

Résumé

Il est bien connu qu'un graphe fini peut être vu, à bien des égards, comme un analogue discret d'une surface de Riemann. Dans cet article, nous poursuivons cette analogie dans le contexte de l'équivalence linéaire des diviseurs. En particulier, nous formulons et prouvons un analogue graphe-théorique du théorème de Riemann-Roch classique.

Nous prouvons aussi plusieurs résultats, analogues à des faits classiques sur les surfaces de Riemann, concernant l'application d'Abel-Jacobi d'un graphe vers son jacobien.

Comme application de nos résultats, nous caractérisons l'existence ou la non-existence d'une stratégie gagnante pour un certain jeu de tir de jetons joué sur les sommets d'un graphe².

1. Introduction

1.1. Présentation

Dans cet article, nous explorons quelques analogies nouvelles entre graphes finis et surfaces de Riemann.

Notre résultat principal est un analogue graphe-théorique du théorème de Riemann-Roch classique.

Nous étudions aussi l'application d'Abel-Jacobi S d'un graphe G vers son jacobien, ainsi que les puissances symétriques supérieures $S^{(k)}$ de S . Nous prouvons, par exemple, que $S^{(g)}$ est toujours surjective, et que $S^{(1)}$ est injective lorsque G est 2-arête-connexe. Ces résultats reflètent étroitement des faits classiques sur le jacobien d'une surface de Riemann.

Comme application de nos résultats, nous caractérisons l'existence ou la non-existence d'une stratégie gagnante pour un certain jeu de tir de jetons joué sur les sommets d'un graphe.

L'article est structuré comme suit. Dans le §1., nous fournissons toutes les définitions pertinentes et énonçons nos résultats principaux.

La preuve du théorème de Riemann-Roch pour les graphes occupe les §2. et 3..

Dans le §4., nous étudions l'injectivité et la surjectivité de $S^{(k)}$ pour $k \geq 1$, et expliquons le lien avec le jeu de tir de jetons.

1. <https://arxiv.org/pdf/math/0608360>

2. Nous voudrions remercier Robin Thomas pour un certain nombre de discussions utiles.

Le premier auteur voudrait aussi remercier son étudiant REU de l'été 2006, Dragos Ilas, pour avoir calculé un certain nombre d'exemples et testé des conjectures sur l'application d'Abel-Jacobi graphe-théorique. Merci aussi à Hendrik Lenstra, Dino Lorenzini et aux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires utiles.

Le travail du premier auteur a été soutenu en partie par la bourse NSF DMS-0600027, et celui du second auteur par la bourse NSF DMS-0200595.

Des résultats apparentés et d'autres questions sont discutés dans le § 5.

L'article se conclut par deux appendices. Dans l'appendice A, nous fournissons au lecteur un bref résumé de quelques résultats classiques sur les surfaces de Riemann, et dans l'appendice B, nous discutons de l'analogie graphe-théorique du théorème d'Abel prouvé dans [2].

1.2. Notations et terminologie

Dans tout cet article, une *surface de Riemann* désignera une variété complexe compacte, connexe, de dimension un, et un *graphe* désignera un multigraphe fini, non pondéré, sans boucles. Tous les graphes de cet article sont supposés connexes.

Nous notons par $V(G)$ et $E(G)$, respectivement, l'ensemble des sommets et des arêtes de G .

Nous écrirons simplement G au lieu de $V(G)$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

De plus, nous écrivons $E_v = E_v(G)$ pour l'ensemble des arêtes incidentes à un sommet donné v .

Pour $k \geq 2$, un graphe G est dit *k-arête-connexe* si $G - W$ est connexe pour tout ensemble W d'au plus $k - 1$ arêtes de G . (Par convention, nous considérons le graphe trivial ayant un sommet et aucune arête comme *k-arête-connexe* pour tout k .)

Alternativement, définissons une *coupe* comme l'ensemble de toutes les arêtes reliant un sommet de V_1 à un sommet de V_2 pour une partition de $V(G)$ en sous-ensembles disjoints non vides V_1 et V_2 . Alors G est *k-arête-connexe* si et seulement si toute coupe a une taille au moins k .

Si $A \subseteq V(G)$, nous notons $\chi_A : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de A .

1.3. Le jacobien d'un graphe fini

Soit G un graphe, et choisissons un ordre $\{v_1, \dots, v_n\}$ des sommets de G . La *matrice laplacienne* Q associée à G est la matrice $n \times n$ $Q = D - A$, où D est la matrice diagonale dont l'entrée $(i, i)^e$ est le degré du sommet v_i , et A est la *matrice d'adjacence* du graphe, dont l'entrée $(i, j)^e$ est le nombre d'arêtes reliant v_i et v_j .

Comme les boucles ne sont pas autorisées, l'entrée $(i, i)^e$ de A est nulle pour tout i . Il est bien connu et facile de vérifier que Q est symétrique, de rang $n - 1$, et que le noyau de Q est engendré par le vecteur dont toutes les entrées sont égales à 1 (voir [3, 10, 16]).

Soit $\text{Div}(G)$ le groupe abélien libre sur l'ensemble des sommets de G . Nous pensons les éléments de $\text{Div}(G)$ comme des combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers d'éléments de $V(G)$, et écrivons un élément $D \in \text{Div}(G)$ sous la forme $\sum_{v \in V(G)} a_v(v)$, où chaque a_v est un entier. Par analogie avec le cas des surfaces de Riemann, les éléments de $\text{Div}(G)$ sont appelés *diviseurs* sur G .

Pour simplifier, nous écrirons $D(v)$ pour le coefficient a_v de (v) dans D .

Il existe un ordre partiel naturel sur le groupe $\text{Div}(G)$: nous disons que $D \geq D'$ si et seulement si $D(v) \geq D'(v)$ pour tout $v \in V(G)$. Un diviseur $E \in \text{Div}(G)$ est dit *effectif* si $E \geq 0$. Nous notons $\text{Div}_+(G)$ l'ensemble de tous les diviseurs effectifs sur G .

La fonction *degré* $\deg : \text{Div}(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ est définie par $\deg(D) = \sum_{v \in V(G)} D(v)$.

Remarque : Notons que les définitions de l'ordre partiel $\geq$, de l'espace $\text{Div}_+(G)$ et de l'application $\deg$ ont un sens lorsque $V(G)$ est remplacé par un ensemble arbitraire X . Cette observation sera utilisée dans le § 2. lorsque nous formulerons un “critère de Riemann-Roch” abstrait.

Nous notons $\mathcal{M}(G) = \text{Hom}(V(G), \mathbb{Z})$ le groupe abélien constitué de toutes les fonctions à valeurs entières sur les sommets de G . On peut penser à $\mathcal{M}(G)$ comme analogue au corps $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann X (bien qu'il soit en réalité plus proche du groupe abélien $\{\log |f| : f \in \mathcal{M}(X)^*\}$, voir la remarque 1.3.).

En utilisant notre ordre des sommets, nous obtenons des isomorphismes entre $\text{Div}(G)$, $\mathcal{M}(G)$ et l'espace des vecteurs colonnes $n \times 1$ à coordonnées entières.

Nous notons $[D]$ (resp. $[f]$) le vecteur colonne correspondant à $D \in \text{Div}(G)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(G)$). L'opérateur laplacien $\Delta : \mathcal{M}(G) \rightarrow \text{Div}(G)$ est donné par la formule

$$\Delta(f) = \sum_{v \in V(G)} \Delta_v(f)(v) ,$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_v(f) &= \deg(v)f(v) - \sum_{e=vw \in E_v} f(w) \\ &= \sum_{e=vw \in E_v} (f(v) - f(w)) . \end{aligned}$$

En termes matriciels, il résulte des définitions que

$$[\Delta(f)] = Q[f] .$$

Remarque : Le fait que Q soit une matrice symétrique est équivalent au fait que Δ est auto-adjoint par rapport à l'appariement bilinéaire $\langle f, D \rangle = \sum_{v \in V(G)} f(v)D(v)$ sur $\mathcal{M}(G) \times \text{Div}(G)$. C'est l'analogue graphe-théorique du *théorème de réciprocité de Weil* sur une surface de Riemann (voir p. 242 de [17] et la remarque 1.3. ci-dessous).

Nous définissons le sous-groupe $\text{Div}^0(G)$ de $\text{Div}(G)$ constitué des *diviseurs de degré zéro* comme le noyau de $\deg$, c'est-à-dire,

$$\text{Div}^0(G) = \{D \in \text{Div}(G) : \deg(D) = 0\} .$$

Plus généralement, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ nous définissons $\text{Div}^k(G) = \{D \in \text{Div}(G) : \deg(D) = k\}$, et $\text{Div}_+^k(G) = \{D \in \text{Div}(G) : D \geq 0 \text{ et } \deg(D) = k\}$. L'ensemble $\text{Div}_+^1(G)$ est canoniquement isomorphe à $V(G)$.

Nous définissons aussi le sous-groupe $\text{Prin}(G)$ de $\text{Div}(G)$ constitué des *diviseurs principaux* comme l'image de $\mathcal{M}(G)$ sous l'opérateur laplacien, c'est-à-dire,

$$\text{Prin}(G) := \Delta(\mathcal{M}(G)) . \quad (1)$$

Il est facile de voir que tout diviseur principal est de degré zéro, de sorte que $\text{Prin}(G)$ est un sous-groupe de $\text{Div}^0(G)$.

Remarque : la motivation classique pour (1) est que le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle f sur une surface de Riemann X peut être retrouvé à partir de la fonction à valeurs réelles étendues $\log |f|$ en utilisant l'opérateur laplacien (au sens des distributions) Δ .

Plus précisément, si $\Delta(\varphi)$ est défini de sorte que

$$\int_X \psi \Delta(\varphi) = \int_X \varphi \Delta(\psi)$$

pour toutes les fonctions test suffisamment lisses $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$, où $\Delta(\psi)$ est donné en coordonnées locales par la formule

$$\Delta(\psi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy ,$$

alors

$$\Delta(\log |f|) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(f) \delta_P .$$

En d'autres termes, le diviseur de f peut être identifié au laplacien de $\log |f|$.

Suivant [2] et [31], nous définissons le groupe $\text{Jac}(G)$, appelé le *jacobien* de G , comme le groupe quotient correspondant :

$$\text{Jac}(G) = \frac{\text{Div}^0(G)}{\text{Prin}(G)} . \quad (2)$$

Comme montré dans [2], $\text{Jac}(G)$ est un groupe abélien fini dont l'ordre $\kappa(G)$ est le nombre d'*arbres couvrants* de G . (C'est une conséquence directe du célèbre *théorème matrice-arbre* de Kirchhoff, voir le § 14 de [4].) Le groupe $\text{Jac}(G)$ est un analogue discret du jacobien d'une surface de Riemann. Nous écrirons $[D]$ pour la classe dans $\text{Jac}(G)$ d'un diviseur $D \in \text{Div}^0(G)$. (Il ne devrait pas y avoir de confusion entre cette notation et notre notation similaire pour le vecteur colonne associé à un diviseur.)

Dans [2], le groupe $\text{Jac}(G)$ est appelé le *groupe de Picard*, et noté $\text{Pic}(G)$, et le terme *jacobien* est réservé à un groupe *a priori* différent noté $J(G)$. Cependant, comme montré dans la proposition 7 de [2], les deux groupes sont canoniquement isomorphes. L'isomorphisme $\text{Pic}(G) \cong J(G)$ est l'analogue graphe-théorique du *théorème d'Abel* (voir théorème VIII.2.2 de [28]).

1.4. L'application d'Abel-Jacobi d'un graphe vers son jacobien

Si nous fixons un point de base $v_0 \in V(G)$, nous pouvons définir l'*application d'Abel-Jacobi* $S_{v_0} : G \rightarrow \text{Jac}(G)$ par la formule

$$S_{v_0}(v) = [(v) - (v_0)] . \quad (3)$$

Nous définissons aussi, pour chaque entier naturel $k \geq 1$, une application $S_{v_0}^{(k)} : \text{Div}_+^k(G) \rightarrow \text{Jac}(G)$ par

$$S_{v_0}^{(k)}((v_1) + \cdots + (v_k)) = S_{v_0}(v_1) + S_{v_0}(v_2) + \cdots + S_{v_0}(v_k) .$$

L'application S_{v_0} peut être caractérisée par la propriété universelle suivante (voir le § 3 de [2]). Une application $\varphi : G \rightarrow A$ de $V(G)$ vers un groupe abélien A est dite *harmonique* si pour chaque $v \in G$, on a

$$\deg(v) \cdot \varphi(v) = \sum_{e=vw \in E_v} \varphi(w) .$$

Alors S_{v_0} est universelle parmi toutes les applications harmoniques de G vers des groupes abéliens envoyant v_0 sur 0, au sens où si $\varphi : G \rightarrow A$ est une telle application, alors il existe un unique homomorphisme de groupes $\psi : \text{Jac}(G) \rightarrow A$ tel que $\varphi = \psi \circ S_{v_0}$.

