Une preuve qu'Euler a manquée : évaluer $\zeta(2)$, la méthode facile

Tom M. Apoostol

R. Apéry [1] a été le premier à démontrer l'irrationnalité de

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

Motivé par la preuve d'Apéry, F. Beukers [2] a donné une preuve plus courte qui utilise des intégrales multiples pour établir l'irrationnalité d'à la fois $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$. Dans cette note, on montre que l'une des intégrales doubles considérée par Beukers,

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy,$$

peut être utilisée pour établir directement que $\zeta(2)=\pi^2/6$. Cette évaluation a été présentée par l'auteur pendant un certain nombre d'années en cours de calcul élémentaire, mais elle ne semble pas être enregistrée dans la littérature.

La relation entre l'intégrale suivante et $\zeta(2)$ s'obtient en développant l'intégrande en une série géométrique et en intégrant terme par terme. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^ny^ndxdy \\ &= \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n+1}dy=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\zeta(2). \end{aligned}$$

Maintenant on évalue l'intégrale d'une autre manière et on montre que $I=\pi^2/6$. On a simplement fait tourner les axes des coordonnées d'un angle de $\pi/4$ radians mesuré en tournant selon les aiguilles d'une montre en introduisant le changement de variables

$$x=\frac{u-v}{\sqrt{2}},\qquad y=\frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

de telle façon que $1-xy=(2-u^2+v^2)/2$. La nouvelle région d'intégration dans le plan uv est un carré avec deux sommets opposés situés en $(0,0)$ et $(\sqrt{2},0)$. En utilisant la symétrie de ce carré par rapport à l'axe u, on obtient

$$I=4\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\int_0^u\frac{dv}{2-u^2+v^2}\right)du+4\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{dv}{2-u^2+v^2}\right)du.$$

Puisque

$$\int_0^x\frac{dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{a}\text{ arc tan}\frac{x}{a}$$

The mathematical intelligencer, vol. 5, n° 3, 1983, Springer-Verlag, New-York. lien.

on a

$$\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \text{ arc tan} \frac{u}{\sqrt{2-u^2}}$$

et

$$\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \text{ arc tan } \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}$$

par conséquent

$$I = 4\int_0^{1/\sqrt{2}} \text{arc tan } \frac{u}{\sqrt{2-u^2}} \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} + 4\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \text{arc } \tan \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = I_1 + I_2.$$

disons. Posons $u = \sqrt{2}\sin\theta$ dans I_1 de telle façon que $du = \sqrt{2}\cos\theta \ d\theta = \sqrt{2-u^2} \ d\theta$, et $\tan\theta = u/\sqrt{2-u^2}$. Cela nous donne

$$I_1 = 4\int_0^{\pi/6} \theta \ d\theta = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Dans I_2, on pose $u = \sqrt{2}\cos 2\theta$ de telle façon que

$$du = -2\sqrt{2}\sin 2\theta \, d\theta = -2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2 2\theta} \, d\theta = -2\sqrt{2}\sqrt{1-u^2/2} \, d\theta = -2\sqrt{2-u^2} \, d\theta,$$

et

$$\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{\sqrt{2}(1-\cos 2\theta)}{\sqrt{2-2\ \cos^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{2\ \sin^2\theta}{2\ \cos^2\theta}} = \tan\theta,$$

par conséquent

$$I_2 = 8\int_0^{\pi/6} \theta \ d\theta = 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Et donc $I = I_1 + I_2 = 6\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$.

Note. Une autre évaluation de $\zeta(2)$ utilisant des double intégrales d'une manière moins évidente a été fournie par F. Goldscheider [3] en réponse à un problème posé par P. Stäckel. Il considère la double intégrale

$$P = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx \ dy}{1-xy} \quad \text{et} \quad Q = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx \ dy}{1+xy}$$

et montre d'abord que $P - Q = \frac{1}{2}P$ donc $P = 2Q$. D'un autre côté,

$$P + Q = \int_{-1}^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{1+xy}.$$

La substitution $u = y + \frac{1}{2}x(y^2-1)$ dans l'intégrale selon y convertit cela en

$$P + Q = \int_{-1}^1 du \ \int_0^1 \frac{dx}{1+2ux+x^2}.$$

Maintenant, posons $u = \cos\varphi$ de telle façon que $(\sin\varphi)/(1+2ux+x^2) = \dfrac{d}{dx}\left(\text{arc tan}\,\dfrac{\mathrm{x}+\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)$, par conséquent

$$P + Q = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi \, d\varphi = \frac{\pi^2}{4},$$

ce qui, avec $P = 2Q$, implique $P = \pi^2/6$.

Références

1. R. Apéry (1979) Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ *Astérisque* 61:11-13. Paris : Société Mathématique de France.

2. F. Beukers (1979) A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. Lon. Math. Soc.* 11:268-272.

3. F. Goldscheider (1913) *Arch. Math. Phys.* 20:323-324.

Institut de technologie de Californie
Pasadena, Californie 91125