

# L'HAMILTONIEN DE MISE À L'ÉCHELLE

Alain Connes et Caterina Consani

*Dédié à Dan Voiculescu avec admiration*

**Résumé :** Nous expliquons d'abord le lien entre l'Hamiltonien de Berry-Keating et la réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann  $\zeta$  de [10], et pourquoi il n'y a pas de conflit au niveau semi-classique entre le schéma d'"absorption" de [10] et les calculs d'"émission" de [1, 2], alors que le signe moins se manifeste dans les phases de Maslov. Nous utilisons alors le calcul quantifié pour analyser la tentative récente de X.-J. Li de prouver la positivité de Weil, et comprendre sa limite. Nous proposons alors un paradigme semi-local dans la théorie des opérateurs directement relié à l'hypothèse de Riemann.

## 0. Introduction

Ce volume hors-série du *Journal of Operator Theory* est une merveilleuse occasion pour reconnaître les contributions scientifiques de Dan Voiculescu à la fois en tant que résolveur de problèmes et en tant que bâtisseur de théorie.

Le sujet du présent article peut être décrit comme une pensée lancinante sur la puissance de la théorie des opérateurs en relation avec un problème majeur non résolu des mathématiques : l'Hypothèse de Riemann (RH). Après les tentatives initiales du premier auteur, qui sont venues d'une rencontre pleine de coïncidence de RH à partir de la mécanique statistique quantique, les deux auteurs (du présent article) ont abandonné l'espoir de pouvoir attaquer le problème d'une manière purement analytique et ils ont déplacé leur attention, à la recherche d'un autre outil puissant : la Géométrie algébrique. Nous faisons référence à [13, 15] pour un survol de l'espace géométrique que notre approche a révélé (le site de mise à l'échelle) et à [16] pour le développement d'une "géométrie algébrique absolue", motivée par la découverte de ce nouveau site, et par le besoin de développer une formule de Riemann-Roch sur son carré.

La pensée lancinante qui est le sujet du présent article et que, après tout, on aurait peut-être abandonné trop facilement l'analyse et la puissance des opérateurs de l'espace de Hilbert, pour obtenir des assertions concernant la positivité. En effet, dans [10], alors que la construction d'une réalisation spectrale globale dans l'espace de Hilbert reste artificielle par l'utilisation des espaces de Sobolev, la construction des opérateurs de l'espace de Hilbert semi-local est complètement canonique et elle fournit les parties finies subtiles dans les formules explicites de Riemann-Weil. Nous expliquons d'abord dans la section 1 la relation entre ce qu'on appelle l'Hamiltonien de Berry-Keating<sup>1</sup> et la réalisation spectrale originale de [10]. Les points-clés sont d'abord la raison pour laquelle le passage d'un spectre d'absorption (comme dans [10]) à un spectre d'émission (comme suggéré dans [1, 2]) n'introduit *pas* de décalage dans les approximations semi-classiques, et de plus, cela explique pourquoi le cutoff suggéré dans [1, 2] est équivalent, au niveau semi-classique, au retrait de la contribution de la "lumière blanche" du système quantique. Nous indiquons également qu'il n'y a pas de problème à propos du fait de quantifier l'Hamiltonien  $H = PQ$ , et c'est ce qui était déjà fait dans [10], et le signe moins n'est pas complètement éliminé dans le cutoff suggéré dans [1, 2]

---

référence de l'article *The Scaling Site* posté sur arxiv : <https://arxiv.org/abs/1507.05818>

Traduction : Denise Vella-Chemla, Juin 2021

1. Leur travail était motivé par les explications extensives d'A. Connes à l'IHES, comme M. Berry et J. Keating le reconnaissent dans [1].

et il apparaît dans les phases de Maslov.

Dans la Section 2, nous rappelons la formule de trace semi-locale démontrée dans [10] comme elle a été formulée dans [12]. Le résultat technique principal, rappelé dans le Lemme 2.4, calcule la trace de l'action de mise à l'échelle sur l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$  associé canoniquement à un ensemble fini  $S \ni \infty$  de places de  $\mathbb{Q}$ . L'espace  $X_S$  est une approximation de l'espace des classes d'adèles des rationnels, obtenu en traitant l'anneau complet des adèles  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$  pour le produit fini des anneaux locaux  $\mathbb{Q}_v$  attachés aux places  $v \in S$ , et en effectuant le quotient par le groupe

$$(0.1) \quad \mathbb{Q}_S^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_S) = \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} : p_j \in S \setminus \{\infty\}, n_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Dans la Section 3, nous décrivons l'idée de X.-J. Li qui sous-tend sa tentative de prouver la positivité de Weil. Nous utilisons le calcul quantifié pour analyser le cutoff qu'il propose, motivé par les espaces de Sonine. Nous démontrons un lemme-clé 3.4 en montrant que son approche, si elle marchait, ferait qu'une fonction  $\phi(z)$  appartiendrait à l'espace de Hardy  $\mathbb{H}^\infty$  du demi-plan  $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1/2\}$ . La fonction  $\phi(z)$  serait méromorphe dans  $\mathbb{C}$  et de module 1 sur la droite critique de telle façon qu'au premier regard, elle ressemblerait à une "fonction intérieure", mais malheureusement, elle ne peut l'être et en particulier, elle n'est pas bornée. Il aurait dû être clair dès le début pourtant, qu'une telle approche semi-locale ne pouvait pas marcher sans utiliser une formule de Poisson globale qui dicte la normalisation des valeurs principales.

En ignorant tous les nombres premiers au-dessus d'une certaine valeur (une stratégie naturelle), on a normalisé la valeur principale pour qu'elle soit nulle pour eux, ainsi la normalisation locale des valeurs principales pour les nombres premiers dans  $S$  devrait jouer un rôle essentiel, et on ne devrait pas pouvoir la négliger complètement (dans [10], le terme  $2 \log \Lambda$  prend en compte de tels changements locaux).

Dans la Section 4, nous formulons une conjecture sur la possibilité d'utiliser le modèle semi-local comme un outil pour prouver la positivité de Weil. Nous expliquons pourquoi la formule de Poisson globale a du sens dans les cas semi-locaux et fournit une explication conceptuelle pour les fonctions intervenant dans la formule de trace semi-locale. Nous discutons finalement des mérites d'une stratégie géométrique, comparés à ceux de l'approche analytique présentée ici.

## 1. L'Hamiltonien de mise à l'échelle

Dans la proposition de [10] (voir aussi le chapitre 2 de [12]), la réalisation spectrale est un spectre d'absorption, *i.e.* elle apparaît comme des lignes foncées sur un fond de lumière blanche.