Soit $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$ le *genre*³ de G , qui est le nombre de cycles linéairement indépendants de G , ou de façon équivalente, le premier nombre de Betti de G (c'est-à-dire la dimension de $H_1(G, \mathbb{R})$).

Nous écrivons S au lieu de S_{v_0} lorsque le point de base v_0 est sous-entendu.

Dans le § 4., nous prouverons :

Théorème 1. *L'application $S^{(k)}$ est surjective si et seulement si $k \geq g$.*

La surjectivité de $S^{(g)}$ est l'analogue graphe-théorique d'un résultat classique sur les surfaces de Riemann connu sous le nom de théorème d'inversion de Jacobi (voir p. 235 de [17]). Pour une surface de Riemann X , il est clair que $S^{(g-1)} : X^{(g-1)} \rightarrow \text{Jac}(X)$ n'est pas surjective, puisque $\dim S^{(g-1)} = g - 1 < \dim \text{Jac}(X) = g$.

Comme complément au théorème 1, nous caractériserons aussi précisément les valeurs de k pour lesquelles $S^{(k)}$ est injective :

Théorème 2. *L'application $S^{(k)}$ est injective si et seulement si G est $(k + 1)$ -arête-connexe.*

Pour les graphes 2-arête-connexes, le théorème 2 est l'analogue du fait bien connu que l'application d'Abel-Jacobi d'une surface de Riemann X vers son jacobien est injective si et seulement si X a un genre au moins 1.

(Voir proposition VIII.5.1 de [28].)

1.5. Jeux de tir de jetons sur les graphes

Il y a eu un certain nombre d'articles consacrés aux “jeux de tir de jetons” joués sur les sommets d'un graphe; voir, par exemple, [5, 8, 9, 16, 25, 26, 39, 42]. Dans cet article, comme application du théorème 1, nous étudions un nouveau jeu de tir de jetons présentant des caractéristiques assez

3. En théorie des graphes, le terme “genre” est traditionnellement utilisé pour un concept différent, à savoir le plus petit genre (c'est-à-dire le premier nombre de Betti) d'une surface dans laquelle le graphe peut être plongé, et l'entier g est appelé le “nombre cyclomatique” de G .

Nous appelons g le genre de G afin de souligner l'analogie avec les surfaces de Riemann.

frappantes.

Notre jeu de tir de jetons, comme celui considéré par Biggs dans [5] (voir aussi le § 31 et 32 de [4]), est plus commodément énoncé en utilisant des “dollars” plutôt que des jetons. Soit G un graphe, et considérons le jeu de “solitaire” suivant joué sur les sommets de G . La configuration initiale du jeu attribue à chaque sommet v de G un nombre entier de dollars. Une telle configuration peut être identifiée à un diviseur $D \in \text{Div}(G)$.

Un sommet auquel est attribué un nombre négatif de dollars est dit *endetté*. Un *coup* consiste pour un sommet v soit à emprunter un dollar à chacun de ses voisins, soit à donner un dollar à chacun de ses voisins. Notons que tout coup laisse le nombre total de dollars inchangé.

Le but du jeu est d’atteindre, par une suite de coups, une configuration dans laquelle aucun sommet n’est endetté. Nous appellerons une telle configuration une *position gagnante*, et une suite de coups permettant d’atteindre une telle configuration une *stratégie gagnante*.

Comme précédemment, nous posons $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$. Dans le § 4.2., nous prouverons le résultat suivant en montrant qu’il est équivalent au théorème 1 :

Théorème 3. *Soit $N = \deg(D)$ le nombre total de dollars présents à tout moment du jeu.*

1. *Si $N \geq g$, alors il existe toujours une stratégie gagnante.*
2. *Si $N \leq g - 1$, alors il existe toujours une configuration initiale pour laquelle aucune stratégie gagnante n’existe.*

Voir le § 5.5. pour une discussion de la relation entre notre jeu de tir de jetons et celui étudié par Björner, Lovász et Shor dans [9], et voir le § 5.6. pour une discussion de la relation entre notre jeu de tir de jetons et le jeu du dollar de Biggs.

1.6. Systèmes linéaires et théorème de Riemann-Roch

Nous définissons une relation d’équivalence $\sim$ sur le groupe $\text{Div}(G)$ en déclarant que $D \sim D'$ si et seulement si $D - D' \in \text{Prin}(G)$. Empruntant encore à la théorie des surfaces de Riemann, nous appelons cette relation *équivalence linéaire*.

Comme un diviseur principal est de degré zéro, il s’ensuit que des diviseurs linéairement équivalents ont le même degré.

Notons que par (2), le jacobien de G est l’ensemble des classes d’équivalence linéaire de diviseurs de degré zéro sur G .

Pour $D \in \text{Div}(G)$, nous définissons le *système linéaire associé* à D comme l’ensemble $|D|$ de tous les diviseurs effectifs linéairement équivalents à D :

$$|D| = \{E \in \text{Div}(G) : E \geq 0, E \sim D\} .$$

Comme nous le verrons dans le § 4.2., il résulte des définitions que deux diviseurs D et D' sur G sont linéairement équivalents si et seulement s’il existe une suite de coups transformant D en D'

dans le jeu de tir de jetons décrit dans le § 1.5.. Il s'ensuit qu'il existe une stratégie gagnante dans le jeu de tir de jetons dont la configuration initiale correspond à D si et seulement si $|D| \neq \emptyset$.

Nous définissons la *dimension* $r(D)$ du système linéaire $|D|$ en posant $r(D) = -1$ si $|D| = \emptyset$, puis en déclarant que pour chaque entier $s \geq 0$, $r(D) \geq s$ si et seulement si $|D - E| \neq \emptyset$ pour tout diviseur effectif E de degré s . Il est clair que $r(D)$ ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de D .

Remarque : Par le lemme 15 ci-dessous, nous avons $r(D) \geq 0$ si et seulement s'il existe une stratégie gagnante dans le jeu de tir de jetons de configuration initiale D , $r(D) \geq 1$ si et seulement s'il existe encore une stratégie gagnante après avoir soustrait un dollar à n'importe quel sommet, etc.

Le *diviseur canonique* sur G est le diviseur K donné par

$$K = \sum_{v \in V(G)} (\deg(v) - 2) (v) . \quad (4)$$

Comme la somme sur tous les sommets v de $\deg(v)$ est égale au double du nombre d'arêtes de G , nous avons $\deg(K) = 2|E(G)| - 2|V(G)| = 2g - 2$.

Nous pouvons maintenant énoncer un analogue graphe-théorique du théorème de Riemann-Roch (voir théorème VI.3.11 de [28]).

La preuve sera donnée dans le § 3..

Théorème 4 (Riemann-Roch pour les graphes). *Soit G un graphe, et soit D un diviseur sur G . Alors*

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g .$$

Remarque

(i) Notre définition de $r(D)$ coïncide avec la définition habituelle de $r(D)$ comme $\dim L(D) - 1$ dans le cas des surfaces de Riemann (voir, par exemple, p. 250 de [17] ou le § III.8.15 de [13]).

(ii) Il faut cependant se garder de trop s'appuyer sur l'intuition du cas des surfaces de Riemann lorsqu'on pense à la quantité $r(D)$ pour les diviseurs sur les graphes.

Par exemple, pour les surfaces de Riemann on a $r(D) = 0$ si et seulement si $|D|$ contient exactement un élément, mais aucune des deux implications n'est vraie en général pour les graphes. Par exemple, considérons le diviseur canonique K sur un graphe G avec deux sommets v_1 et v_2 reliés par m arêtes. Alors clairement $r(K) \geq m - 2$, et en fait nous avons $r(K) = m - 2$. (Ceci peut être prouvé directement, ou déduit comme une conséquence du théorème 4.) Cependant, $|K| = \{K\}$ car

$$D \sim K \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z} : D = (m - 2 + im)(v_1) + (m - 2 - im)(v_2) .$$

Pour voir que l'autre implication échoue aussi, considérons un graphe G avec $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_3v_1\}$, et $D = 2(v_4) \in \text{Div}(G)$. Alors $(v_3) + (v_5) \in |D|$, mais il résulte du lemme 10 (ou peut être vérifié directement) que $|D - (v_1)| = \emptyset$, et donc $r(D) = 0$.

(iii) L'ensemble $L(D) := \{f \in \mathcal{M}(G) : \Delta(f) \geq -D\}$ n'est pas un espace vectoriel, de sorte qu'on ne peut pas simplement définir le nombre $r(D)$ comme $\dim L(D) - 1$ comme dans le cas classique. Cela ne devrait pas être surprenant, puisque les éléments de $L(D)$ sont analogues à des fonctions de la forme $\log |f|$ avec f une fonction méromorphe non nulle sur une surface de Riemann X . D'un autre côté, $L(D) \cup \{\infty\}$ est naturellement un semi-module de type fini sur le semi-anneau tropical $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +)$ (voir le § 2.4 de [15]), et il existe une notion naturelle dans ce contexte pour la *dimension* de $L(D)$ (voir corollaire 95 dans [15]). Cependant, des exemples comme ceux ci-dessus montrent que la dimension tropicale de $L(D)$ n'est *pas* la même que $r(D) + 1$, et n'obéit pas au théorème 4.

2. Un critère de Riemann-Roch

Dans cette section, nous formulons un critère abstrait donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour que la formule de Riemann-Roch $r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g$ soit vraie, où $r(D)$ est défini en termes d'une relation d'équivalence sur un groupe abélien libre arbitraire. Ce résultat, de nature purement combinatoire, sera utilisé dans le § 3. dans notre preuve du théorème de Riemann-Roch pour les graphes.

Le cadre général de notre résultat est le suivant.

Soit X un ensemble non vide, et soit $\text{Div}(X)$ le groupe abélien libre sur X .

Comme d'habitude, les éléments de $\text{Div}(X)$ sont appelés *diviseurs* sur X , les diviseurs E avec $E \geq 0$ sont dits *effectifs*, et pour chaque entier d , nous notons $\text{Div}_+^d(X)$ l'ensemble des diviseurs effectifs de degré d sur X .

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur $\text{Div}(X)$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(E1) Si $D \sim D'$ alors $\deg(D) = \deg(D')$.

(E2) Si $D_1 \sim D'_1$ et $D_2 \sim D'_2$, alors $D_1 + D'_1 \sim D_2 + D'_2$.

Pour chaque $D \in \text{Div}(X)$, définissons $|D| = \{E \in \text{Div}(G) : E \geq 0, E \sim D\}$, et définissons la fonction $r : \text{Div}(X) \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ en déclarant que pour chaque entier $s \geq 0$,

$$r(D) \geq s \iff |D - E| \neq \emptyset \forall E \in \text{Div}(X) : E \geq 0 \text{ et } \deg(E) = s.$$

Notons que l'équivalence ci-dessus est vraie pour tous les entiers s . Il est facile de voir que $r(D) = -1$ si $\deg(D) < 0$, et si $\deg(D) = 0$ alors $r(D) = 0$ si $D \sim 0$ et $r(D) = -1$ sinon.

Lemme 5. *Pour tous $D, D' \in \text{Div}(X)$ tels que $r(D), r(D') \geq 0$, nous avons $r(D + D') \geq r(D) + r(D')$.*

Démonstration. Soit $E_0 = (x_1) + \dots + (x_{r(D)+r(D')})$ un diviseur effectif arbitraire de degré $r(D) + r(D')$, et soit $E = (x_1) + \dots + (x_{r(D)})$ et $E' = (x_{r(D)+1}) + \dots + (x_{r(D)+r(D')})$. Alors $|D - E|$ et $|D' - E'|$ sont non vides, de sorte que $D - E \sim F$ et $D' - E' \sim F'$ avec $F, F' \geq 0$. Il s'ensuit que $(D + D') - (E + E') = (D + D') - E_0 \sim F + F' \geq 0$, et donc $r(D + D') \geq r(D) + r(D')$. $\square$

Soit g un entier non négatif, et définissons

$$\mathcal{N} = \{D \in \text{Div}(X) : \deg(D) = g - 1 \text{ et } |D| = \emptyset\}.$$

Enfin, soit K un élément de $\text{Div}(X)$ de degré $2g - 2$. Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la formule de Riemann-Roch soit vraie pour les éléments de $\text{Div}(X)/\sim$.

