

La théorie cohomologique des variétés algébriques abstraites

Alexander Grothendieck

Il y a moins de quatre ans que les méthodes cohomologiques (c'est-à-dire les méthodes de l'algèbre homologique) ont été introduites en géométrie algébrique dans l'article fondamental de Serre [12], et il semble déjà certain qu'elles vont envahir cette partie des mathématiques dans les années à venir, depuis les fondements jusqu'aux parties les plus avancées. Tout ce que nous pouvons faire ici est d'esquisser brièvement quelques-unes des idées et des résultats. Aucun d'entre eux n'a été publié sous sa forme définitive, mais la plupart ont pris naissance dans l'article de Serre ou ont été suggérés par lui.

Commençons par donner un aperçu des principaux thèmes de l'investigation cohomologique en géométrie algébrique, tels qu'ils apparaissent actuellement. La nécessité d'une théorie de la cohomologie pour les variétés algébriques "abstraites" a été soulignée pour la première fois par Weil, afin de pouvoir donner un sens précis à ses célèbres conjectures en géométrie diophantienne [21]. Le but initial était donc de trouver la "cohomologie de Weil" d'une variété algébrique, qui devrait avoir comme coefficients quelque chose "au moins aussi bon" qu'un corps de caractéristique 0, et posséder des propriétés formelles (par exemple dualité, formule de Künneth) permettant d'obtenir l'analogue de la "formule des points fixes" de Lefschetz. L'idée générale de Serre a été que la "topologie de Zariski" habituelle d'une variété (dans laquelle les fermés sont les sous-ensembles algébriques) convient pour appliquer les méthodes de la topologie algébrique. Sa première approche espérait fournir au moins les bons nombres de Betti d'une variété, étant évident dès le départ qu'elle ne pouvait pas être considérée comme la cohomologie de Weil elle-même, car le corps de coefficients pour la cohomologie était le corps de base de la variété, et donc pas en général de caractéristique 0. En fait, même l'espoir d'obtenir les "vrais" nombres de Betti a échoué, et il en a été de même pour d'autres tentatives de Serre [13] pour obtenir la cohomologie de Weil en prenant la cohomologie de la variété à valeurs non pas dans le faisceau des anneaux locaux eux-mêmes, mais dans les faisceaux de vecteurs de Witt construits sur ces derniers. Il obtient ainsi des modules sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt infinis sur le corps de base k , et $W(k)$ est un anneau de caractéristique 0 même si k est de caractéristique $p \neq 0$. Malheureusement, les modules ainsi obtenus sur $W(k)$ peuvent être infiniment engendrés, même lorsque la variété V est une variété abélienne [14]. Bien que des relations intéressantes doivent certainement exister entre ces groupes de cohomologie et les "vrais", il semble certain maintenant que la cohomologie de Weil doit être définie par une approche complètement différente. Une telle approche m'a été récemment suggérée par les liens entre la cohomologie des faisceaux et la cohomologie des groupes de Galois d'une part, et la classification des revêtements non ramifiés d'une variété d'autre part (comme expliqué de manière assez peu systématique dans l'article tentative de Serre au Mexique [13]), et par l'idée de Serre qu'un espace fibré principal

algébrique “raisonnable” de groupe structural G , défini sur une variété V , s’il n’est pas localement trivial, devrait devenir localement trivial sur un revêtement de V non ramifié en un point donné de V . Ceci a été le point de départ d’une définition de la cohomologie de Weil (faisant intervenir à la fois la cohomologie “spatiale” et la cohomologie galoisienne), qui semble être la bonne, et qui donne des indications claires sur la manière dont les conjectures de Weil peuvent être attaquées par la machinerie de l’algèbre homologique. Comme je n’ai pas encore commencé sérieusement ces investigations, et que de plus cette théorie a une saveur tout à fait distincte de celle de la théorie des faisceaux algébriques cohérents qui nous occupera maintenant, nous ne nous attarderons pas davantage sur la cohomologie de Weil. Remarquons seulement que la définition alludée a déjà été le point de départ d’une théorie de la dimension cohomologique des corps, développée récemment par Tate [19].

Le deuxième thème principal pour les méthodes cohomologiques est la théorie de la cohomologie des faisceaux algébriques cohérents, telle qu’initiée par Serre. Bien qu’inadéquate pour les buts de Weil, elle fournit actuellement une richesse de méthodes et de notions nouvelles, et donne la clé même pour des résultats que l’on ne pensait pas communément concerner les faisceaux, encore moins la cohomologie, tels que le théorème de Zariski sur les “fonctions holomorphes” et son “théorème principal” — qui peut être énoncé maintenant de manière plus satisfaisante, comme nous le verrons, et démontré par les mêmes méthodes élémentaires uniformes. Les parties principales de la théorie, actuellement, peuvent être listées comme suit :

- (a) Théorèmes généraux de finitude et de comportement asymptotique.
- (b) Théorèmes de dualité, incluant (respectivement identiques à) une théorie cohomologique des résidus.
- (c) Théorème de Riemann-Roch, incluant la théorie des classes de Chern pour les faisceaux algébriques cohérents.
- (d) Quelques résultats spéciaux, concernant principalement les variétés abéliennes.