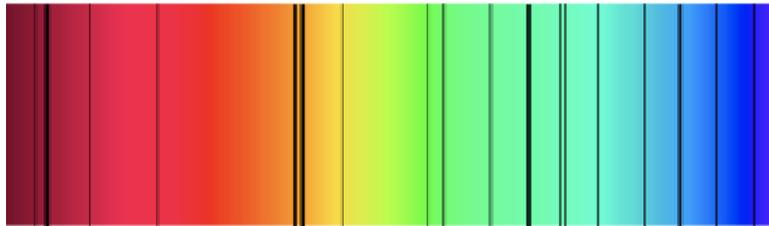


FIGURE 1 : Absorption Spectrum

Quand on ignore les places finies pour obtenir l'instance la plus simple d'une représentation semi-locale, on obtient l'action du groupe multiplicatif  $\mathbb{R}_+^*$  par mise à l'échelle sur l'espace de Hilbert

$L^2(\mathbb{R})$  des fonctions de carré intégrable sur la droite réelle. Cette procédure correspond à une manière évidente de “quantifier” l’Hamiltonien  $H = PQ$ . Il n’y a pas de mystère en quoi que ce soit dans cette quantification puisque dans la représentation unique irréductible des relations de commutation de Heisenberg, les opérateurs  $P$  et  $Q$  correspondent respectivement (à normalisation près) à  $i\partial_x$  et à la multiplication par  $x$ , de telle façon que l’opérateur auto-adjoint  $\frac{1}{2}(PQ + QP)$  correspond au générateur du flot de mise à l’échelle qui est  $x\partial_x$  (auquel on doit ajouter la constante  $\frac{1}{2}$  pour obtenir le générateur du groupe unitaire). Pourtant, puisque l’Hamiltonien ci-dessous n’est pas borné, le système quantique associé donné par l’action de mise à l’échelle sur  $L^2(\mathbb{R})$  n’a pas un spectre discret. Pour l’analyser, on effectue un cutoff à la fois en  $q$  et sur les espaces  $p$ , à la même taille  $\Lambda$ . À cause de la normalisation de la transformation de Fourier utilisée dans les contextes de théorie des nombres (*i.e.* avec un facteur de phase  $e^{-2\pi ipq}$ ), l’Hamiltonien est  $H = 2\pi pq$  (voir le Chapitre II, § 3.2 de [12]). La portion de l’espace des phases dans lequel la taille de  $H = 2\pi pq$  est inférieure à une énergie donnée  $E$  est montrée sur la Figure 1.

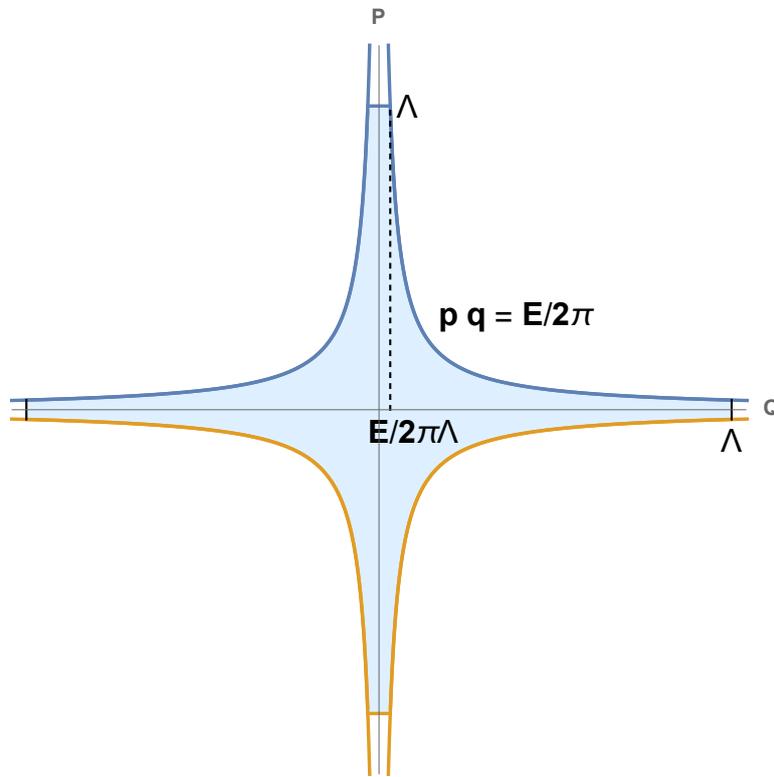


FIGURE 1 : Spectre d’absorption

Comme cela est expliqué en détails dans le Chapitre II, § 3.2 de [12], on se restreint aux fonctions paires pour traiter la fonction zeta de Riemann, et au premier quadrant pour évaluer le comptage semi-classique des zéros de  $\zeta$  avec partie imaginaire positive inférieure à  $E$ . Cette procédure est décrite sur la Figure 2. Pour comparer ce dessin semi-classique avec la lumière blanche, on considère le modèle de la lumière blanche donné par la représentation régulière du groupe additif  $\mathbb{R}$ . Nous ajustons le cutoff de telle façon qu’il corresponde, en utilisant l’isomorphisme  $u \mapsto \exp(u)$  de  $\mathbb{R}$  avec le groupe multiplicatif  $\mathbb{R}_+^*$ , à la partie de l’hyperbole  $pq = \frac{E}{2\pi}$  restreinte à l’intervalle  $[1/\Lambda, \Lambda]$  comme montré dans la Figure 3.

L’exponentielle  $u \mapsto \exp(u)$  est de façon évidente un isomorphisme  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  et la fonction suivante est un isomorphisme symplectique

$$\Phi(u, v) := (\exp(u), v \exp(-u)),$$

puisque son Jacobien est donné par

$$d \exp(u) \wedge d(v \exp(-u)) = \exp(u) du \wedge (\exp(-u) dv - v \exp(-u) du) = du \wedge dv.$$

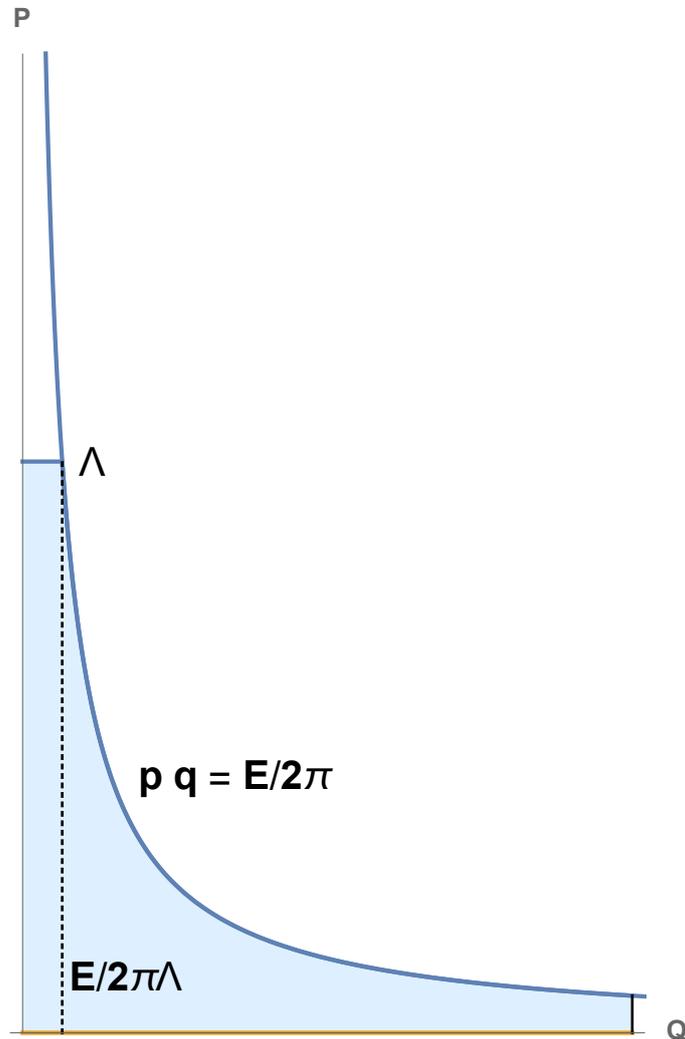


FIGURE 2

L'isomorphisme symplectique  $\Phi$  transforme l'espace des phases de la représentation régulière du cutoff  $\mathbb{R}$  en l'intervalle  $[-\log \Lambda, \log \Lambda]$  et en un domaine d'énergie (la variable duale de  $\log(q)$ ) en l'intervalle  $[0, E/2\pi]$ , dans la portion de l'espace des phases  $(q, p)$  montré dans la Figure 3. Nous renvoyons à [10] et au chapitre II, § 3.2 de [12] pour la compréhension des normalisations précises.