Théorème 6. *Définissons $\epsilon : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en déclarant que $\epsilon(D) = 0$ si $|D| \neq \emptyset$ et $\epsilon(D) = 1$ si $|D| = \emptyset$.*

Alors la formule de Riemann-Roch

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g \tag{5}$$

est vraie pour tout $D \in \text{Div}(X)$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(RR1) *Pour tout $D \in \text{Div}(X)$, il existe $\nu \in \mathcal{N}$ tel que $\epsilon(D) + \epsilon(\nu - D) = 1$.*

(RR2) *Pour tout $D \in \text{Div}(X)$ avec $\deg(D) = g - 1$, nous avons $\epsilon(D) + \epsilon(K - D) = 0$.*

Remarque :

(i) La propriété (RR2) est équivalente à l'assertion que $r(K) \geq g - 1$. En effet, si (RR2) est vraie alors pour tout diviseur effectif E de degré $g - 1$, nous avons $|K - E| \neq \emptyset$, ce qui signifie que $r(K) \geq g - 1$. Réciproquement, si $r(K) \geq g - 1$ alors $\epsilon(K - E) = \epsilon(E) = 0$ pour tout diviseur effectif E de degré $g - 1$. Par conséquent $\epsilon(D) = 0$ implique $\epsilon(K - D) = 0$. Par symétrie, nous obtenons $\epsilon(D) = 0$ si et seulement si $\epsilon(K - D) = 0$, ce qui est équivalent à (RR2).

(ii) Lorsque la formule de Riemann-Roch (5) est vraie, nous avons automatiquement $r(K) = g - 1$.

Remarque :

(i) Lorsque X est une surface de Riemann et que $\sim$ désigne l'équivalence linéaire des diviseurs, alors on peut montrer indépendamment du théorème de Riemann-Roch que $r(K) = g - 1$, c'est-à-dire que l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur X est de dimension g . Ainsi on peut prouver directement que (RR2) est vraie. Nous ne savons pas s'il existe une preuve directe de (RR1) qui n'utilise pas Riemann-Roch, mais si c'était le cas, on pourrait en déduire le théorème de Riemann-Roch classique en utilisant le théorème 6.

(ii) Les diviseurs de degré $g - 1$ sur une surface de Riemann X qui appartiennent à $\mathcal{N}$ sont classiquement appelés *non spéciaux* (ce qui explique notre utilisation du symbole $\mathcal{N}$).

Avant de donner la preuve du théorème 6, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires. Le premier est le lemme simple suivant, dont la preuve est laissée au lecteur.

Lemme 7. *Supposons que $\psi : A \rightarrow A'$ soit une bijection entre ensembles, et que $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ et $f' : A' \rightarrow \mathbb{Z}$ soient des fonctions bornées inférieurement. S'il existe une constante $c \in \mathbb{Z}$ telle que*

$$f(a) - f'(\psi(a)) = c$$

pour tout $a \in A$, alors

$$\min_{a \in A} f(a) - \min_{a' \in A'} f'(a') = c .$$

Si $D = \sum_i a_i(x_i) \in \text{Div}(X)$, nous définissons

$$\deg^+(D) = \sum_{a_i \geq 0} a_i .$$

L'observation clé nécessaire pour déduire (5) de (RR1) et (RR2) est la caractérisation alternative suivante de la quantité $r(D)$:

Lemme 8. *Si (RR1) est vraie alors pour tout $D \in \text{Div}(X)$ nous avons*

$$r(D) = \left(\min_{\substack{D' \sim D \\ \nu \in \mathcal{N}}} \deg^+(D' - \nu) \right) - 1 . \quad (6)$$

Démonstration. Soit $r'(D)$ le membre de droite de (6). Si $r(D) < r'(D)$, alors il existe un diviseur effectif E de degré $r'(D)$ pour lequel $r(D - E) = -1$. Par (RR1), cela signifie qu'il existe un diviseur $\nu \in \mathcal{N}$ et un diviseur effectif E' tels que $\nu - D + E \sim E'$. Mais alors $D' - \nu = E - E'$ pour un certain diviseur $D' \sim D$, et donc

$$\deg^+(D' - \nu) - 1 \leq \deg(E) - 1 = r'(D) - 1 ,$$

contredisant la définition de $r'(D)$. Il s'ensuit que $r(D) \geq r'(D)$.

Réciproquement, si nous choisissons des diviseurs $D' \sim D$ et $\nu \in \mathcal{N}$ réalisant le minimum dans (6), alors $\deg^+(D' - \nu) = r'(D) + 1$, et donc il existe des diviseurs effectifs E, E' avec $\deg(E) = r'(D) + 1$ tels que $D' - \nu = E - E'$. Mais alors $D - E \sim \nu - E'$, et comme $\nu - E'$ n'est pas équivalent à un diviseur effectif, il s'ensuit que $|D - E| = \emptyset$. Par conséquent $r(D) \leq r'(D)$. $\square$

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 6.

Preuve du théorème 6. Nous prouvons d'abord que (5) implique (RR1) et (RR2).

Soit D un diviseur sur X , et soit $d = \deg(D)$. La propriété (RR2) est plus ou moins immédiate, puisque (5) implique que si $\deg(D) = g - 1$ alors $r(D) = r(K - D)$.

Nous ne pouvons pas avoir $\epsilon(D) = \epsilon(\nu - D) = 0$, sinon par le lemme 5 nous aurions $r(\nu) \geq 0$, contredisant la définition de $\mathcal{N}$. Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, $\mathcal{N}$ est non vide ; par conséquent, pour prouver (RR1) il suffit de montrer que si $r(D) = -1$ alors $r(\nu - D) \geq 0$ pour un certain $\nu \in \mathcal{N}$.

Si $r(D + E) \geq 0$ pour tout $E \in \text{Div}_+^{g-1-d}(X)$, alors (5) implique que $r(K - D - E) \geq 0$ pour tout tel E , et donc $r(K - D) \geq g - 1 - d$. Une autre application de (5) donne alors $r(D) = r(K - D) + d + 1 - g \geq 0$.

Par conséquent, lorsque $r(D) = -1$, il existe un diviseur effectif E de degré $g - 1 - d$ tel que $r(D + E) = -1$. Comme $\deg(D + E) = g - 1$, cela signifie que $D + E \in \mathcal{N}$, et donc $D + E = \nu$

pour un certain $\nu \in \mathcal{N}$. Pour ce choix de ν , nous avons $r(\nu - D) \geq 0$, ce qui prouve (RR1).

Nous montrons maintenant que (RR1) et (RR2) impliquent (5). Soit $D \in \text{Div}(X)$. Pour tout $\nu \in \mathcal{N}$, la propriété (RR2) implique que $\bar{\nu} := K - \nu$ est aussi dans $\mathcal{N}$. En écrivant

$$\nu - D' = K - D' - \bar{\nu} ,$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \deg^+(D' - \nu) - \deg^+((K - D') - \bar{\nu}) &= \deg^+(D' - \nu) - \deg^+(\nu - D') \\ &= \deg(D' - \nu) \\ &= \deg(D) + 1 - g . \end{aligned}$$

Comme la différence $\deg^+(D' - \nu) - \deg^+((K - D') - \bar{\nu})$ a la valeur constante $\deg(D) + 1 - g$ pour tous D' et ν , et comme $\bar{\nu} = K - \nu$ parcourt tous les éléments possibles de $\mathcal{N}$ lorsque ν le fait, il résulte des lemmes 7 et 8 que $r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g$ comme voulu. $\square$

3. Riemann-Roch pour les graphes

3.1. Fonctions de stationnement G et diviseurs réduits

Dans cette section, nous utilisons la notion de *fonction de stationnement* G , introduite dans [33], pour définir un unique *diviseur réduit* dans chaque classe d'équivalence de $\text{Div}(G)$. Les diviseurs réduits joueront un rôle clé dans notre preuve du théorème de Riemann-Roch pour les graphes dans la section suivante.

Nos diviseurs réduits sont étroitement liés aux “configurations critiques” considérées par Biggs dans [5, 6], comme nous l'expliquerons dans la section 5.6..

Nous présentons maintenant les définitions pertinentes. Pour $A \subseteq V(G)$ et $v \in A$, notons $\text{outdeg}_A(v)$ le nombre d'arêtes de G ayant v comme une extrémité et dont l'autre extrémité est dans $V(G) - A$. Choisissons un sommet $v_0 \in V(G)$. Nous disons qu'une fonction $f : V(G) - \{v_0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ est une *fonction de stationnement* G (relativement au sommet de base v_0) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (P1) $f(v) \geq 0$ pour tout $v \in V(G) - \{v_0\}$.
- (P2) Pour tout ensemble non vide $A \subseteq V(G) - \{v_0\}$, il existe un sommet $v \in A$ tel que $f(v) < \text{outdeg}_A(v)$.

Nous disons qu'un diviseur $D \in \text{Div}(G)$ est *v_0 -réduit* si l'application $v \mapsto D(v)$, définie pour $v \in V(G) - \{v_0\}$, est une fonction de stationnement G .

En termes de jeu de tir de jetons, un diviseur D est v_0 -réduit si et seulement si (1) aucun sommet $v \neq v_0$ n'est endetté ; et (2) pour tout sous-ensemble non vide A de $V(G) - \{v_0\}$, si tous les sommets de A effectuaient un coup de prêt, un sommet de A s'endetterait.

Proposition 9. *Fixons un sommet de base $v_0 \in V(G)$. Alors pour tout $D \in \text{Div}(G)$, il existe un unique diviseur v_0 -réduit $D' \in \text{Div}(G)$ tel que $D' \sim D$.*

Démonstration. Nous commençons par présenter une esquisse informelle de la preuve qu'un tel diviseur D' existe en termes de jeu de tir de jetons. Nous devons montrer que toute configuration initiale peut être transformée en une configuration correspondant à un diviseur v_0 -réduit via une suite de coups légaux.

Pour ce faire, nous obtenons d'abord une configuration où aucun sommet sauf v_0 n'est endetté. Ceci peut être fait, par exemple, en ordonnant les sommets dans un certain ordre, en commençant par v_0 , de telle sorte que tout sommet sauf v_0 ait un voisin qui le précède dans cet ordre. Nous prenons ensuite les sommets hors de la dette consécutivement, en commençant par le dernier sommet, en faisant à chaque étape en sorte qu'un voisin w qui précède le sommet courant v dans l'ordre désigné prête suffisamment d'argent pour sortir v de la dette.

Une fois que nous avons obtenu une configuration où aucun sommet autre que v_0 n'est endetté, nous énumérons les sous-ensembles non vides $A_1, \dots, A_s$ de $V(G) - \{v_0\}$.

Si tout sommet de A_1 peut donner un dollar à chacun de ses voisins en dehors de A_1 et rester hors de la dette, alors chaque sommet de A_1 le fait (c'est une combinaison de coups légaux dans le jeu de tir de jetons); sinon, nous passons à l'ensemble suivant A_2 , et ainsi de suite.

Une fois que les sommets d'un certain ensemble A_i prêtent de l'argent, nous parcourons à nouveau toute la procédure, en commençant par A_1 . Si pour chaque $1 \leq i \leq s$, il y a un sommet dans A_i qui ne peut pas prêter un dollar à chacun de ses voisins en dehors de A_i sans s'endetter, alors la procédure se termine.

Notons que v_0 ne prête jamais d'argent durant cette procédure, et donc il doit cesser de recevoir de l'argent à un certain moment. Aucun des voisins de v_0 ne prête d'argent à partir de ce moment, et donc eux aussi doivent finalement cesser de recevoir de l'argent. En itérant cet argument, nous voyons que toute la procédure doit s'arrêter. La configuration D' obtenue à la fin de ce processus correspond à un diviseur v_0 -réduit.

Nous formalisons maintenant l'argument présenté ci-dessus. Pour un sommet $v \in V(G)$, soit $d(v)$ la longueur du plus court chemin dans G entre v et v_0 . Soit $d = \max_{v \in V(G)} d(v)$ et soit $S_k = \{v \in V(G) : d(v) = k\}$ pour $0 \leq k \leq d$.