Le troisième thème principal consiste en l’application des méthodes cohomologiques à l’algèbre locale. Initié par Koszul et Cartan-Eilenberg en liaison avec le “théorème des syzygies” de Hilbert, l’usage systématique de ces méthodes est principalement dû à Serre. Les résultats sont la caractérisation des anneaux locaux réguliers comme ceux dont la dimension cohomologique globale est finie, la clarification du théorème d’équidimensionalité de Cohen-Macaulay au moyen de la notion de codimension cohomologique [24], et surtout la possibilité de donner (pour la première fois semble-t-il) une théorie des intersections, vraiment satisfaisante par sa simplicité algébrique et sa généralité. Le résultat de Serre que nous venons de citer, selon lequel les anneaux locaux réguliers sont les seuls de dimension cohomologique globale finie, explique le fait que ce n’est que pour de tels anneaux locaux qu’existe une théorie satisfaisante des intersections. Je ne peux pas donner ici de détails sur ces sujets, ni sur divers résultats que j’ai obtenus au moyen d’une théorie locale de la dualité, qui semble être l’outil destiné à remplacer les formes différentielles dans le cas de caractéristiques inégales, et qui donne, dans le contexte général de l’algèbre commutative, une clarification de la notion de résidu, jusqu’ici très mal comprise. La motivation de ce dernier travail a été la tentative d’obtenir une théorie globale de la dualité en cohomologie pour les variétés algébriques admettant des singularités arbitraires, afin de pouvoir développer des formules d’intersection pour des cycles à singularités arbitraires, dans une variété algébrique non singulière, formules qui contiennent aussi une formule de Lefschetz mod p [9]. En fait, une fois obtenu un formalisme local convenable,

les énoncés globaux deviennent presque triviaux. En fait général, il apparaît que, dans une large mesure, les résultats “locaux” contiennent déjà un résultat global ; plus précisément, les résultats globaux sur les variétés de dimension n peuvent fréquemment être déduits des résultats locaux correspondants pour les anneaux de dimension de Krull $n + 1$.

Nous allons donc nous tourner maintenant vers quelques idées principales du deuxième thème, c’est-à-dire la théorie cohomologique des faisceaux algébriques cohérents. D’abord, je voudrais cependant souligner un point commun à tous les thèmes considérés (sauf peut-être (d)), et en fait à toutes les techniques standard en géométrie algébrique. À savoir, que le cadre naturel des notions traitées, et les méthodes utilisées, ne sont pas vraiment les variétés algébriques. Ainsi, nous savons qu’une variété algébrique affine de corps de base k est déterminée par son anneau de coordonnées, qui est une k -algèbre de type fini arbitraire sans éléments nilpotents ; par conséquent, tout énoncé concernant les variétés algébriques affines peut être vu aussi comme un énoncé concernant les anneaux A du type précédent. Or il apparaît que la plupart de ces énoncés ont un sens, et sont vrais, si l’on suppose seulement que A est commutatif unitaire, à condition de lui imposer parfois une restriction bénigne, comme d’être noethérien, par exemple. De la même manière, la plupart des résultats démontrés pour les anneaux locaux de la géométrie algébrique ont un sens et sont vrais pour des anneaux locaux noethériens arbitraires. D’ailleurs, fréquemment, alors qu’il semblait à première vue que l’énoncé n’avait de sens que lorsqu’un corps de base k intervenait, comme dans les questions où l’on considère des formes différentielles, un examen plus approfondi de la question a montré que cette impression était erronée, et qu’une meilleure compréhension est obtenue en remplaçant k par un anneau B tel que A soit une B -algèbre de type fini. Géométriquement, cela signifie qu’au lieu d’une seule variété algébrique affine V (définie par A), nous considérons une “application régulière” ou “morphisme” de V dans une autre variété affine W , et les propriétés de la variété V sont alors généralisées en propriétés d’un morphisme $V \rightarrow W$ (la notion “absolue” pour V étant obtenue à partir de la notion “relative” plus générale en prenant W réduit à un point). D’autre part, il ne faut pas empêcher les anneaux d’avoir des éléments nilpotents, et ne les exclure en aucun cas sans raisons sérieuses. Or, de même que les anneaux commutatifs arbitraires peuvent être considérés comme une généralisation propre des variétés algébriques affines, on peut trouver une généralisation correspondante convenable des variétés algébriques arbitraires (définies sur un corps arbitraire). Ce fut fait par Nagata [10] dans un cas particulier, mais suivant la définition des schémas donnée par Chevalley [5], il devait s’en tenir au cas irréductible, et sans éléments nilpotents. Le principe de la bonne définition se trouve encore dans l’article fondamental de Serre [12], et est le suivant. Si A est un anneau commutatif quelconque, alors l’ensemble $\text{Spec}(A)$ de tous les idéaux premiers de A peut être muni d’une topologie de manière classique, les sous-ensembles fermés consistant en les idéaux premiers qui contiennent un sous-ensemble donné de A . D’autre part, il y a un faisceau d’anneaux défini de manière naturelle sur $\text{Spec}(A)$, la fibre de ce faisceau au point p étant l’anneau local A_p . Plus généralement, tout module M sur A définit un faisceau de modules sur $\text{Spec}(A)$, dont la fibre au point p est le module localisé M_p sur A_p . Nous appelons maintenant pré-schéma un espace topologique X muni d’un faisceau d’anneaux $\mathcal{O}_X$ sur X , appelé son faisceau structural, tel que tout point de X ait un voisinage ouvert isomorphe à un certain $\text{Spec}(A)$. Si X et Y sont deux pré-schémas, un morphisme f de X dans Y est une application continue $f : X \rightarrow Y$, accompagnée d’un homomorphisme correspondant $f^* : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ pour les faisceaux structuraux, soumis à la condition : si $x \in X$, $y = f(x)$, alors l’image inverse par $f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ de l’idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ est l’idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,y}$. Si X et Y sont les spectres premiers d’anneaux A et B , alors on

peut montrer que les morphismes de X dans Y correspondent exactement aux homomorphismes d'anneaux de B dans A , comme il se doit.