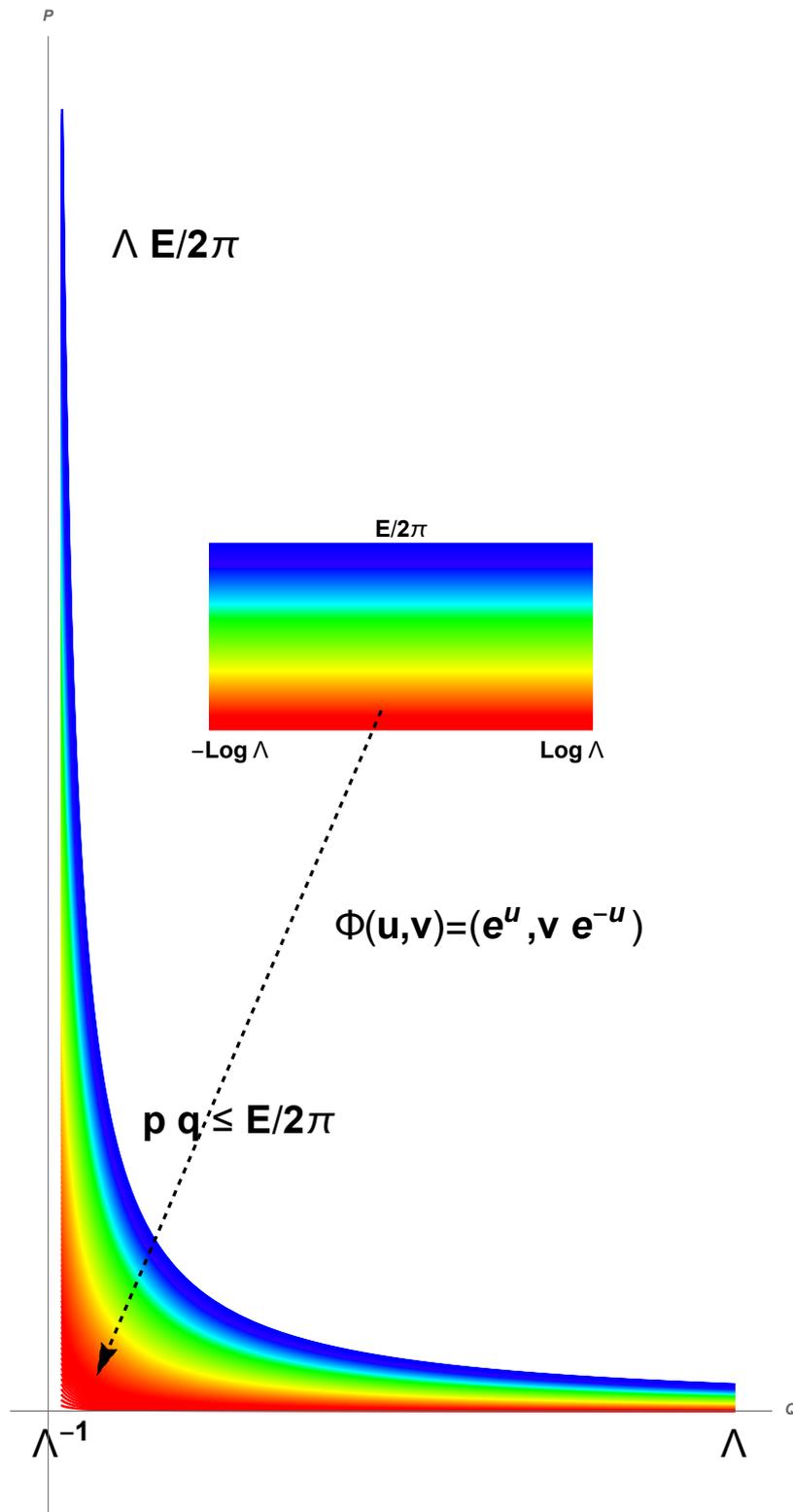


FIGURE 3

Il y a deux différences principales entre le cutoff de l'espace des phases de la Figure 2 et la lumière blanche de la Figure 3. D'abord, il y a un morceau de la Figure 3 qui n'est pas couvert par la Figure 2, il s'étend de  $p = \Lambda$  à  $p = \Lambda E/2\pi$  et est représenté en bleu foncé sur la Figure 4 :

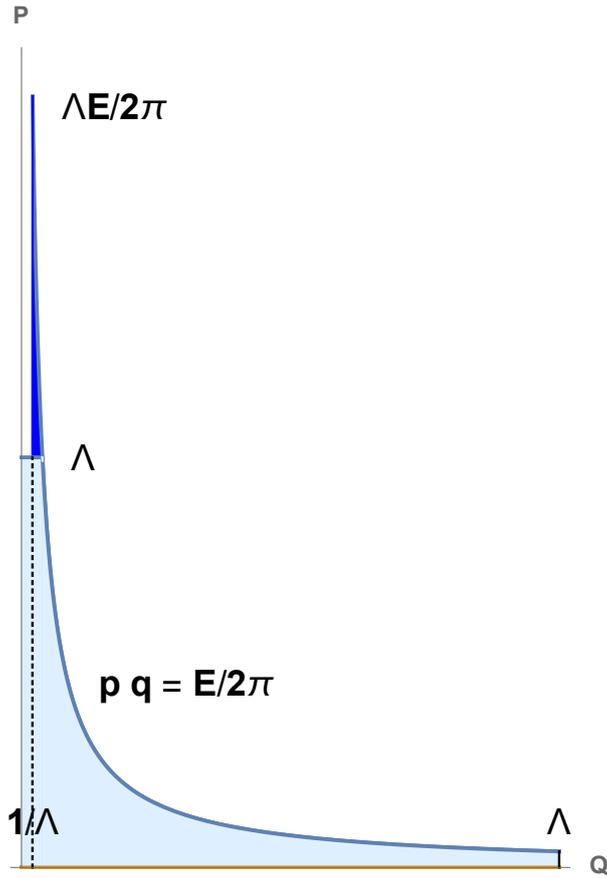


FIGURE 4

Il y a également le rectangle, de sommets en  $(0, 0)$ ,  $(1/\Lambda, 0)$ ,  $(1/\Lambda, \Lambda)$ ,  $(0, \Lambda)$ , sur la Figure 2, qui ne s'adapte pas dans la Figure 3. Il est d'aire égale à 1 et ainsi il correspond à un état quantique simple<sup>2</sup>.