Définissons les vecteurs $\mu_1(D) \in \mathbb{Z}^d$ et $\mu_2(D) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ par

$$\mu_1(D) = \left(\sum_{\substack{v \in S_d \\ D(v) < 0}} D(v), \sum_{\substack{v \in S_{d-1} \\ D(v) < 0}} D(v), \dots, \sum_{\substack{v \in S_1 \\ D(v) < 0}} D(v) \right),$$

$$\mu_2(D) = \left(\sum_{v \in S_0} D(v), \sum_{v \in S_1} D(v), \dots, \sum_{v \in S_d} D(v) \right).$$

En remplaçant D par un diviseur équivalent si nécessaire, nous pouvons supposer sans perte de généralité que

$$\mu_1(D) = \max_{D' \sim D} \mu_1(D') \quad \text{et} \quad \mu_2(D) = \max_{\substack{D' \sim D \\ \mu_1(D) = \mu_1(D')}} \mu_2(D'),$$

où les maxima sont pris dans l'ordre lexicographique. Il est facile de voir que les deux maxima sont atteints. Nous affirmons que le diviseur résultant D est v_0 -réduit.

Supposons que $D(v) < 0$ pour un sommet $v \neq v_0$. Soit v' un voisin de v tel que $d(v') < d(v)$ et soit $D' = D - \Delta(\chi_{\{v'\}})$. Alors $D'(v) > D(v)$, et $D'(w) \geq D(w)$ pour tout w tel que $d(w) \geq d(v)$. Il s'ensuit que $\mu_1(D') > \mu_1(D)$, contredisant le choix de D . Par conséquent $D(v) \geq 0$ pour tout $v \in V(G), v \neq v_0$.

Supposons maintenant que pour un sous-ensemble non vide $A \subseteq V(G) - \{v_0\}$, nous ayons $D(v) \geq \text{outdeg}_A(v)$ pour tout $v \in A$. Soit $D' = D - \Delta(\chi_A)$ et $d_A = \min_{v \in A} d(v)$. Nous avons $D'(v) \geq D(v)$ pour tout $v \in V(G) - A$ et $D'(v) = D(v) - \text{outdeg}_A(v) \geq 0$ pour tout $v \in A$. Par conséquent $\mu_1(D') = \mu_1(D)$, car ils sont tous deux le vecteur nul. Il doit y avoir un sommet $v' \in V(G)$ tel que $d(v') < d_A$, et pour lequel v' a un voisin dans A . Il s'ensuit que $D'(v') > D(v')$, et par conséquent $\mu_2(D') > \mu_2(D)$, contredisant une fois de plus le choix de D . Ceci achève la preuve de l'assertion.

Il reste à montrer que des diviseurs v_0 -réduits distincts ne peuvent pas être équivalents. Supposons par l'absurde que nous ayons des diviseurs v_0 -réduits D et D' tels que $D \sim D'$ et $D \neq D'$. Soit $f \in \mathcal{M}(G)$ une fonction pour laquelle $D' - D = \Delta(f)$. Alors f est non constante, et par symétrie nous pouvons supposer que $f(v) > f(v_0)$ pour un certain $v \in V(G)$. Soit A l'ensemble de tous les sommets $v \in V(G)$ pour lesquels $f(v)$ est maximal. Alors $v_0 \notin A$, et pour tout $v \in A$ nous avons

$$0 \leq D(v) = D'(v) - \sum_{e=vw \in E_v} (f(v) - f(w)) \leq D'(v) - \text{outdeg}_A(v) .$$

Ainsi $D'(v) \geq \text{outdeg}_A(v)$ pour tout $v \in A$, contredisant l'hypothèse que D' est v_0 -réduit. $\square$

3.2. Preuve du théorème de Riemann-Roch

Par le théorème 6, afin de prouver le théorème de Riemann-Roch pour les graphes (théorème 4), il suffit de vérifier les propriétés (RR1) et (RR2) lorsque $X = G$ est un graphe et $\sim$ désigne l'équivalence linéaire des diviseurs. Ceci sera accompli en analysant une certaine famille de diviseurs de degré $g - 1$ sur G .

Pour chaque ordre linéaire (c'est-à-dire total) $<_P$ sur $V(G)$, nous définissons

$$\nu_P = \sum_{v \in V(G)} (|\{e = vw \in E(G) : w <_P v\}| - 1)(v).$$

Il est clair que $\deg(\nu_P) = |E(G)| - |V(G)| = g - 1$.

Lemme 10. *Pour tout ordre linéaire $<_P$ sur $V(G)$ nous avons $\nu_P \in \mathcal{N}$.*

Démonstration. Soit $D \in \text{Div}(G)$ un diviseur quelconque de la forme $D = \nu_P - \Delta(f)$ pour une certaine $f \in \mathcal{M}(G)$.

Soit $V_f^{\max}$ l'ensemble des sommets $v \in G$ où f atteint sa valeur maximale, et soit u l'élément minimal de $V_f^{\max}$ par rapport à l'ordre $<_P$. Alors $f(w) \leq f(u)$ pour tout $w \in V(G)$, et si $w <_P u$

alors $f(w) < f(u)$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
D(u) &= (|\{e = uw \in E(G) : w <_P u\}| - 1) - \sum_{e=uw \in E(G)} (f(u) - f(w)) \\
&= -1 + \sum_{\substack{e=uw \in E(G) \\ u <_P w}} (f(w) - f(u)) + \sum_{\substack{e=uw \in E(G) \\ w <_P u}} (f(w) - f(u) + 1) \\
&\leq -1,
\end{aligned}$$

puisque chaque terme de ces sommes est non positif par le choix de u . Il s'ensuit que ν_P n'est équivalent à aucun diviseur effectif. $\square$

Théorème 11. *Pour tout $D \in \text{Div}(G)$, exactement l'une des deux éventualités suivantes a lieu*

(N1) $r(D) \geq 0$; ou

(N2) $r(\nu_P - D) \geq 0$ pour un certain ordre $<_P$ sur $V(G)$.

Démonstration. Choisissons $v_0 \in V(G)$. Par la proposition 9, nous pouvons supposer que D est v_0 -réduit. Nous définissons $v_1, v_2, \dots, v_{|V(G)|-1}$ inductivement comme suit. Si $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ sont définis, soit $A_k = V(G) - \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$, et soit $v_k \in A_k$ choisi de telle sorte que $D(v_k) < \text{outdeg}_{A_k}(v_k)$. Soit $<_P$ l'ordre linéaire sur $V(G)$ tel que $v_i <_P v_j$ si et seulement si $i < j$.

Pour tout $1 \leq k \leq |V(G)| - 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
D(v_k) &\leq \text{outdeg}_{A_k}(v_k) - 1 \\
&= |\{e = v_k v_j \in E(G) : j < k\}| - 1 \\
&= \nu_P(v_k).
\end{aligned}$$

Si $D(v_0) \geq 0$ alors nous avons $D \geq 0$ et (N1) est vraie. Si, d'un autre côté, $D(v_0) \leq -1$ alors $D \leq \nu_P$ et (N2) est vraie. Enfin, notons que si $r(D) \geq 0$ et $r(\nu_P - D) \geq 0$, alors $r(\nu_P) \geq 0$ par le lemme 5, contredisant le lemme 10. $\square$

Comme conséquence du lemme 10 et du théorème 11, nous obtenons :

Corollaire 12. *Pour $D \in \text{Div}(G)$ avec $\deg(D) = g - 1$ nous avons $D \in \mathcal{N}$ si et seulement si il existe un ordre linéaire $<_P$ sur $V(G)$ tel que $D \sim \nu_P$.*

Démonstration. Il suffit de noter que si $\nu_P - D \sim E$ avec $E \geq 0$, alors $\deg(E) = 0$ et donc $E = 0$, de sorte que $D \sim \nu_P$. $\square$

Nous pouvons maintenant prouver notre version graphe-théorique du théorème de Riemann-Roch.

Preuve du théorème 4. Par le théorème 6, il suffit de prouver que les conditions (RR1) et (RR2) sont satisfaites.

Soit $D \in \text{Div}(G)$, et supposons d'abord que $r(D) \geq 0$. Alors pour tout $\nu \in \mathcal{N}$ nous avons $r(\nu - D) = -1$, et donc $\epsilon(D) + \epsilon(\nu - D) = 0 + 1 = 1$ et (RR1) est vraie. Supposons, d'un autre côté, que $r(D) < 0$. Alors par le théorème 11, nous devons avoir $r(\nu_P - D) \geq 0$ pour un

certain ordre $<_P$ sur $V(G)$, et alors $\epsilon(D) + \epsilon(\nu_P - D) = 1 + 0 = 1$. Comme $\nu_P \in \mathcal{N}$ par le lemme 10, il s'ensuit une fois de plus que (RR1) est vraie.

Pour prouver (RR2), il suffit de montrer que pour tout $D \in \mathcal{N}$ nous avons $K - D \in \mathcal{N}$. Par le corollaire 12, nous avons $D \sim \nu_P$ pour un certain ordre linéaire $<_P$ sur $V(G)$. Soit $\bar{P}$ le *renversé* de P (c'est-à-dire, $v <_P w \Leftrightarrow w <_{\bar{P}} v$). Alors pour tout $v \in V(G)$, nous avons

$$\begin{aligned} \nu_P(v) + \nu_{\bar{P}}(v) &= (|\{e = vw \in E(G) : w <_P v\}| - 1) \\ &\quad + (|\{e = vw \in E(G) : w <_{\bar{P}} v\}| - 1) \\ &= \deg(v) - 2 = K(v) . \end{aligned}$$

Par conséquent $K - D \sim K - \nu_P = \nu_{\bar{P}} \in \mathcal{N}$. □

3.3. Conséquences du théorème de Riemann-Roch

Comme dans le cas des surfaces de Riemann, on peut déduire un certain nombre de conséquences intéressantes de la formule de Riemann-Roch. À titre d'exemple, nous prouvons un analogue graphethorique du théorème de Clifford (voir théorème VII.1.13 de [28]). Pour l'énoncé, nous disons qu'un diviseur D est *spécial* si $|K - D| \neq \emptyset$, et *non spécial* sinon.

Corollaire 13 (Théorème de Clifford pour les graphes). *Soit D un diviseur effectif spécial sur un graphe G . Alors*

$$r(D) \leq \frac{1}{2} \deg(D) .$$

Démonstration. Si D est effectif et spécial, alors $K - D$ est aussi effectif, et par le lemme 5 nous avons

$$r(D) + r(K - D) \leq r(K) = g - 1 .$$

D'un autre côté, par Riemann-Roch nous avons

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g .$$

En additionnant ces deux expressions, nous obtenons $2r(D) \leq \deg(D)$ comme voulu. □

Comme indiqué dans le § IV.5 de [18], ce qui est intéressant dans le théorème de Clifford est que pour un diviseur non spécial D , nous pouvons calculer $r(D)$ exactement comme une fonction de $\deg(D)$ en utilisant Riemann-Roch. Cependant, pour un diviseur spécial, $r(D)$ ne dépend pas seulement du degré. Il est donc utile de disposer d'une borne supérieure non triviale sur $r(D)$, et c'est ce que fournit le corollaire 13.

4. L'application d'Abel-Jacobi d'un graphe vers son jacobien

Soit G un graphe, soit $v_0 \in V(G)$ un point de base, et soit k un entier positif.

Dans cette section, nous discutons de l'injectivité et de la surjectivité de l'application $S_{v_0}^{(k)}$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les observations élémentaires suivantes :

- Lemme 14.** 1. $S_{v_0}^{(k)}$ est injective si et seulement si pour tous diviseurs effectifs D, D' de degré k avec $D \sim D'$, nous avons $D = D'$. Si $S_{v_0}^{(k)}$ est injective, alors $S_{v_0}^{(k')}$ est injective pour tout entier positif $k' \leq k$.
2. $S_{v_0}^{(k)}$ est surjective si et seulement si tout diviseur de degré k est linéairement équivalent à un diviseur effectif. Si $S_{v_0}^{(k)}$ est surjective, alors $S_{v_0}^{(k')}$ est surjective pour tout entier $k' \geq k$.

En particulier, le fait que $S_{v_0}^{(k)}$ soit injective (resp. surjective) est indépendant du point de base v_0 . Nous écrivons donc $S^{(k)}$ au lieu de $S_{v_0}^{(k)}$ dans ce qui suit.

4.1. Surjectivité des applications $S^{(k)}$

Nous rappelons l'énoncé du théorème 1 :

L'application $S^{(k)}$ est surjective si et seulement si $k \geq g$.

Preuve du théorème 1. C'est une conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour les graphes. Si D est un diviseur de degré $d \geq g$, alors comme $r(K - D) \geq -1$, Riemann-Roch implique que $r(D) \geq 0$, de sorte que D est linéairement équivalent à un diviseur effectif. Ainsi $S^{(d)}$ est surjective. (Alternativement, nous pouvons appliquer (RR1) directement : si $\deg(D) \geq g$, alors pour tout $\nu \in \mathcal{N}$ nous avons $\deg(\nu - D) < 0$ et donc $r(\nu - D) = -1$. Par (RR1) nous avons donc $r(D) \geq 0$).