Comme expliqué précédemment, si l'on considère des morphismes $f : X \rightarrow S$ avec un pré-schéma fixé S , S joue le rôle d'un corps de base. D'ailleurs, si $S = \text{Spec}(A)$, alors X est un pré-schéma sur S si et seulement si le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de A -algèbres. Dans la catégorie de tous les pré-schémas sur un S donné, il existe un produit (qui correspond au produit tensoriel d'algèbres sur un anneau commutatif A). En utilisant ceci, on peut définir des objets comme les pré-schémas de groupes, etc., sur un pré-schéma de base fixé S . On peut aussi utiliser les produits pour introduire une condition de séparation bénigne sur les pré-schémas, suggérée par la condition usuelle dans la définition des variétés algébriques, de sorte que l'on obtient ce qu'on peut appeler un schéma. Un schéma est dit noethérien s'il est réunion d'un nombre fini d'ouverts isomorphes aux spectres premiers d'anneaux noethériens. Un schéma X sur un autre S est dit de type fini sur S (ou le morphisme $f : X \rightarrow S$ est dit de type fini) si, pour tout ouvert affine U de S , $f^{-1}(U)$ est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines, correspondant à des algèbres de type fini sur l'anneau de U . La plupart des notions et des résultats de la géométrie algébrique usuelle peuvent maintenant être énoncés et démontrés dans ce nouveau contexte, à condition essentiellement que dans certaines questions on s'en tienne aux schémas noethériens et aux morphismes de type fini. Remarquons seulement ici que la notion de variété complète donne la notion de morphisme propre (qui, dans le cas de la géométrie algébrique sur les nombres complexes, est la même que propre au sens topologique usuel) : le morphisme $f : X \rightarrow S$ est dit propre s'il est de type fini, et si pour tout schéma noethérien Y sur S , la projection $X \times_S Y \rightarrow Y$ est une application fermée. On peut définir aussi les morphismes projectifs et quasi-projectifs, correspondant aux notions de variétés projectives et quasi-projectives. De nombreuses propriétés sur les morphismes généraux peuvent être ramenées au cas des morphismes projectifs ou quasi-projectifs, en utilisant une généralisation convenable du lemme bien connu de Chow.

Un faisceau de modules F sur le schéma X est dit quasi-cohérent si, sur chaque ouvert affine U de X , il peut être défini par un module M sur l'anneau A de U . Si X est noethérien, alors F est cohérent (au sens général de [12]) si et seulement s'il est quasi-cohérent, et les modules M sont de type fini. Les faisceaux algébriques quasi-cohérents et cohérents se comportent aussi bien sous les opérations usuelles de la théorie des faisceaux (produits tensoriels, faisceaux d'homomorphismes, images directes et inverses, et foncteurs dérivés des précédents) qu'on pouvait l'espérer.

Nous sommes maintenant en position d'énoncer des résultats dans le contexte qui convient. Nous nous limiterons cependant à (a) et (b). Le théorème de Riemann-Roch, démontré indépendamment par Washnitzer [11] et moi-même [2] en géométrie algébrique abstraite, sera exposé par Hirzebruch à ce congrès. Remarquons seulement que la formulation actuelle de ce théorème, telle que suggérée par la formule de Hirzebruch, est substantiellement plus forte que cette dernière, parce que, comme d'habitude, un énoncé sur une variété complète est remplacé par un énoncé sur un morphisme propre. Quant aux "résultats spéciaux" alludés en (d), dus à Barsotti, Cartier, Rosenlicht et Serre, disons seulement que l'on sait tout ce que l'on veut et attend sur la cohomologie d'une variété abélienne, et une grande partie des relations entre la cohomologie d'une variété et sa variété d'Albanese. En particulier, on obtient par des méthodes cohomologiques l'absence de "torsion" dans une variété abélienne [1, 4, 14] et la bidualité des variétés abéliennes [3]. Jusqu'à présent, il n'a pas

été question d'énoncer de tels résultats dans le contexte général d'un schéma sur un autre, bien que ce soit certainement un contexte raisonnable.

Les principaux résultats de la théorie cohomologique des morphismes de schémas sont les suivants (les théorèmes 1 et 2 étant des adaptations assez directes des résultats de Serre [12]).

Théorème 1. *Soit F un faisceau quasi-cohérent sur le schéma affine X défini par un module M sur l'anneau de coordonnées A de X . Alors $H^i(X, F) = 0$ pour $i > 0$, et $H^0(X, F) = M$.*

Bien entendu, les groupes de cohomologie sont pris au sens général de l'algèbre homologique dans les catégories abéliennes [6, 7]. Il est important, pour des raisons techniques, de ne pas prendre comme définition de la cohomologie la cohomologie de Čech comme cela a été fait dans [12]; en vertu de la suite spectrale de Leray pour un recouvrement, le théorème 1 implique que les groupes de cohomologie d'un faisceau quasi-cohérent sur un schéma X peuvent être calculés par la méthode de Čech, mais ceci doit être considéré comme un phénomène accidentel. Il y a une réciproque au théorème 1 [18], à savoir que si X est un pré-schéma noethérien pour lequel $H^1(X, F) = 0$ pour tout sous-faisceau cohérent F de $\mathcal{O}_X$, alors X est affine. Ceci peut être montré dans ce cas général par une adaptation convenable de la démonstration de Serre.

Rappelons que si f est une application continue d'un espace X dans un autre Y , alors pour tout faisceau abélien F sur X , on définit l'image directe $f_*(F)$ de F par f comme le faisceau sur Y dont les sections sur un ouvert $U \subset Y$ sont les sections de F sur $f^{-1}(U)$. En prenant les foncteurs dérivés droits du foncteur f_* , on obtient les "images directes supérieures" $R^q f_*(F)$ de F par f . Le faisceau $R^q f_*(F)$ est le faisceau associé au pré-faisceau

$$U \mapsto H^q(f^{-1}(U), F),$$

et est bien connu comme entrant dans le terme initial de la suite spectrale de Leray pour l'application continue f et le faisceau F . Dans le cas où f est un morphisme de schémas et F est un faisceau algébrique, les images directes supérieures sont des faisceaux algébriques, qui sont quasi-cohérents dès que F est quasi-cohérent et f de type fini. Dans ce cas, le groupe des sections de $R^q f_*(F)$ sur un ouvert affine U de Y est identique à $H^q(f^{-1}(U), F)$, comme il résulte immédiatement de la suite spectrale de Leray, par exemple. Le théorème 1 se généralise facilement à une propriété des morphismes affines $f : X \rightarrow Y$, c'est-à-dire des morphismes pour lesquels l'image inverse d'un ouvert affine est affine (ce qui est en fait une propriété locale par rapport à Y) : si f est affine, alors pour tout faisceau quasi-cohérent F sur X , on a $R^q f_*(F) = 0$ pour $q > 0$, et la réciproque est vraie si X est noethérien.