Pour comparer ce paradigme à celui de Berry-Keating, on effectue la transformation symplectique du plan  $(q, p)$  donnée par

$$(q, p) \mapsto \left(\Lambda q, \frac{p}{\Lambda}\right) = \sigma(q, p).$$

Cette transformation préserve l'aire et l'hyperbole  $pq = \frac{E}{2\pi}$ . Elle transforme la Figure 4 en la Figure 5 suivante :

---

2. Cela rappelle le pôle de la fonction zeta de Riemann, ou de façon équivalente à la moitié des conditions aux limites  $f(0) = 0, \hat{f}(0) = 0$  que l'on doit imposer pour utiliser la formule de Poisson pour la fonction  $E$ , comme dans [10].

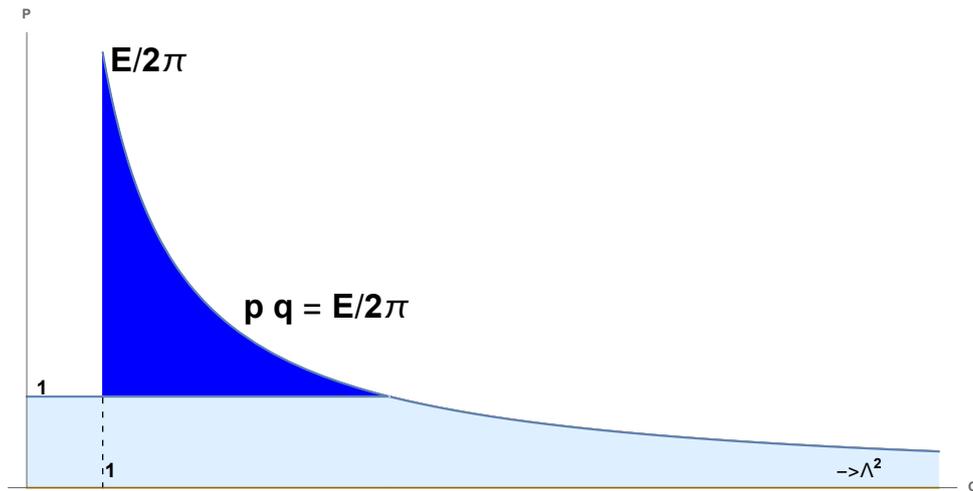
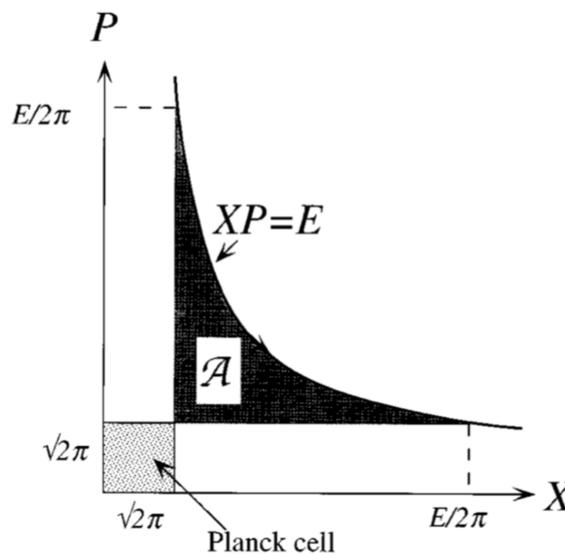


FIGURE 5

On obtient facilement que la partie manquante (absorbée) de la lumière blanche est donnée par la partie semi-classique de l'Hamiltonien "de Berry-Keating" comme dans la Figure 6.

Cette discussion montre que tous les calculs semi-classiques pour les zéros de la fonction zeta de Riemann vus comme un spectre d'absorption (comme dans [10, 12]), sont identiques à ceux calculés avec l'Hamiltonien "de Berry-Keating" vus comme un spectre d'émission ([1, 2]). La présence des signes opposés intervenant dans les spectres d'absorption et d'émission ne crée pas de conflit à ce point de la réflexion. Pourtant, on ne devrait pas en conclure que les deux modèles sont équivalents.



**Fig. 7** Phase space for  $H_{cl} = XP$ , with cutoffs for semiclassical regularization.

FIGURE 6 : Figure prise dans [2], il y a une normalisation de la transformation de Fourier différente qui prend en compte la divergence dans les facteurs  $2\pi$ .

En fait, le signe moins venant du spectre d'absorption riposte quand on étudie les fluctuations quantiques. Dans [1], Berry et Keating sont obligés de contraindre toutes les phases de Maslov à être égales à  $\pi$  pour prendre en compte le signe moins. Ils écrivent explicitement :

f. The Maslov phases associated with the orbits are also peculiar: they are all  $\pi$ . This follows <sup>5</sup> from the negative signs of the terms in the von Mangoldt formula. The result appears paradoxical in view of the relation between these phases and the winding numbers of the stable and unstable manifolds associated with periodic orbits <sup>23</sup>, but finds an explanation in the scheme of Connes<sup>3</sup>.

## 2. Formule de trace semi-locale

Après les premiers travaux [10] sur la formule de trace semi-locale, une meilleure preuve a été obtenue basée sur une idée de [6] dans le cas d'une seule place archimédienne. Ce développement a été expliqué dans un cours du premier auteur au Collège de France en 1999 [11]. Nous renvoyons au chapitre 2 de [12] pour un exposé détaillé. Un outil-clé ici est le calcul quantifié du chapitre IV de [9].

### 2.1. Calcul quantifié

La principale idée du calcul quantifié est de donner une version en théorie des opérateurs des règles de calcul, basée sur la différentielle en théorie des opérateurs

$$(2.1) \quad \bar{d}f := [F, f],$$

où  $f$  est un élément dans une algèbre involutive  $\mathcal{A}$  représentée comme des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Le côté droit de (2.1) est le commutateur avec un opérateur auto-adjoint  $F$  sur  $\mathcal{H}$  avec  $F^2 = 1$ . On définit l'analogie des formes différentielles de degré  $n$  comme les combinaisons linéaires de monômes de la forme

$$\omega = f_0 \bar{d}f_1 \bar{d}f_2 \dots \bar{d}f_n \in \Omega^n.$$

La différentielle d'un élément de  $\Omega^n$  est définie comme le variant gradué de (2.1)

$$(2.2) \quad \bar{d}\omega := F\omega - (-1)^n \omega F.$$

On vérifie, en utilisant  $F^2 = 1$ , que le carré de la différentielle est 0,  $\bar{d}^2\omega = 0$ .

Ensuite, nous rappelons brièvement le paradigme du calcul quantifié en une variable, comme dans le chapitre IV de [9]. Nous laissons les fonctions  $f$  d'une seule variable agir comme des opérateurs de multiplication dans  $L^2(\mathbb{R}, ds)$ , par

$$(2.3) \quad (f\xi)(s) := f(s)\xi(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}, ds).$$

Appelons  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$  la transformation de Fourier par rapport au caractère  $e_{\mathbb{R}}(x) := e^{-2\pi ix}$

$$(2.4) \quad \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\xi)(y) := \int_{\mathbb{R}} \xi(x) e^{-2\pi ixy} dy.$$

Appelons  $\mathbf{1}_{[a,b]}$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  et soit

$$(2.5) \quad \Pi_{[a,b]} := \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \mathbf{1}_{[a,b]} \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}$$

le conjugué par transformation de Fourier  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$  de l'opérateur de multiplication par  $\mathbf{1}_{[a,b]}$ .