Réciproquement, (RR1) implique que $\mathcal{N} \neq \emptyset$, et donc $S^{(g-1)}$ n'est pas surjective. $\square$

Remarque : Ce résultat était posé comme un problème non résolu p. 179 de [2].

4.2. Le jeu de tir de jetons revisité

Comme mentionné précédemment, les théorèmes 3 et 1 sont équivalents.

Pour le voir, nous notons le lemme facile suivant :

Lemme 15. Deux diviseurs D et D' sur G sont linéairement équivalents si et seulement s'il existe une suite de coups dans le jeu de tir de jetons qui transforme la configuration correspondant à D en la configuration correspondant à D' .

Démonstration. Une suite de coups dans le jeu de tir de jetons peut être encodée par la fonction $f \in \mathcal{M}(G)$ pour laquelle $f(v)$ est le nombre de fois que le sommet v “emprunte” un dollar moins le nombre de fois qu’il “prête” un dollar. (Notons que le jeu est “commutatif”, en ce sens que l’ordre des coups n’a pas d’importance.) La configuration finale, en partant de la configuration initiale D et en jouant les coups correspondant à f , est donnée par le diviseur $D + \Delta(f)$.

Ainsi les distributions de dollars réalisables à partir de la configuration initiale D sont précisément les diviseurs linéairement équivalents à D . $\square$

L'équivalence entre le théorème 3 et le théorème 1 est maintenant une conséquence immédiate du lemme 14(1), puisque comme nous l'avons déjà noté, il existe une stratégie gagnante dans le jeu de tir de jetons dont la configuration initiale correspond à D si et seulement si D est linéairement équivalent à un diviseur effectif.

En particulier, nous avons maintenant prouvé le théorème 3.

4.3. Injectivité des applications $S^{(k)}$

Nous rappelons l'énoncé du théorème 2.

L'application $S^{(k)}$ est injective si et seulement si G est $(k + 1)$ -arête-connexe.

Démonstration. Supposons que G soit $(k + 1)$ -arête-connexe. Choisissons $v_0 \in V(G)$ arbitrairement, et soit $D \in \text{Div}_+^k(G)$. Pour tout ensemble non vide $A \subseteq V(G) - \{v_0\}$, nous avons $\sum_{v \in A} D(v) \leq k < \sum_{v \in A} \text{outdeg}_A(v)$, car $\sum_{v \in A} \text{outdeg}_A(v)$ est égal à la taille de la coupe d'arêtes entre A et $V(G) - A$. Par conséquent $D(v) < \text{outdeg}_A(v)$ pour un certain $v \in A$. Il s'ensuit que D est v_0 -réduit, de sorte que par la proposition 9 nous déduisons qu'aucun deux diviseurs distincts de $\text{Div}_+^k(G)$ ne sont équivalents, et donc que l'application $S^{(k)}$ est injective.

Réciproquement, supposons que G ne soit pas $(k + 1)$ -arête-connexe. Soit $C \subseteq E(G)$ une coupe d'arêtes de taille $j \leq k$, et soit $X \subseteq V(G)$ l'une des composantes de $G - C$. Soit $D = \sum_{v \in X} |E_v \cap C|(v)$ et $D' = D - \Delta(\chi_X)$. Alors pour chaque $v \in V(G)$, nous avons

$$\begin{aligned} D'(v) &= |E_v \cap C| \cdot \chi_X(v) - \sum_{e=vw \in E_v} (\chi_X(v) - \chi_X(w)) \\ &= \begin{cases} 0 & v \in X \\ |\{e = vw \in E_v : w \in X\}| & v \notin X \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $D, D' \geq 0$, $D \sim D'$, et $D \neq D'$. Il s'ensuit que l'application $S^{(j)}$ n'est pas injective, et par conséquent $S^{(k)}$ non plus. $\square$

En particulier, S est injective si et seulement si toute arête de G est contenue dans un cycle.

Remarque : Dans la partie (iv) de la proposition 7 de [2], les auteurs affirment que S est injective si G a une connectivité par sommets au moins 2, et n'est pas le graphe constitué d'une arête reliant deux sommets.

Cependant, leur preuve contient une erreur (l'application $h : V \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qu'ils définissent n'est pas nécessairement harmonique). En tout cas, le théorème 2 pour $k = 1$ est un résultat plus précis.

4.4. Injectivité de l'application d'Abel-Jacobi via la théorie des circuits

Il existe une autre façon de voir que S est injective si et seulement si G est 2-arête-connexe en utilisant la théorie des réseaux électriques (que nous appelons désormais *théorie des circuits*).

Nous esquissons l'argument ici ; voir le § 15 de [4] pour quelques rappels sur les réseaux électriques.

Considérons G comme un circuit électrique où les arêtes sont des résistances de résistance 1, et soit $i_{v_0}^v(e)$ le courant circulant à travers l'arête orientée e lorsqu'une unité de courant entre dans le circuit en v et sort en v_0 .

Soient $d : C^0(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(G, \mathbb{R})$ et $d^* : C^1(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(G, \mathbb{R})$ les opérateurs usuels sur les cochaînes (voir le § 1 de [2]).

Par les lois de Kirchhoff, $i_{v_0}^v$ est l'unique élément i de $C^1(G, \mathbb{R}) \cap \text{Im}(d)$ pour lequel $d^*(i) = (v) - (v_0)$. Il résulte du fait que $d(C^0(G, \mathbb{Z})) = C^1(G, \mathbb{Z})$ que $i_{v_0}^v \in C^1(G, \mathbb{Z})$ si et seulement si $(v) - (v_0) \in d^*(C^1(G, \mathbb{Z})) = (d^*d)(C^0(G, \mathbb{Z}))$, ce qui se produit si et seulement si $S_{v_0}(v) = 0$.

La théorie des circuits implique que $0 < |i_{v_0}^v(e)| \leq 1$ pour toute arête e qui appartient à un chemin reliant v et v_0 . En d'autres termes, la magnitude du flux de courant est au plus 1 partout dans le circuit, et un courant non nul doit circuler le long de tout chemin de v à v_0 .

Rappelons qu'un graphe G est 2-arête-connexe si et seulement si toute arête de G est contenue dans un cycle. Donc si G est 2-arête-connexe, alors la théorie des circuits implique que $|i_{v_0}^v(e)| < 1$ pour toute arête e appartenant à un chemin reliant v et v_0 .

(Un certain courant circule le long de chaque chemin de v à v_0 , et il y a au moins deux tels chemins arête-disjoints.) Par conséquent $i_{v_0}^v \notin C^1(G, \mathbb{Z})$, donc $S_{v_0}(v) \neq 0$. Comme $S_{v_0}(v) - S_{v_0}(v') = S_{v'}(v)$, cela implique que S_{v_0} est injective.

Réciproquement, si une arête e' de G n'est contenue dans aucun cycle, alors en notant v, v' les extrémités de e' , il résulte de la théorie des circuits que

$$i_{v_0}^v(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent $S_{v_0}(v) = S_{v_0}(v')$ et S_{v_0} n'est pas injective.

Remarque : un argument similaire est donné dans le § 9 de [12], bien que le lien avec le jacobien d'un graphe fini ne soit pas explicitement mentionné. Encore une autre preuve de l'énoncé " S est injective si et seulement si G est 2-arête-connexe" peut être trouvée dans le corollaire 2.3 de [23] (où le résultat est attribué à Hans Gerd Evertz).

L'argument de la théorie des circuits nous dit en fait quelque chose de plus précis sur l'échec de l'injectivité de S sur un graphe général G . Soit $\overline{G}$ le graphe obtenu en contractant toute arête de G qui ne fait pas partie d'un cycle, et soit $\rho : G \rightarrow \overline{G}$ l'application naturelle.

Lemme 16. $\rho(v_1) = \rho(v_2)$ si et seulement si $(v_1) \sim (v_2)$.

Démonstration. $\rho(v_1) = \rho(v_2)$ si et seulement s'il existe un chemin de v_1 à v_2 dans G , dont aucune arête n'appartient à un cycle. Par la théorie des circuits, cela se produit si et seulement s'il existe un flux de courant unitaire de v_1 à v_2 qui est entier le long de chaque arête. Par la discussion ci-dessus, cela se produit si et seulement si $(v_1) \sim (v_2)$. $\square$

Comme conséquence du lemme 16 et du théorème 2, nous obtenons :

Corollaire 17. Pour tout graphe G et tout point de base $v_0 \in G$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & \overline{G} \\ s \downarrow & & \downarrow \overline{s} \\ \text{Jac}(G) & \xrightarrow[\cong]{\rho_*} & \text{Jac}(\overline{G}) \end{array}$$

dans lequel ρ_* est un isomorphisme, ρ est surjective, et $\overline{S} = \overline{S}_{\rho(v_0)}$ est injective.

Remarque

(i) Il n'est pas difficile de donner une preuve rigoureuse du corollaire 17 qui ne repose pas sur la théorie des circuits en montrant que l'application naturelle $\rho_* : \text{Div}(G) \rightarrow \text{Div}(G')$ donnée par $\rho_*(\sum a_v(v)) = \sum a_v(\rho(v))$ envoie les diviseurs principaux sur des diviseurs principaux et induit une bijection $\text{Jac}(G) \rightarrow \text{Jac}(G')$. Nous laissons cela comme exercice au lecteur intéressé.

(ii) Le théorème 2 et le corollaire 17 suggèrent que du point de vue de la théorie d'Abel-Jacobi, le “bon” analogue d'une surface de Riemann est un graphe 2-arête-connexe. Ce point de vue résonne avec la classification des surfaces de Riemann par genre.

Par exemple, il existe une unique surface de Riemann de genre 0 (la sphère de Riemann), et il existe un unique graphe 2-arête-connexe de genre 0 (le graphe avec un sommet et aucune arête). De même, les surfaces de Riemann de genre 1 sont classifiées à isomorphisme près par un seul nombre complexe connu sous le nom de “ j -invariant”, et un graphe 2-arête-connexe de genre 1 est isomorphe à un cycle de longueur $n \geq 2$, donc est déterminé à isomorphisme près par l'entier n .

5. Compléments

5.1. Morphismes entre graphes

En géométrie algébrique, on s'intéresse généralement non seulement aux surfaces de Riemann elles-mêmes mais aussi aux applications holomorphes entre elles. L'analogue graphe-théorique le plus général d'une application holomorphe entre surfaces de Riemann dans le contexte du présent article semble être la notion de *morphisme harmonique*, telle que définie dans [41]. Pour un morphisme harmonique non constant $f : X_1 \rightarrow X_2$, il existe un analogue graphe-théorique de la *formule de Riemann-Hurwitz* classique reliant le diviseur canonique sur X_1 au tiré en arrière du diviseur canonique sur X_2 .

De plus, un morphisme harmonique non constant $f : X_1 \rightarrow X_2$ induit des applications $f_* : \text{Jac}(X_1) \rightarrow \text{Jac}(X_2)$ et $f^* : \text{Jac}(X_2) \rightarrow \text{Jac}(X_1)$ entre les jacobiens de X_1 et X_2 de manière fonctorielle.

Nous discuterons de ces questions et d'autres, y compris plusieurs caractérisations des graphes “hyperelliptiques”, dans un article ultérieur.

5.2. Généralisations

Il y a quelques façons évidentes dont on pourrait tenter de généraliser les résultats de cet article. Par exemple :

1. Nous n'avons traité dans cet article que des graphes finis non pondérés, mais il serait intéressant de généraliser nos résultats à certains graphes infinis, ainsi qu'aux graphes pondérés et/ou métriques.

2. La quantité $r(D) - r(K - D)$ apparaissant dans le théorème 4 peut-elle être interprétée de manière naturelle comme une caractéristique d'Euler ? En d'autres termes, existe-t-il un théorème de dualité de Serre pour les graphes ?

3. On pourrait essayer de généraliser certains des résultats de cet article à des complexes simpliciaux de dimension supérieure. Par exemple, existe-t-il une généralisation en dimension supérieure du théorème 4 analogue au théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch en géométrie algébrique ?

5.3. Autres théorèmes de Riemann-Roch

1. Les graphes métriques sont étroitement liés aux “courbes tropicales”, et dans ce contexte Mikhalkin et Zharkov ont récemment annoncé un théorème d'Abel-Jacobi tropical et une inégalité de Riemann-Roch tropicale (voir le § 5.2 de [27]). Il semble cependant que leur définition de $r(D)$ soit différente de la nôtre (ceci est lié à la discussion de la remarque 1.6.).

