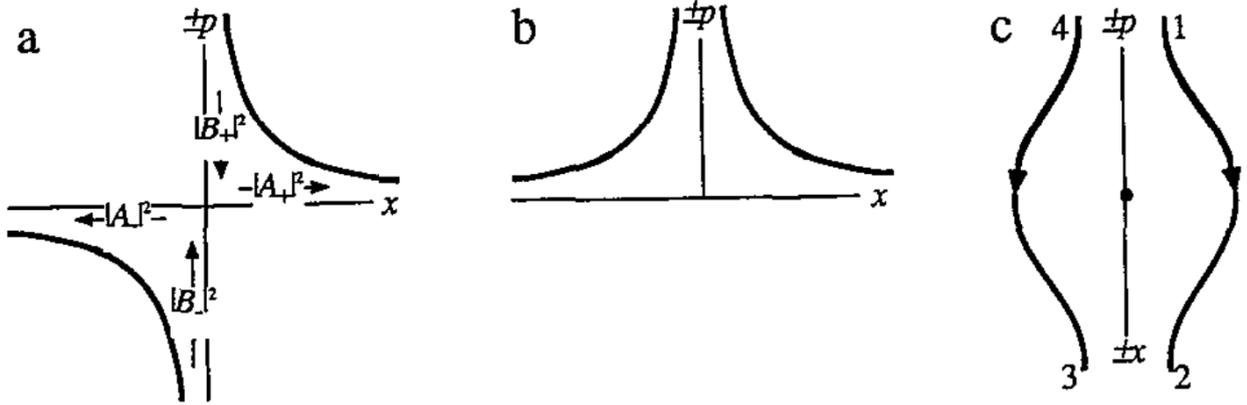


FIGURE 2 : (a) espace des phases pour  $H_{cl} = xp$ , montrant les contours d'énergie positive ;  
(b) avec  $p$  et  $-p$  identifiées ;  
(c) avec  $x$  et  $-x$  identifiées.

Même après ces identifications, le système reste ouvert. Les manières de le fermer, et ainsi de forcer le spectre à être discret, sont suggérées par les *symétries* de  $xp$ . En les utilisant, nous essaierons d'incorporer le fait que les états propres d'un opérateur hermitien avec symétrie peuvent être écrits comme des superpositions des solutions de l'équation propre sur lequel on agit par des opérations dans le groupe de symétrie, avec chaque solution dans la superposition multipliée par le caractère de groupe approprié.

Une symétrie évidente de (2) est que  $xp$  est invariant par *dilatations* :

$$(23) \quad x \rightarrow Kx, \quad p \rightarrow p/K$$

À partir de (6),  $K$  correspond à l'évolution après une durée  $\log K$ . Cela implique que l'opérateur (11), correspondant à  $xp$ , engendre des dilatations, de la même façon que l'opérateur de moment engendre des translations ; la séquence suivante de transformations rend cela évident :

$$(24) \quad \begin{aligned} f(Kx) &= f(\exp\{\log K + \log x\}) = \exp\left\{(\log K) \frac{d}{d \log x}\right\} f(x) \\ &= \exp\left\{(\log K) x \frac{d}{dx}\right\} f(x) = K^{x \frac{d}{dx}} f(x) = \frac{1}{K^{1/2 - iE}} f(x) \end{aligned}$$

On est tenté de choisir les dilatations entières  $K = m$ , correspondant aux temps d'évolution  $\log m$ , et les caractères unité, et d'écrire

$$(25) \quad \Psi_E(x) \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_E(mx) = \frac{\text{constant}}{|x|^{1/2 - iE}} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1/2 - iE}} = \frac{\text{constant}}{|x|^{1/2 - iE}} \zeta\left(\frac{1}{2} - iE\right)$$

La nécessité que cela doive s'annuler serait, si on l'interprète comme une condition propre, de faire des zéros de Riemann  $E_n$  des valeurs propres. Pourtant, nous ne voyons aucune raison d'imposer une telle contrainte, et de plus, l'ensemble des dilatations  $K = m$  ne forme pas un groupe (les multiplications inverses  $1/m$  ne sont pas présentes). Et même pire encore, en faisant que  $E = E_n$  dans (25), on détruit la "fonction propre" en la faisant s'évanouir pour tout  $x$ .