Soit  $H$  la transformation de Hilbert  $H = 2 \Pi_{[0,\infty]} - 1$  donnée, en portant attention à la valeur principale, par

$$(2.6) \quad (H\xi)(s) := \frac{1}{i\pi} \int \frac{\xi(t)}{s-t} dt.$$

**Définition 2.1.** Nous définissons la *différentielle quantifiée* de  $f$  comme étant l'opérateur

$$(2.7) \quad \mathcal{d}f := [H, f] = Hf - fH.$$

Ainsi, la différentielle quantifiée de  $f$  est donnée par le noyau

$$(2.8) \quad k(s, t) = \frac{i}{\pi} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}.$$

La définition 2.1 s'étend aux groupes modulés arbitraires  $C$ , *i.e.* aux groupes abéliens localement compacts dotés d'un homomorphisme propre  $\text{Mod} : C \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . Notons  $\text{Mod}(u) = |u|$  pour  $u \in C$ .

Soit  $\widehat{C}$  le dual de Pontrjagin de  $C$  doté de sa mesure de Haar. Les éléments de  $L^\infty(\widehat{C})$  agissent comme des opérateurs multiplicatifs sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} := L^2(\widehat{C})$ . L'opérateur  $H$  sur  $\mathcal{H}$  est donné par

$$(2.9) \quad H := 2\mathbb{F}_C \mathbf{1}_P \mathbb{F}_C^{-1} - 1,$$

où  $\mathbb{F}_C : L^2(C) \rightarrow \mathcal{H}$  est la transformation de Fourier et  $\mathbf{1}_P$  est la multiplication par la fonction caractéristique de l'ensemble  $P = \{u \in C \mid |u| \geq 1\}$ . Un tel  $H$  joue le rôle de la transformation de Hilbert.

De façon analogue à (2.7), nous définissons la différentielle "quantifiée" de  $f$  comme l'opérateur

$$(2.10) \quad \mathcal{d}f := [H, f] = Hf - fH.$$

Nous utilisons également la notation suivante dont la normalisation s'adapte à (2.5) :

$$(2.11) \quad \Pi_{[a,b]} := \mathbb{F}_C \mathbf{1}_Y \mathbb{F}_C^{-1}, \quad \text{for } Y = \{u \in C \mid e^{2\pi a} \leq |u| \leq e^{2\pi b}\}.$$

## 2.2. L'espace de Hilbert $L^2(X_S)$ pour un ensemble fini de places

Dans la suite, nous considérons le corps global  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Dans l'anneau des adèles de  $\mathbb{Q}$ , la mesure de Haar et la mesure de Haar du groupe multiplicatif des idèles sont mutuellement singuliers. Ce problème n'a pas lieu lorsqu'on restreint son attention à un ensemble fini  $S$  de places de  $\mathbb{Q}$ . Nous supposons que  $\infty \in S$ . Considérons l'anneau localement compact

$$(2.12) \quad \mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v.$$

Il contient  $\mathbb{Q}$  comme sous-anneau, en utilisant le plongement diagonal. Dénotons par  $\mathbb{Q}_S$  le sous-anneau de  $\mathbb{Q}$  donné par tous les nombres rationnels dont le dénominateur ne contient que des puissances des nombres premiers  $p \in S$ . En d'autres termes,

$$(2.13) \quad \mathbb{Q}_S = \{q \in \mathbb{Q} \mid |q|_v \leq 1, \forall v \notin S\}.$$

Le groupe  $\mathbb{Q}_S^*$  des éléments inversibles de l'anneau  $\mathbb{Q}_S$  est de la forme

$$(2.14) \quad \mathbb{Q}_S^* = \text{GL}_1(\mathbb{Q}_S) = \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} : p_j \in S \setminus \{\infty\}, n_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Nous approximons l'espace des classes d'adèles par l'espace semi-local des classes d'adèles  $X_S$  qui est le quotient

$$(2.15) \quad X_S := \mathbb{A}_S / \mathbb{Q}_S^*.$$

Le groupe

$$(2.16) \quad C_{\mathbb{Q},S} = \mathbb{A}_S^* / \mathbb{Q}_S^*, \quad \mathbb{A}_S^* = \text{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \text{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$$

agit naturellement par multiplication sur le quotient  $X_S$ .

Nous rappelons de [10, 12] que la transformation de Fourier  $\mathbb{F}$  sur l'espace de Bruhat-Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$  induit un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$ . Pour chaque place  $v \in S$ , nous choisissons un caractère de base  $\alpha_v$  de  $\mathbb{Q}_v$ . Cela permet d'identifier le groupe abélien localement compact  $\mathbb{Q}_v$  avec son dual de Pontrjagin par l'appariement

$$(2.17) \quad \langle a, b \rangle := \alpha_v(ab), \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}_v.$$

Nous normalisons la mesure de Haar de telle façon qu'elle soit auto-duale. Alors  $\alpha = \prod_v \alpha_v$  est un caractère de base du groupe additif  $\mathbb{A}_S$ , et nous dénotons par  $\mathbb{F}_\alpha$  la transformation de Fourier correspondante, agissant sur l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$ . Nous renvoyons à [10, 12] pour la démonstration du résultat suivant

**Lemme 2.2.** *Considérons le caractère  $\alpha = \prod_v \alpha_v$  et la transformation de Fourier correspondante  $\mathbb{F}_\alpha$  comme ci-dessus. L'application  $f \mapsto \mathbb{F}_\alpha(f)$ , pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$ , s'étend de manière unique en un opérateur unitaire  $\underline{\mathbb{F}}_\alpha$  sur l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$ .*

L'opérateur de mise à l'échelle  $\vartheta_a(\lambda)$ , for  $\lambda \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S)$ , est défini comme

$$(2.18) \quad (\vartheta_a(\lambda)\xi)(a) = \xi(\lambda^{-1}a), \quad \forall a \in \mathbb{A}_S, \forall \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_S).$$

Il n'est pas unitaire mais son module est donné par le module du groupe modulé  $C_{\mathbb{Q},S}$

$$(2.19) \quad \vartheta_a(\lambda)^* \vartheta_a(\lambda) = \vartheta_a(\lambda) \vartheta_a(\lambda)^* = |\lambda|_S.$$

Appelons  $w$  l'identification unitaire de  $L^2(X_S)$  avec  $L^2(C_{\mathbb{Q},S})$  (voir [12] Proposition 2.30). Elle entremêle la représentation  $\vartheta_a$  avec la représentation régulière suivante  $\vartheta_m$  de  $C_{\mathbb{Q},S}$

$$(2.20) \quad (\vartheta_m(\lambda)\xi)(v) := \xi(\lambda^{-1}v), \quad \forall \xi \in L^2(C_{\mathbb{Q},S}),$$

par l'égalité

$$(2.21) \quad w \vartheta_a(\lambda) w^{-1} = |\lambda|^{1/2} \vartheta_m(\lambda), \quad \forall \lambda \in C_{\mathbb{Q},S}.$$

Pour chaque place  $v$ , le groupe multiplicatif  $\mathbb{Q}_v^*$  est un groupe modulé, et par [17], il existe une fonction unitaire  $u_v \in L^\infty(\widehat{\mathbb{Q}}_v^*)$  qui nous permet d'exprimer la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_{\alpha_v}$  relative au caractère  $\alpha_v$ , comme une composition de l'inversion  $I(f)(s) := f(s^{-1})$  avec l'opérateur de convolution multiplicative associé à  $u_v$ . La fonction  $u_v$  est donnée par le rapport des facteurs locaux des  $L$ -fonctions (voir [17]).