Le théorème suivant concerne les morphismes projectifs. Soit Y un pré-schéma, et soit $\mathcal{S}$ un faisceau quasi-cohérent d'algèbres graduées sur Y . Pour simplifier, nous supposons que $\mathcal{S}$ n'a que des degrés positifs, et est engendré (comme faisceau de $\mathcal{O}_Y$ -algèbres) par $\mathcal{S}^1$. Alors, en généralisant des constructions bien connues, on peut définir un pré-schéma X sur Y (en fait un schéma si Y en est un lui-même), et sur X un faisceau algébrique localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$, noté $\mathcal{O}_X(1)$. Plus généralement, pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{M}$ de $\mathcal{S}$ -modules gradués, on définit un faisceau

quasi-cohérent $F(\mathcal{M})$ sur X , le foncteur $\mathcal{M} \mapsto F(\mathcal{M})$ étant exact et compatible avec les opérations usuelles telles que les produits tensoriels et les faisceaux $\mathcal{T}or_i$, $\mathcal{M}od$ et $\mathcal{E}xt^i$. En prenant $\mathcal{M} = \mathcal{S}$, on obtient $\mathcal{O}_X$, et en décalant les degrés de n dans $\mathcal{S}$, on obtient des faisceaux $\mathcal{O}_X(n)$, qui peuvent (par ce que nous venons de dire) être obtenus comme produits tensoriels n -uples de $\mathcal{O}_X(1)$ avec lui-même. Les définitions sont telles que, si f est la projection $f : X \rightarrow Y$, alors on a un homomorphisme naturel (compatible avec f) de $\mathcal{M}^0$ dans $F(\mathcal{M})$, et donc aussi de $\mathcal{M}^n$ dans $F(\mathcal{M}(n)) = F(\mathcal{M})(n)$, où pour tout faisceau algébrique G sur X , on note $G(n)$ le produit tensoriel $G \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$. Le formalisme que nous venons d'esquisser, et en particulier l'obtention d'un pré-schéma sur Y à partir d'un faisceau quasi-cohérent gradué d'algèbres $\mathcal{S}$ sur Y , doit être considéré comme la description générale naturelle du procédé d'“éclatement” : ceci est obtenu en prenant un sous-faisceau cohérent $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}_Y$, en prenant les sous-faisceaux $\mathcal{S}^n$ de $\mathcal{O}_Y$ engendrés par ce faisceau d'idéaux, et en prenant pour $\mathcal{S}$ la somme directe des faisceaux $\mathcal{S}^n$, qui est un faisceau gradué d'algèbres de manière évidente. Un pré-schéma X sur Y est dit projectif sur Y (et le morphisme $f : X \rightarrow Y$ est dit projectif) si X peut être obtenu, par le procédé alludé ci-dessus, à partir d'un faisceau $\mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}^n$ soit un faisceau de type fini (c'est-à-dire un faisceau cohérent si Y est supposé noethérien). Ainsi, si Y est un schéma affine noethérien intègre (c'est-à-dire irréductible et $\mathcal{O}_Y$ sans éléments nilpotents), alors les schémas sur Y qui sont projectifs sur Y et pour lesquels la projection $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence birationnelle sont ceux que l'on peut obtenir à partir de Y en éclatant un faisceau cohérent d'idéaux sur Y (de sorte que l'on obtient “pratiquement tous” les morphismes propres birationnels par le procédé standard d'éclatement). Remarquons aussi que si l'on prend pour $\mathcal{S}$ l'algèbre symétrique d'un faisceau localement libre de modules $\mathcal{V}$ sur Y , alors le X correspondant sur Y doit être vu comme l'espace fibré à fibres des espaces projectifs, qui correspond au “fibré vectoriel” défini par le faisceau $\mathcal{V}$ dual de $\mathcal{V}$. (En fait, toutes les constructions “géométriques” de la géométrie algébrique peuvent être transportées dans le contexte des schémas.) Les principaux faits concernant la théorie cohomologique des morphismes projectifs sont énoncés dans le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif, défini par un faisceau gradué d'algèbres $\mathcal{S}$ sur Y . Y est supposé noethérien, et nous supposons que $\mathcal{S}^1$ est engendré comme faisceau de modules par r générateurs (localement). Alors les assertions suivantes sont valables pour tout faisceau cohérent F sur X :*

- (i) $F(n)$ est “engendré par ses sections” pour n grand, à condition de se restreindre aux points de X situés au-dessus d'un ouvert affine de Y ;
- (ii) $R^q f_*(F(n)) = 0$ pour $q > 0$, n grand ;
- (iii) $R^q f_*(F) = 0$ pour $q > r$;
- (iv) Les faisceaux $R^q f_*(F)$ sont cohérents.

La première assertion (i) implique aussi que tout faisceau cohérent F sur X peut être obtenu à partir d'un faisceau quasi-cohérent convenable de modules gradués sur $\mathcal{S}$.

Les deux théorèmes suivants sont démontrés en traitant d'abord le cas d'un morphisme projectif (N.B. les morphismes projectifs sont propres). Ensuite, les énoncés se réduisent à des énoncés sur les modules gradués sur un anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$, avec A noethérien, et peuvent être

démontrés par une induction descendante facile sur la dimension i en cohomologie. Ceci explique pourquoi un énoncé complet et une démonstration simple de ces résultats, même restreints à $i = 0$ (c'est-à-dire lorsqu'on ne s'occupe pas de cohomologie véritable), ne pouvaient pas être obtenus par des méthodes non cohomologiques. Le cas d'un morphisme général est ensuite ramené au cas projectif par le lemme de Chow, comme dans [8].