Une autre possibilité, très liée aux idées de Connes [3], est d'utiliser non pas tous les entiers mais le groupe des entiers selon la multiplication (mod  $k$ ). Cela aurait deux avantages. D'abord, le groupe ne fait intervenir que des dilatations entières et non pas des fractionnaires. Deuxièmement, cela ouvre la possibilité que les caractères du groupe [36] puissent apparaître comme multiplicandes dans la série de Dirichlet pour  $\zeta$ , amenant ainsi les zéros des différentes  $L$ -fonctions de Dirichlet (qui sont toutes conjecturées comme ayant leurs zéros sur la droite  $\text{Re } s = 1/2$ ) comme les valeurs propres des différentes extensions auto-adjointes de  $xp$ .

Une autre manière de fermer le système  $xp$  serait de relier les positions asymptotiques aux moments asymptotiques. Alors le flot sortant en  $x = \pm\infty$  serait réinjecté en  $p = \pm\infty$ . Nous envisageons deux telles connexions. En se référant à la figure 2c, nous pourrions relier 1 à 2 et 3 à 4, réservant ainsi la séparation des quadrants originaux (opposés dans la figure 2a) et produisant un espace des phases à topologie cylindrique; ou bien nous pouvons relier 1 à 3 et 2 à 4, connectant ainsi les quadrants (comme le fait la matrice  $M$  dans (20)) et produisant un espace des phases à topologie de Möbius.

Un façon de réaliser cette connexion est suggérée par le fait que les dilatations  $K$  selon lesquelles  $xp$  est invariant ne nécessitent pas d'être constantes mais peuvent être n'importe quelle fonction de  $xp$ . Le choix  $K = h/(xp)$  produit la transformation canonique

$$(26) \quad x \rightarrow x_1 = \frac{h}{p}, \quad p \rightarrow p_1 = \frac{xp^2}{h}$$

À cause de la  $h$ -dépendance, nous appelons ceci *échange quantique* (l'échange canonique le plus simple  $x \rightarrow p, p \rightarrow -x$  ne laisse pas  $xp$  invariant). Selon l'échange quantique, les hyperboles  $xp = E$  sont bien sûr des courbes invariantes;  $E = h$  est une courbe de points fixes, avec les points sur les courbes  $E < h$  étant envoyés sur des  $x$  croissants, et les points sur les courbes  $E > h$  étant envoyés sur des  $x$  décroissant. Pour voir la transformation quantique correspondant aux états quantiques, nous représentons ceux-ci dans l'espace de Hilbert par des kets  $|\Psi\rangle$ , et nous employons les notations

$$(27) \quad \begin{aligned} \langle x|\Psi\rangle &\equiv \Psi(x), & \langle p|\Psi\rangle &\equiv \phi(p) \\ \langle x_1|\Psi\rangle &\equiv \Psi_1(x_1), & \langle p_1|\Psi\rangle &\equiv \phi_1(p_1) \end{aligned}$$

Alors l'implémentation quantique de l'échange est

$$(28) \quad \Psi_1(x_1) = \frac{\sqrt{h}}{|x_1|} \phi\left(\frac{h}{|x_1|}\right)$$

(de façon évidente, cela préserverait la normalisation de l'état).

La superposition des états reliés à l'opération d'échange donne, après utilisation de (17)

$$(29) \quad \Psi_E(x) \rightarrow \Psi_E(x) + \frac{\sqrt{h}}{x} \phi_E\left(\frac{h}{x}\right) = \frac{2\cos\{\theta(E)\}}{|x/\sqrt{h}|^{1/2-iE}}$$

Si nous pouvions démontrer que cela s'évanouit, la "condition de quantification" résultante s'évanouirait pour le premier terme de la somme principale de la formule de Riemann-Siegel [2]. Cela donnerait des zéros avec la densité correcte, et il est tentant de regarder cela comme provenant

d'un opérateur hamiltonien, et de chercher à engendrer le véritable opérateur de Riemann à partir d'une série de corrections.

Pourtant, cet espoir ne peut vraisemblablement être réalisé, parce que (29) possède des zéros complexes et ne peut par conséquent être associé naïvement à un opérateur hermitien. Pour démontrer l'existence de ces zéros en dehors de la droite critique, nous écrivons (29) sous la forme suivante, qui découle de (11) :

$$(30) \quad g(s) = f(s) + f(1-s) = 0, \quad \text{where } f(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}$$