Cette formule classique s'étend à notre contexte comme suit. Dénotons par  $u$  la fonction

$$(2.22) \quad u := \prod_S u_v \circ \pi_v.$$

où  $\pi_v : \widehat{C_{\mathbb{Q},S}} \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}_v^*$  est la projection duale dans le plongement  $\mathbb{Q}_v^* \hookrightarrow C_{\mathbb{Q},S}$ ,  $x \mapsto (1, 1, \dots, x, \dots, 1)$  qui met  $x$  à la place  $v$ . Nous avons maintenant le

**Lemme 2.3.** (voir [12]) : *Sur  $L^2(X_S)$ , on a*

$$(2.23) \quad \underline{\mathbb{F}}_\alpha = w^{-1} \circ I \circ \mathbb{F}_C^{-1} \circ u \circ \mathbb{F}_C \circ w,$$

où  $\mathbb{F}_C$  est la transformation de Fourier de  $C_{\mathbb{Q},S}$  et  $I(f)(s) := f(s^{-1})$  est l'inversion.

### 2.3. La formule de trace semi-locale

Comme dans le cas de la place unique  $\infty$ , nous introduisons les cutoffs infrarouge et ultraviolet. Pour l'infrarouge, nous utilisons la projection orthogonale  $P_\Lambda$  sur le sous-espace

$$(2.24) \quad \{\xi \in L^2(X_S) \mid \xi(x) = 0, \forall x \text{ with } |x| > \Lambda\}.$$

Par conséquent,  $P_\Lambda$  est l'opérateur agissant par multiplication par la fonction  $\rho_\Lambda$ , avec  $\rho_\Lambda(x) = 1$  pour  $|x| \leq \Lambda$  et  $\rho_\Lambda(x) = 0$  pour  $|x| > \Lambda$ .

Nous définissons le cutoff ultraviolet comme  $\widehat{P}_\Lambda = \mathbb{F}_\alpha P_\Lambda \mathbb{F}_\alpha^{-1}$ , où  $\mathbb{F}_\alpha$  est la transformation de Fourier du lemme 2.2, qui dépend du choix du caractère de base  $\alpha = \prod_v \alpha_v$ . Alors, nous posons

$$(2.25) \quad R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda.$$

Nous rappelons du chapitre 2 de [12] le résultat suivant :

**Lemme 2.4** Notons  $S \ni \infty$  comme ci-dessus. Pour tout  $\Lambda > 0$ , il y a un opérateur unitaire

$$(2.26) \quad W = W_\Lambda : L^2(X_S) \rightarrow L^2(\widehat{C_{\mathbb{Q},S}})$$

tel que, pour tout  $h_j \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q},S})$ ,  $j = 1, 2$ , on a

$$(2.27) \quad W \vartheta_a(\tilde{h}_1) \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda \vartheta_a(\tilde{h}_2) W^* = \widehat{h}_1 \left( \frac{1}{2} u^{-1} \dot{d}u \Pi_{[-\infty, \frac{2 \log \Lambda}{2\pi}]} + \Pi_{[0, \frac{2 \log \Lambda}{2\pi}]} \right) \widehat{h}_2.$$

Ici  $\tilde{h}_j(\lambda) = |\lambda|^{-1/2} h_j(\lambda)$ , l'opérateur  $\dot{d}u$  est la différentielle quantifiée de la fonction  $u := \prod_S u_v \circ \pi_v$  de (2.22) et  $\widehat{h}_j$  est l'opérateur de multiplication par la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_C(h_j)$ .

Ce résultat combiné avec la formule

$$(u_1 u_2)^{-1} \dot{d}(u_1 u_2) = u_2^{-1} (u_1^{-1} \dot{d}u_1) u_2 + u_2^{-1} \dot{d}u_2$$

nous permet de calculer  $\text{Tr}(\widehat{h}_1 u^{-1} \dot{d}u \widehat{h}_2)$  in (2.27) comme une somme, et l'on obtient

$$(2.28) \quad \text{Tr}(\widehat{h}_1 \left( \frac{1}{2} u^{-1} \dot{d}u \right) \widehat{h}_2) = \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w,$$

où  $h = h_1 \star h_2$  est tel que  $\vartheta_m(h) = \vartheta_m(h_1) \vartheta_m(h_2)$ .

On dérive alors la formule de trace semi-locale suivante (voir [10, 12]) :

**Théorème 2.5.** Notons  $\mathbb{A}_S$  comme ci-dessus,  $\alpha = \prod_{v \in S} \alpha_v$  un choix de caractère de base. Soit  $f \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q},S})$  une fonction à support compact. Alors, dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on a

$$(2.29) \quad \text{Tr}(\vartheta_a(f) R_\Lambda) = 2f(1) \log \Lambda + \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{f(w^{-1})}{|1-w|} d^*w + o(1).$$

Notons que  $\vartheta_a(f) = \int f(\lambda) \vartheta_a(\lambda) d^*\lambda$  correspond par (2.21) à  $\vartheta_m(h) = \int h(\lambda) \vartheta_m(\lambda) d^*\lambda$ , où on a  $h(\lambda) = |\lambda|^{1/2} f(\lambda)$ . Par rapport à la fonction test  $h$ , les termes dans la partie droite de (2.29) prennent la forme plus symétrique

$$(2.30) \quad \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{f(w^{-1})}{|1-w|} d^*w = \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w^{-1}) d^*w = \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w.$$

### 3. Espace de Sonine et tentative de X.-J. Li

Dans l'article [7], J. F. Burnol a trouvé une réalisation spectrale des zéros de zeta, très proche de la réalisation spectrale de [10], mais qui utilise les espaces de Sonine implémentés par Louis de

Branges dans son approche de RH.

Motivé par le rôle des espaces de Sonine, ainsi que par son propre travail sur la formule de trace semi-locale [18], X.-J. Li a fait, au début de l'année 2019, une tentative courageuse de démontrer la positivité de Weil qui est équivalente à RH (voir [5]). Plutôt que d'introduire un cutoff pour les valeurs élevées de  $q$  et  $p$  comme dans [10], il prescrit un cutoff près de zéro, *i.e.* pour les petites valeurs de  $q$  et  $p$ . En fait, il fait cela d'une manière équilibrée *i.e.* en requérant  $q > \Lambda$  et  $p > \Lambda^{-1}$ . La coïncidence entre cette prescription et la relation ci-dessus entre les graphiques d'"absorption" et d'"émission" est très surprenante puisque le cutoff proposé proche de zéro correspond exactement aux Figures 4, 5, 6.

Cette tentative a pourtant échoué. Cela vaut cependant la peine de réétudier cette approche en détails et également de comprendre ce qui manque encore, tout en conservant ce qui est intéressant. Il y a deux faits de base sur lesquels la tentative de Li s'appuie :

**Fait 3.1.** Soient  $A, B$  des opérateurs positifs bornés dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et supposons que  $AB$  est de classe trace, alors  $\text{Tr}(AB) \geq 0$ .