Théorème 3. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre, Y étant noethérien. Alors, pour tout faisceau cohérent F sur X , les faisceaux $R^q f_*(F)$ sont cohérents.*

Théorème 4. *Soit $f : X \rightarrow Y$ et F comme précédemment, soit y un point de Y ,*

alors $R^q f_*(F)_y$ est un module de type fini sur l'anneau local $\mathcal{O}_y$, et le complété m_y -adique de ce module est naturellement isomorphe à

$$\lim_k H^q(f^{-1}(y), F \otimes_{\mathcal{O}_y} (\mathcal{O}_y/m_y^k))$$

(où m_y est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_y$).

Ceci doit être considéré comme l'énoncé complet du résultat principal de Zariski sur les “fonctions holomorphes” [22]. Ici, le groupe $\lim$ doit être considéré comme la “cohomologie holomorphe” de X le long de la fibre $f^{-1}(y)$, à coefficients dans le faisceau F . Du théorème 4, on obtient un résultat global par rapport à Y : si Y' est un sous-ensemble fermé de Y , et $X' = f^{-1}(Y')$, alors la cohomologie holomorphe de X le long de X' (à coefficients dans F) est l'aboutissement d'une suite spectrale de type cohomologique, dont le terme initial est $E_k^{p,q} = H^p(Y/Y', R^q f_*(F))$ (où le second membre désigne la cohomologie holomorphe de Y le long de Y').

Le théorème 4 donne immédiatement le théorème de connexité de Zariski, sous la forme générale suivante. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre, Y noethérien. Alors, par le théorème 3, l'image directe $f_*(\mathcal{O}_X)$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_Y$ -algèbres $\mathcal{B}$ sur Y . Soit $y \in Y$, alors $\mathcal{B}_y$ est une $\mathcal{O}_y$ -algèbre qui est un module de type fini. Il résulte immédiatement du théorème 4 (avec $q = 0$) que l'ensemble des composantes connexes de la fibre $f^{-1}(y)$ est en correspondance biunivoque avec les idéaux maximaux de $\mathcal{B}_y$ (qui sont bien sûr en nombre fini). Si, par exemple, X et Y sont intègres, f surjectif, alors le corps K de Y est un sous-corps du corps L de X , et $\mathcal{B}_y$ est un sous-anneau de L qui est entier sur le sous-anneau $\mathcal{O}_y$ de K . Si la clôture intégrale de $\mathcal{O}_y$ dans K n'a qu'un seul idéal maximal (on dit alors que y est un “point unibranche” de Y) et si la clôture algébrique de K dans L est purement inséparable sur K , alors il résulte immédiatement que $\mathcal{B}_y$ n'a qu'un seul idéal maximal. Par conséquent, la fibre de f en y est connexe. (N.B. aucune irréductibilité analytique de $\mathcal{O}_y$ n'était nécessaire.)

Nous pouvons énoncer les choses de manière plus géométrique, en utilisant le fait que le faisceau cohérent $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{B}$ de $\mathcal{O}_Y$ -algèbres définit de manière naturelle un pré-schéma Y' sur Y (caractérisé par la condition que Y' soit affine sur Y et que l'image directe de $\mathcal{O}_{Y'}$ soit $\mathcal{B}$). Il résulte des théorèmes de Cohen-Seidenberg que Y' est aussi propre sur Y , et que les fibres dans la projection $Y' \rightarrow Y$ sont finies. (Réciproquement, il résulte des théorèmes 3 et 4 que tout Y' sur Y ayant

ces propriétés peut être défini par un faisceau cohérent d'algèbres sur Y . Nous dirons qu'un tel pré-schéma Y' sur Y est entier sur Y .) En utilisant le fait que l'on a un isomorphisme $B \cong f^*(\mathcal{O}_X)$, on voit que $f : X \rightarrow Y$ peut être factorisé de manière naturelle en $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$, où maintenant f' est tel que $f'_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{Y'}$. Le théorème de connexité de Zariski peut maintenant être énoncé de la manière suivante : les composantes connexes de $f^{-1}(y)$ sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $g^{-1}(y)$, ou de manière équivalente : les fibres de f' sont connexes. (Cette factorisation canonique de f a été suggérée par les travaux de Stein sur les espaces analytiques.)

En utilisant les théorèmes 3 et 4 et le théorème de connexité, on obtient aussi, par des méthodes globales et cohomologiques, l'énoncé le plus général du “théorème principal” de Zariski en algèbre commutative, que nous énoncerons ici dans le langage géométrique :

Théorème 5. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-projectif d'un schéma X dans un schéma noethérien Y . Les points de X qui sont isolés dans leur fibre $f^{-1}(f(x))$ forment un ouvert U . Il existe un schéma Y' entier sur Y , et un isomorphisme de U sur un ouvert U' de Y' , tel que la restriction de f à U soit identique au composé $U \rightarrow Y' \rightarrow Y$.*

Cet énoncé est quelque peu plus général que l'énoncé purement local usuel. Il faut remarquer que les anneaux locaux de X et Y peuvent contenir des éléments nilpotents. La démonstration du théorème 5 s'obtient en se ramenant d'abord au cas où X est propre sur Y . Alors Y' est le schéma sur Y construit ci-dessus avec le faisceau $f_*(\mathcal{O}_X)$, et le fait que la factorisation canonique de f induise un isomorphisme de U sur un ouvert de Y' se déduit facilement du théorème de connexité. Le fait qu'il doive exister des démonstrations cohomologiques du théorème de connexité de Zariski et de son “théorème principal” a été conjecturé pour la première fois par Serre. Que ces résultats soient valables aussi pour des schémas généraux, pas seulement ceux de la géométrie algébrique, donne des résultats tels que le suivant (que je crois dû à Chow) : soit A un domaine d'intégrité local noethérien qui est normal (ou plus généralement “unibranche”) ; alors l'espace projectif algébrique sur le corps résiduel k de A défini par la k -algèbre graduée $G(A) = \sum m^n/m^{n+1}$ (m = idéal maximal de A) est connexe.