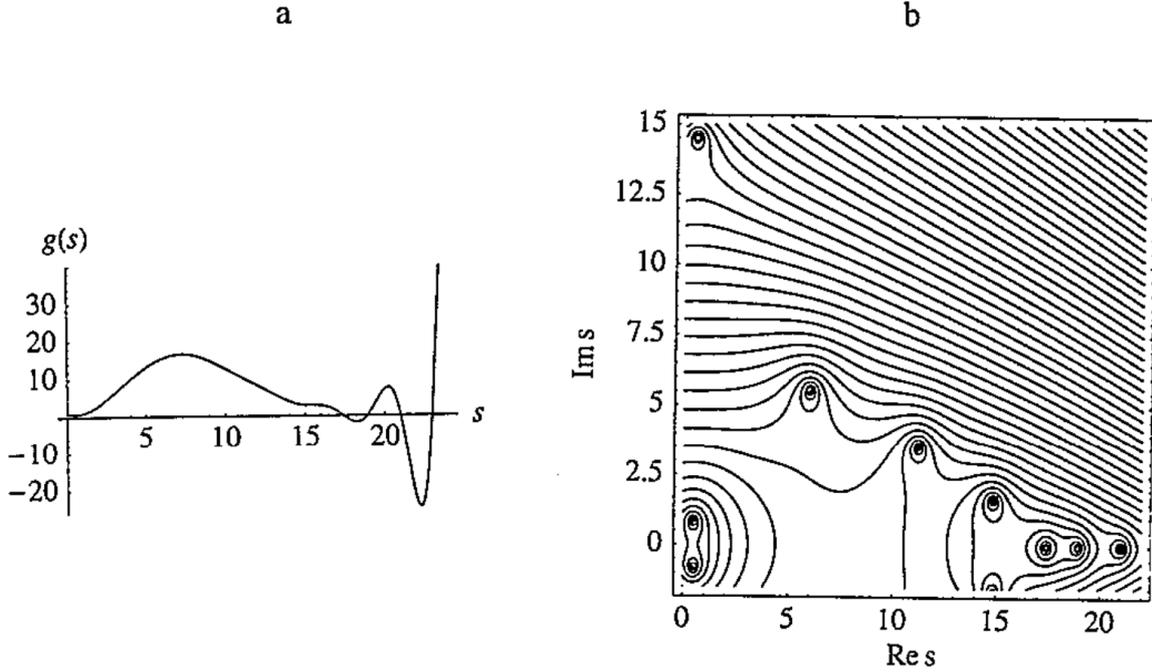


FIGURE 3 : La fonction  $g(s)$ , dont les zéros sont les mêmes que le premier terme de la somme principale de Riemann-Siegel,  
(a) sur l'axe réel  $s$ ,  
(b) contours de  $|g(s)|$  montrant les zéros enfermés par les boucles.

$$(31) \quad s = 2m + 1 + \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi m}} \left( \frac{\pi e}{m} \right)^{2m}, \quad (m = 8, 9, \dots)$$

Quelques unes des premières sont illustrées sur la figure 3a. Il y a également au moins trois zéros, montrés dans la figure 3b, entre l'axe réel et la droite critique. Sont également visibles dans la figure 3b les zéros de (29) qui sont sur la droite mais ne correspondent pas à des zéros de Riemann ; ils sont proches de  $s = 1/2 + 0.82i$ . Des arguments similaires établissent l'existence de zéros en dehors de la droite quand davantage de termes de la somme principale de Riemann Siegel sont ajoutés à (29). Il s'ensuit de cela que l'évanouissement de (29) n'est pas une condition limite correspondant à un opérateur hermitien. La combinaison des deux symétries - la dilatation entière et l'échange quantique - suggère la "condition limite"

$$(32) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_E(mx) + \frac{\sqrt{h}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_E(mh/x) = \frac{2}{|x/\sqrt{h}|^{1/2-iE}} Z(E) = 0$$

*Note de la traductrice : La somme sur  $k$  doit avoir un  $k$  à la place du  $m$  peut-être.*

En utilisant (24), cela peut être mis dans la forme intrigante (avec des opérateurs temporairement notés par des carats pour des raisons de clarté)

$$(33) \quad \langle x | \hat{x}^{\frac{1}{2}} \zeta \left( \frac{1}{2} - i\widehat{H} \right) | \Psi_E \rangle + \langle p | \hat{p}^{\frac{1}{2}} \zeta \left( \frac{1}{2} + i\widehat{H} \right) | \Psi_E \rangle = 0 \quad (xp = h)$$

Ces conditions engendrent les zéros de Riemann, mais nous ne voyons pas de moyen d'interpréter ces zéros géométriquement (avec un signe -, (33) serait une identité).