*Preuve :* Soit  $A^{1/2}$  la racine carrée de  $A$ . Alors, puisqu'en général le spectre d'un produit  $ST$  est le même que le spectre de  $TS$  excepté potentiellement pour 0, on obtient, en notant  $\text{Spec}^*$  la partie non-nulle du spectre

$$\text{Spec}^*(AB) = \text{Spec}^*(A^{1/2}BA^{1/2}) \geq 0.$$

Cela montre que toutes les valeurs propres de l'opérateur de classe trace  $AB$  sont positives, et on conclut en utilisant le théorème de Lidskii.  $\square$

**Fait 3.2.** La formule explicite de Riemann-Weil appliquée à une fonction test  $h \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q}})$  avec support compact ne fait intervenir qu'un nombre fini de places.

L'idée naturelle, alors, est d'utiliser le paradigme semi-local de [10] rappelé dans la section 2 et plus précisément la formule (2.28) pour montrer une inégalité de la forme

$$(3.1) \quad \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*}' \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*u \leq 0, \quad h = h_1 \star h_2, \quad h_2(w) := \overline{h_1(w^{-1})}.$$

Notons que par construction, les opérateurs  $\widehat{h}_j$  donnés comme les opérateurs de multiplication par la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_C(h_j)$  remplissent, quand  $h_2 = h_1^*$  comme dans (3.1), la condition suivante :

**Fait 3.3.** Quand  $h_2 = h_1^*$ , l'opérateur  $\widehat{h}_1 \widehat{h}_2$  est positif.

Maintenant, en utilisant la propriété cyclique de la trace et la commutativité de l'algèbre de la multiplication par des fonctions, on obtient de (2.28) l'égalité suivante :

$$(3.2) \quad \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*}' \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w = \text{Tr} \left( \widehat{h}_1 \widehat{h}_2 \left( \frac{1}{2} u^{-1} d^*u \right) \right).$$

L'idée de X.-J. Li est de remplacer l'opérateur  $R_{\Lambda} = \widehat{P}_{\Lambda} P_{\Lambda}$  par l'opérateur positif  $T = P \widehat{P} P$ , où  $P$  est la projection correspondant au cutoff à proximité de zéro, *i.e.* en se restreignant aux  $|w| \geq 1$ . On obtient, en utilisant les notations de (2.28), que

$$T = P u^* (1 - P) u P.$$

On voit que le Fait 3.1 devrait entraîner (3.1), si l'on pouvait prouver que

$$Pu^*(1 - P)uP = -\frac{1}{2}u^{-1}\dot{d}u.$$

Comme nous le verrons, ceci est équivalent au fait de contrôler le signe de l'opérateur  $u^{-1}\dot{d}u$ . Le calcul quantifié donne en fait le critère général suivant pour contrôler le signe de la "dérivée logarithmique"  $u^{-1}\dot{d}u$  d'un unitaire  $u$ .

**Lemme 3.4.** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert,  $u$  un opérateur unitaire et  $F = 2P - 1$ , quand  $P$  est une projection orthogonale. Alors, avec  $\dot{d}u := [F, u]$ , les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- i.  $Pu^*(1 - P)uP = -\frac{1}{2}u^{-1}\dot{d}u$
- ii.  $u^{-1}\dot{d}u \leq 0$
- iii.  $Pu = PuP$

Quand on travaille avec le calcul quantifié en une variable, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 3.5.** *Soit  $\mathcal{H}$  et  $F$  définis comme en 2.1., et  $u$  une fonction unitaire. Alors les conditions équivalentes du Lemme 3.4 sont vérifiées si et seulement si  $u^*$  est une fonction intérieure au sens de Beurling [3].*

*Preuve :* La fonction  $u^*$  est intérieure si et seulement si elle préserve le sous-espace qui est le domaine de la projection  $P$ , avec  $F = 2P - 1$ . Alors le lemme 3.4 fournit l'équivalence requise.  $\square$

Disposant maintenant du Lemme 3.4 et du Corollaire 3.5, nous pouvons alors comprendre pourquoi l'approche directe proposée par X.-J. Li échoue à démontrer la positivité de Weil. En effet, dans notre cas et en prenant une seule place pour simplifier la discussion, le problème se pose de savoir si les fonctions  $u_v^*$ , où  $u_v$  est donné par le ratio des facteurs locaux sur la droite critique, sont des fonctions intérieures. En fait, on peut se demander si  $u_v$  appartient à l'un des espaces de Hardy  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}^\pm)$  du demi-plan

$$\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}^\pm := \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \Re(z) > 1/2\}.$$

En un nombre premier fini  $p$ , la fonction  $u_p$  est donnée par le ratio de facteurs locaux

$$(3.3) \quad u_p(s) := \frac{1 - p^{-(1-z)}}{1 - p^{-z}}, \quad z = \frac{1}{2} + is.$$

C'est une fonction de module 1 pour  $s \in \mathbb{R}$ . Les zéros au dénominateur  $1 - p^{-z}$  donnent des pôles,

$$1 - p^{-z} = 0 \iff z \in \frac{2\pi i}{\log p} \mathbb{Z}$$

ce qui montre que dans le demi-plan gauche, la fonction n'est pas holomorphe. D'un autre côté, dans le demi-plan droit, le dénominateur ne s'évanouit pas et la fonction est holomorphe. Pourtant elle n'est pas bornée puisque pour des valeurs réelles de  $z$ , elle se comporte de la façon suivante :

$$\frac{1 - p^{-(1-z)}}{1 - p^{-z}} \sim -p^{z-1}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Regardons maintenant la place archimédienne. Là, le ratio des facteurs locaux est

$$(3.4) \quad u_\infty(s) := \phi\left(\frac{1}{2} + is\right), \quad \phi(z) = \frac{\pi^{\frac{1-z}{2} - \frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}.$$

La fonction  $\phi(z)$  est de module 1 pour  $z = \frac{1}{2} + is$ , et elle a des pôles dans le demi-plan gauche. Elle est holomorphe dans le demi-plan droit  $\Re(z) \geq \frac{1}{2}$ , pourtant, là, elle n'est pas bornée. En fait, on a, en utilisant la formule du complément

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \Rightarrow \frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)\sin(\pi x)$$

avec  $x = \frac{1}{2}(1+z)$ , que

$$\phi(z) = \pi^{-\frac{1}{2}-z}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\sin\left(\pi\frac{1+z}{2}\right).$$

Ainsi, même sur l'axe réel, la fonction  $\phi(z)$  qui s'évanouit sur les entiers impairs prend de très grandes valeurs sur les entiers pairs comme

$$\phi(20) = \frac{1856156927625}{8\pi^{20}} \sim 26.4562.$$

Ainsi nous concluons qu'aucune des fonctions  $u_v(s)^*$  ne remplit la condition requise dans le corollaire 3.5.

Nous remarquons finalement que, a priori, l'inégalité (3.1) pourrait être encore vérifiée, même si la tentative décrite ci-dessus de le prouver échouait. En fait, on a le fait suivant :

**Fait 3.6.** L'inégalité (3.1) n'est pas vérifiée en général.

*Preuve :* Considérons le cas le plus simple quand  $S$  est réduit à la seule place archimédienne. L'inégalité (3.1) devrait alors impliquer, en utilisant l'expression du côté gauche en fonction de la dérivée logarithmique de  $u_\infty(s)$ , que la dérivée logarithmique (multipliée par  $i$ ) a un signe constant. Mais  $u_\infty(s) = e^{2i\theta(s)}$  où  $\theta(s)$  est la fonction angulaire de Riemann-Siegel (voir [12] Chapitre II, §5.1, Lemme 2.20). Par conséquent, l'inégalité (3.1) devrait impliquer que la fonction angulaire de Riemann-Siegel  $\theta(s)$  est une fonction monotone, mais en regardant son graphe (Figure 7), on voit que ça n'est pas le cas.