Il reste à dire quelques mots sur les théorèmes de dualité, bien que le temps ne permette pas d'en donner des énoncés précis. Rappelons d'abord l'énoncé original de Serre [23] : si X^n est une variété projective non singulière définie sur un corps algébriquement clos k , E un fibré vectoriel sur X , alors il existe une dualité naturelle entre $H^i(X, \mathcal{O}_X(E))$ et $H^{n-i}(X, \Omega_X^n(E'))$, où $\mathcal{O}_X(E)$ est le faisceau des germes de sections régulières de E , et $\Omega_X^n(E')$ le faisceau des germes de n -formes différentielles régulières de X à valeurs dans le fibré vectoriel dual E' . Cette dualité s'obtient par cup-produit, en utilisant le fait que $H^n(X, \Omega_X^n)$ lui-même est naturellement isomorphe au corps de base k . Diverses généralisations de ce résultat, et des applications à la dualité de Poincaré (incluant une formule de Lefschetz) ont été données dans [9]. Cependant, le cas des variétés singulières n'était pas pris en compte, de sorte que les énoncés sur la dualité de Poincaré étaient nécessairement restreints aux cycles non singuliers et aux intersections non singulières de tels cycles. De plus, les fondements algébriques corrects pour les aspects covariants de la cohomologie des variétés non singulières, tels que suggérés par la dualité de Poincaré, restaient obscurs. En développant une théorie générale des résidus, cette situation peut maintenant être considérée comme (potentiellement) complètement

clarifiée. Pour simplifier, considérons des schémas de type fini sur un corps de base arbitraire k , c'est-à-dire des espaces algébriques définis sur k , les anneaux locaux de X étant cependant autorisés à avoir des éléments nilpotents (ce qui est techniquement de la plus haute importance). Alors, sur un tel X , il y a un complexe canoniquement défini de faisceaux algébriques quasi-cohérents $\mathcal{X}_X$, à degrés positifs, et un opérateur différentiel de degré -1 . En dimension i , $\mathcal{X}_X$ est la somme directe des faisceaux $\mathcal{D}(X/Y)$, où Y parcourt l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés irréductibles de X de dimension i . Le faisceau $\mathcal{D}(X/Y)$ est l'extension à X d'un faisceau constant sur Y , correspondant à un module sur l'anneau local $\mathcal{O}_{X/Y}$ de Y dans X , qui devrait être appelé le module dual de cet anneau local. En général, si A est une localité sur le corps de base k (c'est-à-dire un anneau local d'une k -algèbre de type fini), il y a un A -module bien défini $D(A)$, appelé son dual (par rapport à k), qui peut être obtenu de la manière suivante : prenons un sous-corps L de A séparable sur k tel que le corps résiduel de A soit algébrique sur L , alors

$$D(A) = \text{Hom}_L(A, \Omega^p(L)),$$

où Hom désigne les homomorphismes continus, et où $\Omega^p(L)$ est l'espace vectoriel (de dimension 1) sur L des formes différentielles de plus haut degré de L par rapport à k . (Le fait que le second membre ne dépende pas du choix de L n'est pas trivial, et s'obtient comme conséquence d'une définition cohomologique alternative de $D(A)$ comme limite inductive de modules Ext .) Le faisceau $\mathcal{X}_X$ est un faisceau injectif de $\mathcal{O}_X$ -modules. La définition de son opérateur différentiel est assez subtile. Le complexe de faisceaux $\mathcal{X}_X$ devrait être appelé le complexe de résidus de X (ou le complexe des "données de Cousin généralisées" de X). Il se trouve que si X est non singulier et séparable sur k , alors $\mathcal{X}_X$ est une résolution (injective) du faisceau Ω_X^n des germes de formes différentielles de plus haut degré sur X . En tout cas, si $\dim X = n$, alors le faisceau de cycles de degré n dans $\mathcal{X}_X$, noté ω_X , doit être considéré comme jouant le rôle de formes différentielles de degré n sur X . En fait, il y a un homomorphisme naturel (défini par le procédé de Kähler bien connu) de Ω_X^n dans ω_X ; si X est normal et séparable sur k , alors ω_X n'est rien d'autre que le faisceau des germes de formes différentielles sur X qui sont régulières aux points simples. D'autre part, si X est Cohen-Macaulay (c'est-à-dire que ses anneaux locaux sont Cohen-Macaulay), alors $\mathcal{X}_X$ est une résolution de ω_X (et réciproquement). Ceci montre qu'en général les faisceaux $H_i(\mathcal{X}_X)$ ne sont pas nuls même pour $i \neq n$ (N.B. ils ne le sont jamais pour $i = n$), cependant ces faisceaux sont toujours cohérents (bien que $\mathcal{X}_X$ lui-même soit beaucoup trop gros pour être cohérent).

Soit maintenant F un faisceau cohérent arbitraire sur X , nous écrivons

$$H_i(X, F) = H_i(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(X; F, \mathcal{X}_X)).$$

Ainsi l'homologie de X à coefficients dans F est définie comme un foncteur contravariant en F , qui de plus est un "foncteur homologique" parce que le complexe $\mathcal{X}_X$ est injectif, c'est-à-dire que $F \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(X; F, \mathcal{X}_X)$ est exact. Elle possède toutes les propriétés que l'on attend de l'homologie, en particulier, elle est covariante en X par rapport aux morphismes propres (le faisceau $\mathcal{X}_X$ lui-même se comportant de manière covariante en X), la cohomologie de X opère sur l'homologie par cup-produit. Des groupes d'homologie et de cohomologie relatifs de divers types peuvent aussi être définis. Si X est Cohen-Macaulay, alors la définition ci-dessus donne

$$H_i(X, F) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{n-i}(X; F, \omega_X). \quad (1)$$

Cette relation est remplacée par une suite spectrale dans le cas général. Si X est Cohen-Macaulay et de plus F est localement libre, alors la relation ci-dessus donne

$$H_i(X, F) \simeq H^{n-i}(X, F' \otimes \omega_X) \quad (2)$$

de sorte que dans ce cas, l'homologie peut être exprimée comme cohomologie. Dans le cas général, cette relation est remplacée par une suite spectrale, analogue à la suite spectrale de Cartan pour un espace topologique arbitraire, reliant son homologie et sa cohomologie (et donnant la dualité de Poincaré dans le cas où l'espace est une variété).