2. Il existe une formule de Riemann-Roch en géométrie torique ayant trait aux points entiers et aux volumes de polytopes (voir, par exemple, le § 5.3 de [14]).

Notre théorème 4 semble être de nature plutôt différente.

5.4. Liens avec la théorie des nombres

La motivation initiale du premier auteur pour examiner les questions de cet article provenait de liens avec la théorie des nombres. Nous discutons brièvement de quelques-uns de ces liens.

1. Le jacobien d'un graphe fini apparaît naturellement dans la branche de la théorie des nombres connue sous le nom de géométrie arithmétique. Un exemple est le théorème de Raynaud [34] reliant un modèle régulier propre semi-stable $\mathcal{X}$ pour une courbe X sur un anneau de valuation discrète au groupe des composantes connexes Φ de la fibre spéciale du modèle de Néron du jacobien de X . Bien que cela ne soit pas habituellement énoncé ainsi, le résultat de Raynaud dit essentiellement que Φ est canoniquement isomorphe au jacobien du graphe dual de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$.

Voir [12, 21, 22, 23] pour plus de détails et de discussions.

Le théorème de Raynaud joue un rôle de soutien important dans un certain nombre d'articles fondateurs en théorie des nombres (voir, par exemple, [24] et [35]).

2. Le diviseur canonique K sur un graphe, tel que défini en (4), joue un rôle prominent dans le raffinement de Zhang de l'appariement d'intersection d'Arakelov sur une surface arithmétique (voir [43]).

3. Par sa définition comme “groupe de Picard”, le jacobien d'un graphe fini G peut être considéré comme analogue au groupe des classes d'idéaux d'un corps de nombres.

En particulier, le nombre $\kappa(G)$ d'arbres couvrants d'un graphe G , qui est l'ordre de $\text{Jac}(G)$, est analogue au nombre de classes d'un corps de nombres.

Cette analogie apparaît explicitement dans un analogue graphe-théorique (impliquant la fonction zêta d'Ihara de G) de la formule analytique du nombre de classes pour la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres, voir [19, p.11].

Voir aussi [20, 36, 37, 38] pour plus d'informations sur la fonction zêta d'Ihara d'un graphe.

5.5. Le jeu de tir de jetons de Björner-Lovász-Shor

Dans cette section, nous décrivons quelques liens entre notre jeu de tir de jetons, tel que décrit dans le § 1.5., et le jeu précédemment étudié par Björner, Lovász et Shor dans [9]. Afin de distinguer les deux, nous appelons notre jeu le “jeu de tir de jetons non contraint”, et le jeu de [9] le “jeu de tir de jetons contraint”.

Le jeu de tir de jetons contraint se joue comme suit. Chaque sommet d'un graphe (connexe) donné G commence avec une quantité non négative de jetons, et un coup consiste à choisir un sommet ayant au moins autant de jetons que son degré, et à lui faire envoyer un jeton à chacun de ses voisins (auquel cas nous disons que le sommet “tire”). Le jeu se termine lorsqu'aucun sommet ne peut tirer. Les résultats principaux de [9] sont les deux théorèmes suivants :

Théorème 18 (Théorème 2.1 de [9]). *Le caractère fini ou non fini du jeu de tir de jetons contraint, ainsi que la configuration terminale et le nombre total de coups lorsque le jeu est fini, sont indépendants des coups particuliers effectués.*

Théorème 19 (Théorème 3.3 de [9]). *Soit N le nombre de jetons présents à tout moment durant le jeu de tir de jetons contraint.*

- (a) *Si $N > 2|E(G)| - |V(G)|$, le jeu est infini.*
- (b) *Si $|E(G)| \leq N \leq 2|E(G)| - |V(G)|$, alors il existe une configuration initiale garantissant une terminaison finie, et aussi une garantissant un jeu infini.*
- (c) *Si $N < |E(G)|$, le jeu se termine en un nombre fini de coups.*

Nous n'avons pas grand-chose de nouveau à dire sur le théorème 18. Cependant, nous montrerons que le théorème 19 peut être déduit du théorème 3, et réciproquement que le théorème 19 implique le cas particulier du théorème 3 dans lequel la configuration initiale D satisfait $D(v) \leq \deg(v) - 1$ pour tout $v \in V(G)$.

Le résultat nécessaire pour relier les deux jeux est le suivant :

Lemme 20. *Une stratégie gagnante existe dans le jeu de tir de jetons non contraint avec configuration initiale D si et seulement s'il existe une suite d'emprunts par des sommets ayant un nombre négatif de dollars qui transforme D en un diviseur effectif.*

Démonstration. Comme une direction est évidente, il suffit de montrer que si $D \sim E$ avec $E \geq 0$, alors nous pouvons passer de D à un diviseur effectif E' via une suite (éventuellement vide) d'emprunts par des sommets ayant un nombre négatif de dollars. Comme $D \sim E$, nous avons $E = D + \Delta(f)$ pour une certaine $f \in \mathcal{M}(G)$.

Soit $E' = D + \Delta(f')$ choisi de telle sorte que :

- (i) E' peut être atteint à partir de D via une suite (éventuellement vide) d'emprunts par des sommets ayant un nombre négatif de dollars ;
- (ii) $f' \leq f$; et
- (iii) $\sum_{v \in V(G)} f'(v)$ est maximal sous les conditions (i) et (ii).

Nous devons avoir $E'(v) \geq 0$ pour tout $v \in V(G)$ tel que $f'(v) < f(v)$, sinon la configuration $E' + \Delta(\chi_{\{v\}})$ obtenue à partir de E' en faisant emprunter un dollar à v auprès de chacun de ses voisins contredirait le choix de E' . De plus, $E'(v) \geq E(v) \geq 0$ pour tout $v \in V(G)$ tel que $f'(v) = f(v)$. Par conséquent E' est effectif, et le lemme est prouvé. $\square$

Comme conséquence du lemme 20, nous pouvons montrer que les deux jeux de tir de jetons sont reliés par une correspondance simple.

Pour $D \in \text{Div}(G)$, définissons $D^* = K^+ - D$, où

$$K^+ = \sum_{v \in V(G)} (\deg(v) - 1)(v).$$

Explicitement, si $D = \sum a_v(v) \in \text{Div}(G)$, alors $D^* = \sum a_v^*(v)$, où $a_v^* = \deg(v) - 1 - a_v$.

Notons que $a_v^* \geq 0$ si et seulement si $a_v \leq \deg(v) - 1$, et que $(D^*)^* = D$.

Corollaire 21. *Si $D = \sum a_v(v) \in \text{Div}(G)$ avec $a_v \leq \deg(v) - 1$ pour tout $v \in V(G)$, alors $|D| \neq \emptyset$ si et seulement s'il existe une suite légale de tirs dans le jeu de tir de jetons contraint qui commence avec la configuration D^* et se termine en un nombre fini de coups.*

Démonstration. Par les lemmes 15 et 20, nous avons $|D| \neq \emptyset$ si et seulement s'il existe une suite d'emprunts par des sommets (pas nécessairement distincts) $v_1, \dots, v_k$ de G qui conduit à un diviseur non négatif $E = \sum e_v(v)$, et tels que seuls les sommets endettés empruntent. En utilisant les définitions, cela se produit si et seulement si tirer $v_1, \dots, v_k$ dans le jeu de tir de jetons contraint en commençant à D^* donne une suite légale de coups se terminant par un diviseur $E^* = \sum e_v^*(v)$ ayant $e_v^* \leq \deg(v) - 1$ pour tout $v \in V(G)$. $\square$

Avec l'aide du corollaire 21, nous pouvons utiliser le théorème 3 pour donner une preuve alternative du théorème 19. En effet, supposons que le jeu de tir de jetons contraint commence avec une configuration D^* avec $\deg(D^*) = N$. Alors $\deg(D) = 2|E(G)| - |V(G)| - N$, et par le théorème 3, le corollaire 21, et le fait que $|D'| = \emptyset$ chaque fois que $\deg(D') < 0$, nous voyons que :

- (a) Si $\deg(D) < 0$, le jeu est infini.

(b) Si $0 \leq \deg(D) \leq |E(G)| - |V(G)| = g - 1$, alors il existe une configuration initiale garantissant une terminaison finie, et aussi une garantissant un jeu infini.

(c) Si $\deg(D) > |E(G)| - |V(G)| = g - 1$, le jeu se termine en un nombre fini de coups.

Ceci implique clairement le théorème 19. Le même raisonnement montre que le théorème 19 implique le théorème 3 dans le cas particulier où $D(v) \leq \deg(v) - 1$ pour tout $v \in V(G)$.

Remarque :

(i) Le théorème 1 de [40] fournit une preuve courte et élégante du théorème 18, et peut aussi être utilisé pour montrer que dans le jeu de tir de jetons non contraint avec configuration initiale D , toute suite d'emprunts par des sommets ayant un nombre négatif de dollars est soit infinie (si $|D| = \emptyset$) soit se termine en le même nombre de coups (lorsque $|D| \neq \emptyset$). Dans ce dernier cas, tout comme dans le jeu de tir de jetons contraint, la configuration terminale est indépendante des coups particuliers effectués.

(ii) Si une suite (ou de façon équivalente, toute suite) d'emprunts par des sommets endettés commençant avec la configuration initiale D se termine, alors par un argument de [39] elle se termine en au plus $\deg^+(D)d(G)|V(G)|$ étapes, où $d(G)$ désigne le diamètre de G , c'est-à-dire la distance maximale entre deux sommets de G . Ainsi il existe un algorithme pour déterminer si $|D| = \emptyset$ dont le temps d'exécution est borné supérieurement par $\deg^+(D)d(G)|V(G)|$.

5.6. Diviseurs réduits et configurations critiques

Dans [5, 6] (voir aussi chapitre 14 de [16]), Biggs étudie le *groupe critique* d'un graphe, qu'il définit en termes d'un certain jeu de tir de jetons joué sur les sommets du graphe.

L'un des résultats de Biggs est que le groupe critique est isomorphe à $\text{Jac}(G)$. Dans cette section, nous décrivons une correspondance bijective entre les éléments du groupe critique de Biggs et les diviseurs v_0 -réduits, tels que définis dans le § 3.1..

Pour ce faire, nous devons d'abord traduire les définitions de Biggs dans le langage des diviseurs.

Soit $v_0 \in V(G)$ un sommet de base fixé, et soient $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ un ordre des sommets de $V(G) - \{v_0\}$, où $n = |V(G)|$. Nous disons qu'un diviseur D est *v_0 -critique par rapport à l'ordre* $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ si pour tout $v \in V(G) - \{v_0\}$ nous avons $0 \leq D(v) < \deg(v) - 1$, et si pour tout $1 \leq k \leq n - 1$ nous avons $D_k(v) \geq 0$, où

$$D_k = D - \sum_{i=0}^k \Delta(\chi_{\{v_i\}}).$$

Nous disons qu'un diviseur D est *v_0 -critique* s'il est v_0 -critique par rapport à un certain ordre de $V(G) - \{v_0\}$.

Nous signalons quelques différences techniques entre la définition ci-dessus et la définition donnée dans [5]. Dans [5], seules les configurations pour lesquelles le montant total d'argent est nul

sont considérées. De plus, la définition d'une configuration critique donnée dans [5], lorsqu'elle est traduite directement dans le langage des diviseurs, semblerait légèrement différente de la nôtre; cependant, les deux définitions sont en fait équivalentes par le lemme 2.6 de [5].

Il résulte des résultats de [5] et [6] que, étant donné $v_0 \in V(G)$, toute classe d'équivalence de $\text{Div}(G)$ contient un unique diviseur v_0 -critique. Cette observation suggère une relation entre les diviseurs v_0 -réduits et v_0 -critiques. Dans le lemme suivant, nous montrons qu'il existe en fait une bijection naturelle entre les deux.

Lemme 22. *Un diviseur D est v_0 -réduit si et seulement si le diviseur $D^* = K^+ - D$ est v_0 -critique.*

Démonstration. Soit $n = |V(G)|$. Supposons que D soit v_0 -réduit, et définissons $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ comme dans la preuve du théorème 11. Nous affirmons que D^* est v_0 -critique par rapport à cet ordre de $V(G) - \{v_0\}$.

Écrivons D_k^* pour $(D^*)_k = K^+ - D - \Delta(\chi_{B_k})$, où $B_k = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Soit $v \in V(G) - \{v_0\}$. Nous avons $0 \leq D(v) < \text{outdeg}_{\{v\}}(v) = \deg(v)$ et donc $0 \leq D^*(v) < \deg(v)$. Il reste à prouver que $0 \leq D_k^*(v)$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$.