## 5. La fonction de Gauss comme une condition limite ?

Les relations (25) et (32) sont multiplicatives : elles font intervenir les fonctions propres formelles de  $xp$  aux multiples de n'importe quel  $x$  donné et le moment associé  $h/x$ . Une relation différente, combinant la multiplication avec l'addition, relie les valeurs de  $x$  liées par l'application de Gauss qui engendre des fractions continues. Cela fait intervenir l'opérateur de transfert généralisé [37], et la condition nécessaire que cet opérateur ait l'unité pour valeur propre [38]. La condition propre correspondant à cette application est

$$(34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} f_s \left( \frac{1}{n+x} \right) = f_s(x)$$

Cette fonction a été introduite [38] comme une application quantique fournissant les valeurs propres discrètes associées au domaine modulaire. L'exposant naturel est alors  $s = 1 + iE$ , avec  $E$  réel, de telle façon que les facteurs dans la somme soient des racines carrées complexifiées "semi-classiques" des jacobiens dans l'opérateur de transfert "classique" correspondant, qui devrait avoir  $s = 2$ . Pourtant, les zéros de Riemann découlent de l'association différente  $s = 1/2 + iE$ , avec  $E$  réel. Ceci est semi-classiquement mystérieux parce que les facteurs dans (34) correspondent maintenant aux puissances 1/4 des jacobiens classiques. L'argument, qui nous a été expliqué par Bogomolny (dans une communication personnelle) est le suivant

Définissons

$$(35) \quad h_s(x) = f_s(x-1)$$

et cherchons une fonction propre formelle de (34) de la forme

$$(36) \quad h_s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(mx+k)^s}$$

où  $s = 1/2 + iE$ . La condition (34) devient

$$(37) \quad \begin{aligned} h_s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x-1)^s} h_s \left( \frac{n+x}{n+x-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[x(m+k) + n(m+k) - k]^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m(x+n)]^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{[xl + nl - k]^s} - \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s} \\ &= h_s(x) - \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s} \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle, après avoir noté que les sommes sur  $n$  et  $k$  peuvent être confondues, en une seule somme sur la variable  $nl - k$ . De façon évidente, la condition est satisfaite à chaque

fois que  $1/2 + iE$  est un zéro de Riemann.

On peut voir que les fonctions propres disparaissent aux zéros pairs de Riemann sans la condition (34), parce que la sommation dans (36) peut être effectuée sur les multiples de paires de nombres  $(m, k)$  premiers entre eux et  $\zeta(s)$  extraite comme un facteur :

$$(38) \quad h_s(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{(m,k)=1} \frac{1}{[l(mx+k)]^s}$$

$$= \zeta(s) \sum_{(m,k)=1} \frac{1}{(mx+k)^s}$$

Si ceci était une objection valide, la solution (36) serait vide. Mais ceci n'est pas valide, parce que (36) est une expression formelle qui ne converge pas quand  $E$  est réel. Elle peut être prolongée analytiquement sur la droite critique, par exemple par

$$(39) \quad h_s(x) = \frac{1}{\Gamma(s) [\exp(2\pi is) - 1]} \int_C dt \frac{t^{s-1}}{[\exp(t) - 1][\exp(xt) - 1]}$$

où  $C$  est une boucle commençant et finissant en  $t = +\infty$ , encerclant positivement l'origine et n'encerclant positivement aucun autre pôle. L'intégrale, quand on l'évalue numériquement, ne s'évanouit pas aux zéros de Riemann (figure 4).

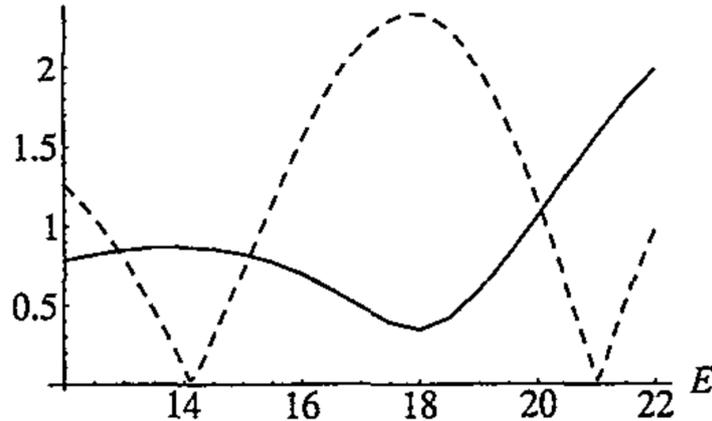


FIGURE 4 : Valeurs absolues de  $\zeta(s)$  (courbe en pointillés) et fonction propre de l'application de Gauss  $h_s(0.5)$  (calculée à partir de l'intégrale (35)) (courbe en trait plein) sur la droite critique  $s = 1/2 + iE$ .