En utilisant les définitions de H_n et ω_X , nous voyons que (si $\dim X = n$) il y a un élément canonique dans $H_n(X, \omega_X)$, appelé la classe d'homologie canonique de X ; comme l'homologie est contravariante en l'argument, il s'ensuit qu'il y a une classe d'homologie canonique dans $H_n(X, \Omega_X^n)$, et comme l'homologie est covariante en l'espace, il s'ensuit que pour chaque p -cycle Z dans X , il y a une classe d'homologie $\gamma_X(Z)$ dans $H_p(X, \Omega_X^n)$. La formation de ces classes est compatible avec les images directes des cycles et des classes d'homologie. De plus, si X est non singulier et séparable sur k , alors $\gamma(Z)$ peut être considéré comme un élément de $H^{n-p}(X, \Omega_X^{n-p})$ en vertu de (2). En utilisant quelques faits simples de caractère local reliant l'intersection et les images inverses de cycles à une structure multiplicative partiellement définie dans $\mathcal{X}_X$ (pour X non singulier), nous obtenons que la formation des classes caractéristiques est compatible avec les produits et les images inverses (ce qui résout les difficultés rencontrées dans [9]).

Le théorème de dualité de Serre est maintenant généralisé de la manière suivante. Supposons que F soit un faisceau cohérent sur X à support complet, alors par cup-produit il y a un appariement naturel

$$H_i(X, F) \times H^i(X, F) \rightarrow H_0(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{F}), \quad (3)$$

où $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent d'idéaux arbitraire sur X tel que $\mathcal{F} \cdot F = 0$. Nous pouvons prendre $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{O}_X/\mathcal{F}$ ait un support complet, c'est-à-dire soit le faisceau des anneaux locaux d'un sous-espace algébrique Y de X . Alors le second membre de (3) n'est rien d'autre que $H_0(Y, \mathcal{O}_Y)$, et en utilisant la somme des résidus on obtient un k -homomorphisme naturel

$$H_0(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{F}) = H_0(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow k. \quad (3a)$$

En utilisant (3) et (3a), on obtient un appariement

$$H_i(X, F) \times H^i(X, F) \rightarrow k. \quad (4)$$

Cet appariement est une dualité : ainsi, pour les supports complets, homologie et cohomologie sont duales l'une de l'autre. De plus, dans cette dualité, l'image directe de l'homologie est transposée à l'image inverse de la cohomologie (comme cela est nécessaire pour le formalisme de la dualité de Poincaré).

Nous avons esquissé l'énoncé des résultats pour les schémas de type fini sur un corps k . Des résultats plus généraux sont vrais en fait, et le théorème de dualité peut être énoncé pour tout faisceau cohérent F sur un schéma noethérien X , tel que le support de F soit complet (c'est-à-dire propre sur un anneau artinien A , qui n'a pas besoin d'être un corps). En combinant ceci avec le théorème 4, on obtient un énoncé équivalent, concernant les propriétés homologiques d'un morphisme propre

arbitraire (la base Y étant noethérienne).

Pour conclure cet exposé, je devrais énoncer quelques questions non résolues. En fait, il est peut-être trop tôt pour le faire, car les nouvelles techniques disponibles n'ont pas été essayées assez sérieusement pour savoir si elles sont capables ou non de résoudre ces questions. Les deux suivantes (qui sont probablement liées) montreront peut-être quelque résistance. Pour abrégé, nous les énonçons dans le contexte de la géométrie algébrique.

Problème A (Théorème d'annulation de Kodaira). Soit V une variété projective non singulière, L un fibré en droites négatif sur V (c'est-à-dire tel qu'un multiple négatif de L définisse un plongement projectif de V). Si V est de dimension n , est-il vrai que $H^i(X, \mathcal{O}_X(L)) = 0$ pour $0 \leq i < n$?

Il n'est pas difficile de montrer, en utilisant la dualité, que ce problème est équivalent au suivant, qui ne fait plus intervenir la cohomologie : Soient V et L comme précédemment, et soit W une section hyperplane non singulière de V (par rapport à un plongement projectif de V). Alors est-il vrai que toute $(n-1)$ -forme régulière sur W , à coefficients dans L , est le résidu d'une n -forme différentielle rationnelle sur V , à coefficients dans L , ayant un diviseur $\geq -W$?

Problème B. Soit f un morphisme birationnel propre d'une variété non singulière X dans une autre Y . Est-il vrai que $R^q f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ pour $q > 0$?

En utilisant la suite spectrale de Leray, ceci est équivalent au problème : si $f : X \rightarrow Y$ est comme ci-dessus, est-il vrai que $H^p(X, \mathcal{O}_X) \cong H^p(Y, \mathcal{O}_Y)$ pour tout p ? Plus généralement, il s'ensuivrait que si E est un fibré vectoriel sur Y , F son image inverse sur X , alors $H^p(X, \mathcal{O}_X(F)) \cong H^p(Y, \mathcal{O}_Y(E))$ ("invariance birationnelle de la cohomologie"). Cela impliquerait que le genre arithmétique d'une variété complète non singulière est un invariant birationnel (ceci n'est connu que dans le cas classique où k est le corps des nombres complexes et X projectif, en utilisant la symétrie $h^{q,p} = h^{p,q}$), plus généralement que (f étant comme précédemment) les classes de Todd de Y sont les images directes par f des classes de Todd de X (comme on le voit en appliquant la formule de Riemann-Roch [2]). La réponse au problème B n'est pas connue même pour les variétés projectives non singulières sur le corps des nombres complexes. Il faut remarquer qu'il est essentiel pour que l'énoncé soit vrai que X et Y soient tous deux non singuliers.

Il y a d'autres questions dans lesquelles les méthodes cohomologiques et l'intuition heuristique fournie par le point de vue des schémas se révéleront probablement utiles. Les plus importantes actuellement semblent être les suivantes.