Si $v \notin B_k$, alors $D_k^*(v) \geq D^*(v) \geq 0$. Sinon $v = v_l$ pour un certain $0 < l \leq k$, et

$$\begin{aligned} D_k^*(v_l) &\geq D_l^*(v_l) = \deg(v_l) - 1 - D(v_l) - \text{outdeg}_{B_l}(v_l) \\ &= (\deg(v_l) - \text{outdeg}_{B_l}(v_l)) - D(v_l) - 1 \\ &= \text{outdeg}_{V(G)-B_{l-1}}(v_l) - D(v_l) - 1 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de la définition de v_l . (Ici nous avons utilisé le fait que si $A \subseteq V(G)$, alors $\text{outdeg}_A(v) + \text{outdeg}_{V(G)-A}(v) = \deg(v)$ pour tout $v \in V(G)$, et si $v \in A$, alors $\text{outdeg}_A(v) = \text{outdeg}_{A-\{v\}}(v)$.) Il s'ensuit que D^* est v_0 -critique par rapport à l'ordre donné, comme voulu.

Supposons maintenant que D^* soit v_0 -critique par rapport à l'ordre $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Considérons un sous-ensemble non vide $A \subseteq V(G) - \{v_0\}$, et soit v_l le sommet de A ayant le plus petit indice. Nous avons

$$0 \leq D_l^*(v_l) = \text{outdeg}_{V(G)-B_{l-1}}(v_l) - D(v_l) - 1,$$

où B_{l-1} est défini comme ci-dessus. De plus, $B_{l-1} \cap A = \emptyset$, et donc

$$D(v_l) < \text{outdeg}_{V(G)-B_{l-1}}(v_l) \leq \text{outdeg}_A(v_l).$$

Comme $A \subseteq V(G) - \{v_0\}$ était arbitraire, nous concluons que D est v_0 -réduit. $\square$

Remarque : le lemme 22 explique certains des parallèles trouvés dans la littérature entre certains résultats concernant les fonctions de stationnement G et les configurations critiques. Comme deux exemples, nous mentionnons :

- (i) La construction de bijections explicites entre les fonctions de stationnement G et les arbres couvrants de [11], et entre les configurations critiques et les arbres couvrants dans [7].
- (ii) La relation entre les fonctions de stationnement G et le polynôme de Tutte, telle que décrite dans [32], et entre les configurations critiques et le polynôme de Tutte, telle que décrite dans [26] et [6].

A Surfaces de Riemann et leurs jacobiens

La théorie des surfaces de Riemann et de leurs jacobiens est l'une des réalisations majeures des mathématiques du 19^e siècle, et elle continue encore aujourd'hui d'avoir des applications importantes. Nous ne pouvons pas espérer donner au lecteur un aperçu complet de ce vaste sujet, nous ne ferons donc qu'effleurer quelques-uns des points saillants de la théorie afin de dégager les liens avec la théorie des graphes. Nous recommandons [28] comme bonne introduction à la théorie des surfaces de Riemann et de leurs jacobiens ; voir aussi [1, 13, 17, 18, 29, 30].

Une *surface de Riemann* (compacte) X est une variété complexe connexe de dimension un, c'est-à-dire une variété réelle compacte connexe de dimension deux munie d'un atlas maximal $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ pour lequel les fonctions de transition

$$f_{\alpha\beta} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont holomorphes chaque fois que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

L'exemple le plus simple de surface de Riemann est la *sphère de Riemann* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Comme une surface de Riemann ressemble localement à un ouvert de $\mathbb{C}$, il existe une notion naturelle de ce que signifie pour une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ (resp. $f : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) d'être *holomorphe* (resp. *méromorphe*) : nous disons que f est holomorphe (resp. méromorphe) si $f \circ z^{-1}$ est holomorphe (resp. méromorphe) pour toute carte locale (U, z) .

Une 1-*forme* ω sur une surface de Riemann X est une collection de 1-formes $\omega_x dx + \omega_y dy$ sur chaque carte locale (U, z) (où $z = x + iy$) satisfaisant des relations de compatibilité appropriées sur les cartes qui se recouvrent. Une 1-forme est *holomorphe* si ω_x et ω_y sont holomorphes et $\omega_y = i\omega_x$. Localement, toute 1-forme holomorphe est égale à $f(z)dz$ avec f une fonction holomorphe. Enfin, une 1-forme est *méromorphe* si elle est holomorphe en dehors d'un ensemble fini de points et peut être représentée localement comme $f(z)dz$ avec f une fonction méromorphe.

Les surfaces de Riemann sont classifiées par un entier non négatif g appelé le *genre*. Il existe plusieurs caractérisations équivalentes du genre d'une surface de Riemann ; par exemple, $2g$ est le genre topologique de X , c'est-à-dire $\dim_{\mathbb{R}} H_1(X, \mathbb{R})$, et g est la dimension complexe de l'espace des 1-formes holomorphes sur X . Une surface de Riemann est de genre 0 si et seulement si elle est isomorphe à la sphère de Riemann.

Soit $\text{Div}(X)$ le groupe abélien libre sur l'ensemble des points de X ; les éléments de $\text{Div}(X)$ sont appelés *diviseurs* sur X et sont généralement écrits comme $\sum_{P \in X} a_P(P)$, où chaque a_P est un entier et tous les a_P sauf un nombre fini sont nuls. Un diviseur $E \in \text{Div}(X)$ est dit *effectif* si $E \geq 0$.

Il existe une *fonction degré* naturelle $\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ donnée pour $D = \sum a_P(P)$ par

$$\deg(D) = \sum_{P \in X} a_P .$$

Si $\mathcal{M}(X)$ désigne l'espace des fonctions méromorphes sur X , alors pour toute $f \in \mathcal{M}(X)$ non nulle et tout $P \in X$, on peut définir, en utilisant des coordonnées locales, l'*ordre d'annulation* $\text{ord}_P(f)$

de f en P .

Pour tous les $P \in X$ sauf un nombre fini, on a $\text{ord}_P(f) = 0$. Le *diviseur de f* est alors défini comme

$$\text{div}(f) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(f)(P) . \quad (7)$$

Le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle f est appelé un *diviseur principal*.

Un fait fondamental sur les surfaces de Riemann est que $\deg(\text{div}(f)) = 0$, ce qui signifie que f a autant de zéros que de pôles (en comptant les multiplicités). Par conséquent $\text{Prin}(X)$ (l'ensemble de tous les diviseurs principaux) est un sous-groupe du groupe $\text{Div}^0(X)$ des diviseurs de degré zéro.

Le jacobien $\text{Jac}(X)$ de X (aussi noté $\text{Pic}^0(X)$) est défini comme le groupe quotient

$$\text{Jac}(X) = \frac{\text{Div}^0(X)}{\text{Prin}(X)} . \quad (8)$$

Le groupe abélien $\text{Jac}(X)$ est naturellement muni d'une structure de variété complexe compacte (projective) de dimension g , c'est-à-dire que $\text{Jac}(X)$ est une *variété abélienne*.

Deux diviseurs D, D' sur X sont dits *linéairement équivalents* si leur différence est un diviseur principal. Ainsi $\text{Jac}(X)$ classe les diviseurs de degré zéro sur X modulo équivalence linéaire.

Si nous fixons un point de base $P_0 \in \text{Jac}(X)$, nous pouvons définir l'*application d'Abel-Jacobi* $S_{P_0} : X \rightarrow \text{Jac}(X)$ par la formule

$$S_{P_0}(P) = [(P) - (P_0)] , \quad (9)$$

où $[D]$ désigne la classe dans $\text{Jac}(X)$ de $D \in \text{Div}^0(X)$. Nous écrivons S au lieu de S_{P_0} lorsque le point de base P_0 est sous-entendu.

Nous pouvons aussi définir, pour chaque $k \geq 1$, l'application $S_{P_0}^{(k)} : \text{Div}_+^k(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$ par

$$S_{P_0}^{(k)}((P_1) + \cdots + (P_k)) = S_{P_0}(P_1) + S_{P_0}(P_2) + \cdots + S_{P_0}(P_k) ,$$

où $\text{Div}_+^k(X)$ désigne l'ensemble des diviseurs effectifs de degré k sur X .

L'application S_{v_0} peut être caractérisée par la propriété universelle suivante :

Si φ est une application holomorphe de X vers une variété abélienne A envoyant P_0 sur 0, alors il existe un unique homomorphisme $\psi : \text{Jac}(X) \rightarrow A$ tel que $\varphi = \psi \circ S_{P_0}$.

Un résultat classique sur les applications $S^{(k)}$ est le suivant :

Théorème 23. $S^{(k)}$ est surjective si et seulement si $k \geq g$.

La surjectivité de $S^{(g)}$ est généralement appelée *théorème d'inversion de Jacobi* ; elle est équivalente à l'énoncé que tout diviseur de degré au moins g sur X est linéairement équivalent à un diviseur effectif.

Un autre fait classique est :

Théorème 24. *L'application d'Abel-Jacobi S est injective si et seulement si $g \geq 1$.*

Soit D un diviseur sur X . Le *système linéaire associé à D* est défini comme l'ensemble $|D|$ de tous les diviseurs effectifs linéairement équivalents à D :

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) : E \geq 0, E \sim D\} .$$

La *dimension* $r(D)$ du système linéaire $|D|$ est définie comme un de moins que la dimension de $L(D)$, où

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \text{div}(f) \geq -D\}$$

est l'espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ constitué de toutes les fonctions méromorphes pour lesquelles $\text{div}(f) + D$ est effectif. Il existe une identification naturelle

$$|D| = (L(D) - \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

de $|D|$ avec la projectivisation de $L(D)$.

Il est facile de voir que $r(D)$ ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de D .

Remarque : Dans le cadre graphe-théorique, l'analogue de $L(D)$ n'est plus un espace vectoriel.

Il est donc utile d'avoir une caractérisation plus intrinsèque de la quantité $r(D)$ en termes de $|D|$ seulement. Une telle caractérisation est en fait bien connue (voir, par exemple, p.250 de [17] ou le §III.8.15 de [13]) : $r(D) \geq -1$ pour tout D , et pour chaque $s \geq 0$ nous avons $r(D) \geq s$ si et seulement si $|D - E| \neq \emptyset$ pour tout diviseur effectif E de degré s .

Étant donné une 1-forme méromorphe non nulle ω sur X , on peut définir (en utilisant des coordonnées locales) l'ordre d'annulation de ω en un point $P \in X$, et le diviseur $\text{div}(\omega)$ de ω est alors défini comme en (7).

Le degré de $\text{div}(\omega)$ est $2g - 2$ pour tout ω , et si ω, ω' sont toutes deux des 1-formes méromorphes non nulles sur X , le quotient ω/ω' est une fonction méromorphe non nulle sur X , et donc $\text{div}(\omega)$ et $\text{div}(\omega')$ sont linéairement équivalents.

La *classe de diviseur canonique* K_X sur X est définie comme la classe d'équivalence linéaire de $\text{div}(\omega)$ pour toute 1-forme méromorphe non nulle ω .

Le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème de Riemann-Roch*, est largement considéré comme le résultat le plus important de la théorie des surfaces de Riemann.

Théorème 25 (Riemann-Roch). *Soit X une surface de Riemann de classe canonique K , et soit D un diviseur sur X . Alors*

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) + 1 - g .$$

L'importance du théorème 25 provient du grand nombre d'applications qu'il a ; voir, par exemple, les chapitres VI et VII de [28] et le chapitre IV de [18].

Enfin, nous discutons du *théorème d'Abel*, qui donne une caractérisation alternative de $\text{Jac}(X)$ et de l'application d'Abel-Jacobi $S_{P_0} : X \rightarrow \text{Jac}(X)$.

Choisissons un point de base $P_0 \in X$, et soit $\Omega^1(X)$ l'espace des 1-formes holomorphes sur X . Toute classe d'homologie (entière) $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$ définit un élément $\int_\gamma$ de l'espace dual $\Omega^1(X)^*$ via l'intégration :

$$\int_\gamma : \omega \mapsto \int_\gamma \omega \in \mathbb{C} .$$

Une fonctionnelle linéaire $\lambda : \Omega^1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée une *période* si elle est de la forme $\int_\gamma$ pour un certain $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$. Nous notons Λ l'ensemble des périodes ; c'est un réseau dans $\Omega^1(X)^*$.