Maintenant,  $h_s(x)$  dans (36) peut être vue comme la somme des fonctions propres (14) de  $xp$ , évaluée aux positions  $x + k/m$  qui diffèrent par des nombres rationnels. Donc la condition (34) peut être interprétée comme une condition limite, reliant la fonction propre à chacune de telles positions à ses pré-images selon l'application de Gauss. Nous ne voyons pas comment poursuivre cette suggestion.

## 6. Remarques pour conclure

Nous avons présenté plusieurs connexions alléchantes entre  $xp$  et  $\zeta(s)$ . Pourtant, il est clair qu'il faudra davantage pour transformer nos soupçons et intuitions en une construction satisfaisante et non ambiguë de l'opérateur de Riemann. Il y a deux problèmes non résolus principaux.

D'abord, l'espace sur lequel  $xp$  agit n'est pas connu. En quelque sorte, le plan doit être cousu dans une région qui fait le lien dynamique, au moins quantitativement. Nous avons supposé spéculativement que cela pourrait impliquer de connecter  $x$  et  $p$ , ou de relier les multiples de  $x$  ou les translations rationnelles de  $x$  (pour voir combien ceci peut être compliqué, comparer l'espace obtenu en identifiant  $x$  avec  $nx$  pour le réel  $x$  et tous les entiers  $n$  avec le cercle familier obtenu en identifiant  $x$  avec  $n + x$ ). Peut-être que l'espace requis est un graphe quantique [39, 40], avec  $xp$  agissant sur les liaisons entre sommets (une difficulté est que  $xp$  ne se place pas naturellement dans un graphe général).

Deuxièmement, nous ne savons pas comment associer les nombres premiers avec les orbites périodiques de la dynamique de Riemann.

En fonction des propriétés listées dans l'Introduction,  $xp$  respecte la condition a, une partie de b (la dynamique  $xp$  est instable mais non bornée), c, d, g, h et i. Concernant e, l'apparition de temps qui sont des logarithmes des entiers commence à être plausible quand on regarde l'association entre la dilatation, mais les nombres premiers n'apparaissent pas de façon évidente. Nous n'avons pas d'explication concernant f.

Il y a probablement davantage de connexions entre  $xp$  et  $\zeta(s)$ . Notre espoir est qu'en écrivant cet article, nous stimulerons d'autres personnes à les découvrir.

## Remerciements

Nous remercions le Professeur Alain Connes pour nous avoir fourni une explication détaillée de ses idées à propos des zéros de Riemann, et les Professeurs Zeev Rudnick et Peter Sarnak pour plusieurs conversations très utiles.

## Références

1. RIEMANN, B., Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse, *Monatsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissens., Berlin* 671-680 (1959).
2. EDWARDS, H.M. *Riemann's Zeta Function* (Academic Press, New York and London, 1974).
3. CONNES, A. Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann, *C.R. Acad. Sci. Paris* **323**, 1231-1236 (1996).
4. GOLDFELD, D. A spectral interpretation of Weil's explicit formula, *Springer Math. Notes* **1593**, 137-152 (1994).
5. BERRY, M.V. in *Quantum chaos and statistical nuclear physics* (eds. Seligman, T.H. & Nishioka, H.) 1-17 (1986).
6. BERRY, M.V. Quantum chaology (The Bakerian Lecture), *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A413**, 183-198 (1987).
7. KEATING, J.P. in *Quantum Chaos* (eds. Casati, G., Guarneri, I. & Smilansky, U.) 145-185 (North-Holland, Amsterdam, 1993).