Problème C. Soit X un schéma noethérien, Y un sous-schéma complet. Énoncer les conditions sous lesquelles il est possible de "contracter" Y en un point, c'est-à-dire de trouver un morphisme propre de X dans un schéma X' , appliquant Y en un seul point y et induisant un isomorphisme de $X - Y$ sur $X' - (y)$.

Selon Grauert, ce problème est étroitement lié au problème A. De plus, il est lié à la théorie des fonctions holomorphes de Zariski, une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que

la contraction soit possible étant la suivante (en vertu du théorème 4) : l'anneau des fonctions holomorphes de X le long de Y doit être noethérien et de dimension de Krull égale à $\dim X$.

Problème D. Soit G un schéma de groupes sur le schéma Y (G de type fini sur Y), soit H un sous-schéma fermé de groupes de G . Prouver l'existence du schéma G/H sur X (défini par les propriétés universelles de mapping usuelles).

Problème E. Soit X un schéma propre sur un autre Y (Y noethérien). Prouver l'existence d'un schéma de groupes abéliens sur Y , jouant le rôle d'une variété de Picard relative par rapport à la détermination des faisceaux localement libres de rang un sur les produits $X \times_Y Z$ (Z étant un "schéma paramètre" variable sur Y).

Nous ne donnerons pas ici la définition précise d'un "schéma de Picard relatif", mais nous remarquerons seulement que si ce schéma existe, il se comporte de la manière la plus simple concevable par rapport au changement d'espace de base Y (ce qui doit être vu comme l'analogue d'un changement de corps de base). De plus, le fait que nous admettions des éléments nilpotents dans les anneaux locaux des schémas Z fournit une grande quantité d'informations supplémentaires sur la variété de Picard (en particulier sa structure infinitésimale), qui ne semble pas avoir été obtenue jusqu'ici même dans le cas classique. Ces remarques restent valables si l'on considère la situation plus générale suivante : étant donné un schéma de groupes G sur X (G de type fini sur X), pour tout Z sur Y , on considère sur $X \times_Y Z$ l'image inverse G^Z de G par la projection $X \times_Y Z \rightarrow X$ et les classes d'isomorphisme de schémas sur $X \times_Y Z$ qui sont principaux sous G^Z . Ceci conduit à une définition d'une variété de Picard relative généralisée de X , par rapport à G , qui devrait être un schéma sur Y , et un schéma de groupes abéliens sur Y si G est abélien. On espère qu'un théorème général d'existence d'un tel schéma de Picard relatif généralisé existe et sera démontré dans l'avenir.

En fait tout à fait général, on croit qu'une meilleure compréhension de toute partie, même de la géométrie algébrique la plus classique, sera obtenue en essayant de reformuler tous les faits et problèmes connus dans le contexte des schémas. Ce travail est maintenant commencé, et sera poursuivi dans un traité de géométrie algébrique qui, espérons-le, sera écrit dans les années à venir par J. Dieudonné et moi-même, et qui devrait donner un exposé systématique de toutes les questions abordées dans cet exposé.

Références

- [1] Barsotti, I. Abelian varieties over fields of positive characteristic. R.C. Circ. mat. Palermo, (2), 5, 1-25 (1956).
- [2] Borel, A. and Serre, J. P. Le théorème de Riemann-Roch. Bull. Soc. Math. Fr. 86, 97-136 (1958).
- [3] Cartier, P. Thèse. Paris, 1959. (À paraître.)
- [4] Cartier, P. Séminaire Bourbaki. (Mai, 1958).
- [5] Chevalley, C. and Cartan, H. Séminaire École Normale Supérieure (1955-56).
- [6] Godement, R. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Act. Sci. Ind. no. 1252. Hermann, Paris, 1958.
- [7] Grothendieck, A. Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. 9, nos. 2-3, 119-221 (August, 1957).

- [8] Grothendieck, A. Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents. In Séminaire Cartan, 1956-57 (exposé no. 2).
- [9] Grothendieck, A. Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Séminaire Bourbaki (Mai, 1957).
- [10] Nagata, M. A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains. Amer. J. Math. 78, 78-116 (1956).
- [11] Rosenlicht, M. Extensions of vector groups by abelian varieties. Amer. J. Math. 80, 685-714 (1958).
- [12] Serre, J. P. Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. (2), 61, 197-278 (1955).
- [13] Serre, J. P. Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p . Symposium de Topologie Algébrique, Mexico (August, 1956).
- [14] Serre, J. P. Quelques propriétés des variétés abéliennes en caractéristique p . Amer. J. Math. 80 (1958).
- [15] Serre, J. P. Sur la dimension homologique des anneaux et modules noethériens. Proc. Int. Symp. Algebraic Number Theory, Tokyo-Nikko, pp. 175-189 (1955).
- [16] Serre, J. P. Théorie des intersections. Cours professé au Collège de France 1957/58, rédigé par P. Gabriel. (À paraître en notes miméographiées.)
- [17] Serre, J. P. Groupes algébriques et corps de classes, d'après un cours professé au Collège de France. (À paraître in Act. Sci. Ind. Hermann, Paris.)
- [18] Serre, J. P. Sur la cohomologie des variétés algébriques. J. Math. pures appl. 36, 1-16 (1957).
- [19] Tate, J. Groups of Galois type and cohomological dimension of fields. (À paraître.)
- [20] Washnitzer, A. Geometric syzygies. Amer. J. Math. 81, 171-248 (1959).
- [21] Weil, A. Number of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 497-508 (1949).
- [22] Weil, A. Abstract versus classical algebraic geometry. Proc. Int. Congr. Math. Amst. 3, 550-558 (1954).
- [23] Zariski, O. Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary groundfields. Mem. Amer. Math. Soc. no. 5 (1951).
- [24] Zariski, O. Scientific report on the second summer Institute. III. Algebraic sheaf theory. Bull. Amer. Math. Soc. 62, 117-141 (1956).
- [25] Auslander, M. and Buchsbaum, R. A. Codimension and multiplicity. Ann. Math. (2), 68, 625-657 (1958).