Pour chaque point $P \in X$, choisissons un chemin γ_P dans X de P_0 à P , et définissons $A_{P_0} : X \rightarrow \Omega^1(X)^*/\Lambda$ en envoyant P sur la classe de la fonctionnelle linéaire $\int_{\gamma_P}$ donnée par l'intégration le long de γ_P .

Ceci est bien défini, car si γ'_P est un autre chemin de P_0 à P , alors la 1-chaîne $\gamma_P - \gamma'_P$ est fermée et définit donc une classe d'homologie entière.

Nous pouvons étendre l'application A_{P_0} par linéarité en un homomorphisme de $\text{Div}(X)$ vers $\Omega^1(X)^*/\Lambda$. En restreignant à $\text{Div}^0(X)$, on obtient une application canonique $A : \text{Div}^0(X) \rightarrow \Omega^1(X)^*/\Lambda$ qui ne dépend pas du choix du point de base P_0 .

Théorème 26 (Théorème d'Abel). *L'application A est surjective, et son noyau est précisément $\text{Prin}(X)$. Par conséquent A induit un isomorphisme de $\text{Jac}(X)$ sur $\Omega^1(X)^*/\Lambda$. De plus, nous avons $A_{P_0} = A \circ S_{P_0}$, c'est-à-dire que A_{P_0} coïncide avec l'application d'Abel-Jacobi S_{P_0} sous l'identification de $\text{Jac}(X)$ et $\Omega^1(X)^*/\Lambda$ fournie par A .*

En particulier, si D est un diviseur de degré zéro sur X , alors D est le diviseur d'une fonction méromorphe sur X si et seulement si $A(D) = 0$.

B Théorème d'Abel pour les graphes

Pour être complet, nous rappelons de [2] un analogue graphe-théorique du théorème d'Abel (théorème 26). Voir aussi [31] et le § 28-29 de [4] pour plus de détails.

Choisissons une orientation du graphe G , c'est-à-dire que pour chaque arête e choisissons un sommet e_+ incident à e , et soit e_- l'autre sommet incident à e .

Soit $C^0(G, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué de toutes les fonctions $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

À l'intérieur de cet espace, nous avons le réseau $C^0(G, \mathbb{Z})$ constitué des fonctions à valeurs entières.

De même, nous pouvons considérer l'espace $C^1(G, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions $h : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ et le réseau correspondant $C^1(G, \mathbb{Z})$. Nous munissons $C^0(G, \mathbb{R})$ et $C^1(G, \mathbb{R})$ des produits scalaires donnés par

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{v \in V(G)} f_1(v) f_2(v) \quad (10)$$

et

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \sum_{e \in E(G)} h_1(e) h_2(e) . \quad (11)$$

Définissons la *différentielle extérieure* $d : C^0(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(G, \mathbb{R})$ par la formule

$$df(e) = f(e_+) - f(e_-) .$$

L'adjoint $d^* : C^1(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(G, \mathbb{R})$ de d par rapport aux produits scalaires (10) et (11) est donné par

$$(d^*h)(v) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e_+ = v}} h(e) - \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e_- = v}} h(e) .$$

Il est facile de vérifier que $\Delta = d^*d : C^0(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(G, \mathbb{R})$ est indépendant du choix de l'orientation, et peut être identifié à l'opérateur laplacien sur G , c'est-à-dire :

$$(d^*df)(v) = \deg(v)f(v) - \sum_{e=vw \in E_v} f(w) .$$

Il existe une décomposition orthogonale

$$C^1(G, \mathbb{R}) = \text{Ker}(d^*) \oplus \text{Im}(d) ,$$

où $\text{Ker}(d^*)$ est l'*espace des flots* (ou *espace des cycles*) et $\text{Im}(d)$ est l'*espace des coupes* (ou *espace des potentiels*).

Le *réseau des flots entiers* est défini comme $\Lambda^1(G) = \text{Ker}(d^*) \cap C^1(G, \mathbb{Z})$, et le *réseau des coupes entières* est défini comme $N^1(G) = \text{Im}(d) \cap C^1(G, \mathbb{Z})$.

Pour un réseau Λ dans un espace euclidien avec produit scalaire V , le *réseau dual* $\Lambda^\#$ est défini comme

$$\Lambda^\# = \{x \in V : \langle x, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda\} .$$

Un réseau Λ est dit *entier* si $\langle \lambda, \mu \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$; ceci est équivalent à exiger que $\Lambda \subseteq \Lambda^\#$. Clairement $\Lambda^1(G)$ et $N^1(G)$ sont des réseaux entiers.

Dans l'énoncé du théorème suivant, le dual de $\Lambda^1(G)$ (resp. $N^1(G)$) est défini par rapport à l'espace ambiant $\text{Ker}(d^*)$ (resp. $\text{Im}(d)$).

Théorème 27. *Les groupes $C^1(G, \mathbb{Z})/(\Lambda^1(G) \oplus N^1(G))$, $\Lambda^1(G)^\#/\Lambda^1(G)$, et $N^1(G)^\#/N^1(G)$ sont tous isomorphes.*

Choisissons un sommet de base $v_0 \in G$. On peut décrire une application $A_{v_0} : G \rightarrow J(G) := \Lambda^1(G)^\# / \Lambda^1(G)$ comme suit. Pour tout $v \in V(G)$, choisissons un chemin γ de v_0 à v , qui peut être identifié de manière évidente à un élément de $C^1(G, \mathbb{Z})$.

Si γ' est un autre chemin de v_0 à v , alors $\gamma - \gamma' \in \Lambda^1(G)$. Comme $\langle \gamma, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\lambda \in \Lambda^1(G)$, γ détermine un élément A_γ de $\Lambda^1(G)^\#$. Nous définissons $A_{v_0}(v)$ comme la classe de A_γ dans $\Lambda^1(G)^\# / \Lambda^1(G)$; ceci est indépendant du choix de γ .

Nous pouvons étendre l'application A_{v_0} par linéarité en un homomorphisme de $\text{Div}(G)$ vers $\Lambda^1(G)^\# / \Lambda^1(G)$. En restreignant à $\text{Div}^0(G)$, on obtient une application canonique $A : \text{Div}^0(G) \rightarrow J(G)$ qui ne dépend pas du choix du sommet de base v_0 .

Théorème 28 (Théorème d'Abel pour les graphes). *L'application A est surjective, et son noyau est précisément $\text{Prin}(G)$. Par conséquent A induit un isomorphisme de $\text{Jac}(G)$ sur $\Lambda^1(G)^\# / \Lambda^1(G)$. De plus, nous avons $A_{v_0} = A \circ S_{v_0}$, c'est-à-dire que A_{v_0} coïncide avec l'application d'Abel-Jacobi S_{v_0} définie par (3) sous l'identification de $\text{Jac}(G)$ et $J(G)$ fournie par A .*

Par conséquent, si D est un diviseur de degré zéro sur G , alors D est principal si et seulement si $A(D) = 0$. Pour les preuves des théorèmes 27 et 28, voir [2] et le § 24-29 de [4].

Remarque : les réseaux $\Lambda^1(G)$ et $N^1(G)$ ont un certain nombre de propriétés combinatoires intéressantes. Par exemple, il est montré dans les propositions 1 et 2 de [2] que $\Lambda^1(G)$ est pair si et seulement si G est biparti, et $N^1(G)$ est pair si et seulement si G est eulérien. De plus, la longueur du plus court vecteur non nul de $\Lambda^1(G)$ est la maille de G , et la longueur du plus court vecteur non nul de $N^1(G)$ est la connectivité par arêtes de G . Et bien sûr, il résulte du théorème 27 que $|\Lambda^1(G)^\# / \Lambda^1(G)|$ et $|N^1(G)^\# / N^1(G)|$ sont tous deux égaux au nombre d'arbres couvrants de G .

Références

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [2] R. Bacher, P. de la Harpe, and T. Nagnibeda. The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph. *Bull. Soc. Math. France*, 125(2) :167–198, 1997.
- [3] N. Biggs. *Algebraic graph theory*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1993.
- [4] N. Biggs. Algebraic potential theory on graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 29(6) :641–682, 1997.
- [5] N. Biggs. Chip-firing and the critical group of a graph. *J. Algebraic Combin.*, 9(1) :25–45, 1999.
- [6] N. Biggs. The Tutte polynomial as a growth function. *J. Algebraic Combin.*, 10(2) :115–133, 1999.
- [7] N. Biggs and P. Winkler. Chip-firing and the chromatic polynomial. preprint, 9 pages, 1997.
- [8] A. Björner and L. Lovász. Chip-firing games on directed graphs. *J. Algebraic Combin.*, 1(4) :305–328, 1992.
- [9] A. Björner, L. Lovász, and P. W. Shor. Chip-firing games on graphs. *European J. Combin.*, 12(4) :283–291, 1991.
- [10] B. Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [11] D. Chebikin and P. Pylyavskyy. A family of bijections between G -parking functions and spanning trees. *J. Combin. Theory Ser. A*, 110(1) :31–41, 2005.

- [12] S. J. Edixhoven. On Néron models, divisors and modular curves. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 13(2) :157–194, 1998.
- [13] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
- [14] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [15] S. Gaubert. Two lectures on max-plus algebra. preprint, 58 pages, 1998.
- [16] C. Godsil and G. Royle. *Algebraic graph theory*, volume 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [17] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [18] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [19] M. Horton, H. Stark, and A. Terras. What are zeta functions of graphs and what are they good for? In *Quantum graphs and their applications*, volume 415 of *Contemp. Math.*, pages 173–189. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [20] M. Kotani and T. Sunada. Zeta functions of finite graphs. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 7(1) :7–25, 2000.
- [21] D. J. Lorenzini. Arithmetical graphs. *Math. Ann.*, 285(3) :481–501, 1989.
- [22] D. J. Lorenzini. A finite group attached to the Laplacian of a graph. *Discrete Math.*, 91(3) :277–282, 1991.
- [23] D. J. Lorenzini. Arithmetical properties of Laplacians of graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 47(4) :281–306, 2000.
- [24] B. Mazur. Modular curves and the Eisenstein ideal. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (47) :33–186 (1978), 1977.
- [25] C. Merino. The chip-firing game. *Discrete Math.*, 302(1-3) :188–210, 2005.
- [26] C. Merino López. Chip firing and the Tutte polynomial. *Ann. Comb.*, 1(3) :253–259, 1997.
- [27] G. Mikhalkin. Tropical geometry and its applications. preprint. Available at <http://www.math.toronto.edu/mikha/icm.pdf>, 25 pages, 2006.
- [28] R. Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [29] D. Mumford. *Curves and their Jacobians*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1975.
- [30] V. Kumar Murty. *Introduction to abelian varieties*, volume 3 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [31] T. Nagnibeda. The Jacobian of a finite graph. In *Harmonic functions on trees and buildings (New York, 1995)*, volume 206 of *Contemp. Math.*, pages 149–151. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [32] J. Plautz and R. Calderer. G -parking functions and the Tutte polynomial. preprint. Available at <http://www.math.umn.edu/%7Ereiner/REU/PlautzReport.ps>, 3 pages, 2003.
- [33] A. Postnikov and B. Shapiro. Trees, parking functions, syzygies, and deformations of monomial ideals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(8) :3109–3142 (electronic), 2004.
- [34] M. Raynaud. Spécialisation du foncteur de Picard. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (38) :27–76, 1970.
- [35] K. A. Ribet. On modular representations of $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ arising from modular forms. *Invent. Math.*, 100(2) :431–476, 1990.
- [36] H. M. Stark and A. A. Terras. Zeta functions of finite graphs and coverings. *Adv. Math.*, 121(1) :124–165, 1996.
- [37] H. M. Stark and A. A. Terras. Zeta functions of finite graphs and coverings. II. *Adv. Math.*, 154(1) :132–195, 2000.
- [38] H. M. Stark and A. A. Terras. Zeta functions of finite graphs and coverings. III. *Adv. Math.*, 208(1) :467–489, 2007.
- [39] G. Tardos. Polynomial bound for a chip firing game on graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 1(3) :397–398, 1988.

- [40] M. Thorup. Firing games. preprint. Available at <http://citeseer.ist.psu.edu/thorup96firing.html>, 2 pages, 1996.
- [41] H. Urakawa. A discrete analogue of the harmonic morphism and Green kernel comparison theorems. *Glasg. Math. J.*, 42(3) :319–334, 2000.
- [42] J. van den Heuvel. Algorithmic aspects of a chip-firing game. *Combin. Probab. Comput.*, 10(6) :505–529, 2001.
- [43] S. Zhang. Admissible pairing on a curve. *Invent. Math.*, 112(1) :171–193, 1993.