8. GUTZWILLER, M.C. Periodic orbits and classical quantization conditions, *J. Math. Phys.* **12**, 343-358 (1971).
9. GUTZWILLER, M.C. *Chaos in classical and quantum mechanics* (Springer, New York, 1990).
10. MONTGOMERY, H.L. *Proc. Symp. Pure Math.* **24**, 181-193 (1973).
11. ODLYZKO, A.M. Zeros of zeta functions, *Math. of Comp.* **48**, 273-308 (1987).
12. RUDNICK, Z. & SARNAK, P. Zeros of principal  $L$ -functions and random-matrix theory, *Duke Math. J.* **81**, 269-322 (1996).
13. BOGOMOLNY, E.B. & KEATING, J.P. Random matrix theory and the Riemann zeros I : three- and four-point correlations, *Nonlinearity* **8**, 1115-1131 (1995).
14. BOGOMOLNY, E.B. & KEATING, J.P. Random-matrix theory and the Riemann zeros II :  $n$ -point correlations, *Nonlinearity* **9**, 911-935 (1996).
15. BOHIGAS, O. & GIANNONI, M.J. *Chaotic Motion and Random-matrix Theories* 1-1-99 (Springer-Verlag. 1984).
16. BERRY, M.V. Semiclassical theory of spectral rigidity, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A400**, 229-251 (1985).
17. BOGOMOLNY, E.B. & KEATING, J.P. Gutzwiller's trace formula and spectral statistics : beyond the diagonal approximation, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1472-1475 (1996).
18. BERRY, M.V. Semiclassical formula for the number variance of the Riemann zeros, *Nonlinearity* **1**, 399-407 (1988).
19. SELIGMAN, T.H., VERBAARSCHOT, J.J.M. & ZIMBAUER, M.R. Spectral fluctuation properties of Hamiltonian systems : the transition region between order and chaos, *J. Phys. A* **18**, 2751-2770 (1985).
20. BERRY, M.V. & ROBNIK, M. Statistics of energy levels without time-reversal symmetry : Aharonov-Bohm chaotic billiards, *J. Phys. A* **19**, 649-668 (1986).
21. KATZ, N. & SARNAK, P. Zeros of zeta functions, their spacings and their spectral nature, *preprint* (1997).
22. SARNAK, P. Quantum chaos, symmetry and zeta functions, *Curr. Dev. Math.* 84-115 (1997).
23. ROBBINS, J.M. Maslov indices in the Gutzwiller trace formula, *Nonlinearity* **4**, 343-363 (1991).
24. BERRY, M.V. The Riemann-Siegel formula for the zeta function : high orders and remainders, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A450**, 439-462 (1995).

25. BERRY, M.V. & HOWLS, C.J. High orders of the Weyl expansion for quantum billiards : resurgence of periodic orbits, and the Stokes phenomenon, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A447**, 527-555 (1994).
26. BALAZS, N.L. & VOROS, A. Chaos on the pseudosphere, *Physics Reports* **143**, 109-240 (1986).
27. SIEBER, M. & STEINER, F. Classical and quantum mechanics of a strongly chaotic billiard, *Physica* **D44**, 248-266 (1990).
28. SIMON, B. Nonclassical eigenvalue asymptotics, *J. Funct. Anal.* **53**, 84-98 (1983).
29. SIEBER, M. & STEINER, F. Quantization of chaos, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1941-1944 (1991).
30. TITCHMARSH, E.C. *The theory of the Riemann zeta-function* (Clarendon Press, Oxford, 1986).
31. NONNEMACHER, S. & VOROS, A. Eigenstate structures around a hyperbolic point, *J. Phys. A.* **30**, 295-315 (1997).
32. BHADURI, R.K., KHARE, A. & LAW, J. Phase of the Riemann zeta function and the inverted harmonic oscillator, *Phys. Rev.* **E52**, 486- (1995).
33. KHARE, A. The phase of the Riemann zeta function, *Pramana* **48**, 537-553 (1997).
34. ARMITAGE, J.V. in *Number theory and dynamical systems* (eds. Dodson, M.M. & Vickers, J.A.G.) 153-172 (University Press, Cambridge, 1989).
35. OKUBO, S. Lorentz-invariant hamiltonian and Riemann hypothesis, *Preprint from University of Rochester* (1997).
36. APOSTOL, T.M. *Introduction to analytic number theory* (Springer-Verlag, New York, 1976).
37. MAYER, D.H. On the Thermodynamic Formalism for the Gauss Map, *Commun. Math. Phys* **130**, 311-333 (1990).
38. BOGOMOLNY, E.B. & CARIOLI, M. Quantum maps from transfer operators, *Physica* **D67**, 88-112 (1993).
39. JAKOBSON, D., MILLER, S., RIVIN, I. & RUDNICK, Z. Eigenvalue spacings for regular graphs, *preprint* (1996).
40. KOTTOS, T. & SMILANSKY, U. Quantum chaos on graphs, *preprint from Weizmann Institute, Israel* (1997).