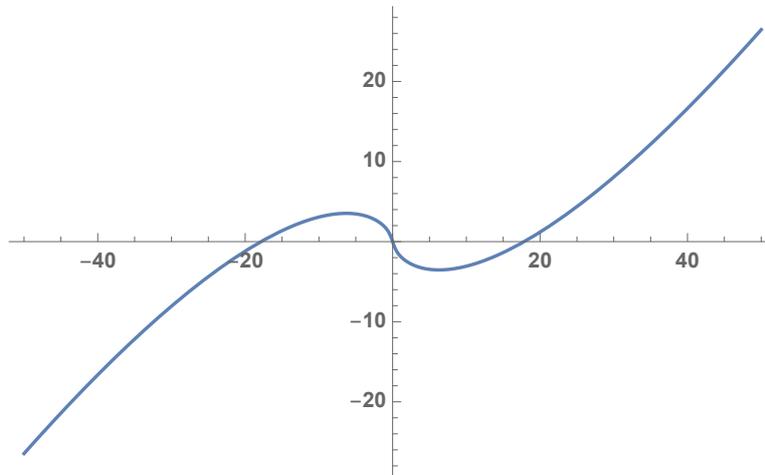


FIGURE 7 : Riemann-Siegel function.

## 4. Un problème de théorie des opérateurs

Par un résultat d'A. Weil (voir [5]), RH est équivalente à la négativité du côté droit des formules explicites pour toutes les fonctions de test  $f$  de la forme

$$f(x) = \int_0^\infty g(xy)\overline{g(y)}dy, \quad \int_0^\infty g(x)dx = 0, \quad \int_0^\infty g(x)d^*x = 0.$$

On peut en outre restreindre notre attention aux fonctions de test  $g$  à support compact (voir [4]). Avec ces notations, le côté droit des formules explicites correspond, dans le cas plus général des  $L$ -fonctions, aux termes dans (2.29). Pour passer à la forme plus symétrique (2.30), on pose  $h_1(x) = x^{1/2}g(x)$ , en obtenant de la sorte

$$f(x) = \int_0^\infty g(xy)\overline{g(y)}dy = x^{-1/2} \int_0^\infty h_1(xy)\overline{h_1(y)}d^*y.$$

Ainsi, avec  $h_2 = h_1^*$ , de telle façon que  $h_2(x) := \overline{h_1(x^{-1})}$  on obtient

$$h(x) = x^{1/2}f(x) = \int_0^\infty h_1(xy)\overline{h_1(y)}d^*y = \int_0^\infty h_1(xy^{-1})\overline{h_1(y^{-1})}d^*y = (h_1 \star h_2)(x).$$

Par conséquent, la positivité de Weil correspond bien à (3.1) mais on a besoin d'imposer les deux conditions

$$(4.1) \quad \int_0^\infty h_1(x)x^{\pm 1/2}d^*x = 0.$$

La discussion ci-dessus suggère la conjecture suivante :

**Conjecture 4.1.** *Le paradigme de la théorie des opérateurs semi-locaux avec  $S := \{\infty\} \cup \{p \mid p < q\}$  suffit à prouver l'inégalité de Weil pour toutes les fonctions test à support dans l'intervalle  $(q^{-1/2}, q^{1/2})$ .*

### 4.1. Formule de Poisson et caractères de base

La formule de Poisson fournit la raison conceptuelle pour laquelle le ratio des facteurs locaux apparaît sur la droite critique quand on écrit la transformation de Fourier comme la composition de l'inversion avec la convolution multiplicative. Pour comprendre ce point, commençons avec une seule place, *i.e.* prenons  $S = \{\infty\}$ , et procédons au niveau formel en ne nous préoccupant pas trop des points techniques. On introduit l'opérateur suivant agissant sur les fonctions paires  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  satisfaisant  $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$ ,

$$(4.2) \quad \mathfrak{E}(f)(x) := |x|^{1/2} \sum_{n>0} f(nx).$$

La formule de sommation de Poisson énonce alors que, en supposant que l'on prenne la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$  associée au caractère de base  $e_{\mathbb{R}}$  pour lequel le réseau  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  est auto-dual (*i.e.* le caractère de base  $e_{\mathbb{R}}(x) = e^{-2\pi ix}$  utilisé dans (2.4)), on a

$$(4.3) \quad \mathfrak{E}(\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(f))(x) = \mathfrak{E}(f)(x^{-1}), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nous définissons la dualité  $\langle \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R} \rangle$  par le bicharactère

$$(4.4) \quad \mu(v, s) = v^{-is}, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+^*, s \in \mathbb{R},$$

de telle façon que la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_\mu : L^2(\mathbb{R}_+^*) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est donnée par

$$(4.5) \quad \mathbb{F}_\mu(f)(s) := \int_0^\infty f(v)v^{-is}d^*v.$$

Quand on lit (4.2) dans le dual du groupe multiplicatif  $\mathbb{R}_+^*$ , la multiplication de la variable  $x \mapsto nx$  qui est une translation dans  $\mathbb{R}_+^*$  devient la multiplication de la fonction par  $n^{is}$ . Avec  $f_n(x) := x^{1/2}f(nx)$  on a alors

$$\mathbb{F}_\mu(f_n)(s) = \int_0^\infty f(nv)v^{1/2-is}d^*v = n^{-(1/2-is)}\mathbb{F}_\mu(f)(s),$$

de telle façon que, à ce niveau formel, on obtient

$$\mathbb{F}_\mu(\mathfrak{E}(f))(s) = \zeta(1/2 - is)\mathbb{F}_\mu(f)(s).$$

Ainsi nous pouvons penser à  $\mathfrak{E}$ , quand on la lit en termes de Fourier, comme à une multiplication par  $\zeta(1/2 - is)$ . Le fait que  $\mathfrak{E}$  puisse être vue, en Fourier, comme un opérateur multiplicatif, n'est pas surprenant puisque, par construction,  $\mathfrak{E}$  commute avec la mise à l'échelle. Une autre application qui commute avec la mise à l'échelle est la composée  $I \circ \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$  de l'inversion  $I$  avec la transformation de Fourier additive  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ . Ainsi cette composition est fournie, quand on la lit en termes de Fourier, comme la multiplication par une fonction  $u$  qui est de module 1 du fait de l'unitarité. Le point alors est que la formule de Poisson (??) énonce que l'application  $\mathfrak{E}$  conjugue  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$  avec l'inversion  $I$  et on obtient, toujours à ce niveau formel, que

$$u(s) = \zeta(1/2 - is)/\zeta(1/2 + is).$$

Par l'équation fonctionnelle, ce quotient est le ratio 3.4 des facteurs locaux archimédiens.

Cette discussion s'adapte au cas semi-local à la condition que l'on remplace la sommation sur  $\mathbb{Z}$  dans la formule de Poisson par la sommation sur le sous-groupe discret (??).

Puisque  $\mathbb{Q}_S$  est un anneau, cette sommation est invariante sous la multiplication par le groupe des unités  $\mathbb{Q}_S^*$ . De plus, tout élément  $q \in \mathbb{Q}_S$  est un produit de façon unique  $q = um$ , où  $u \in \mathbb{Q}_S^*$  est une unité et  $m \in M_S$  est un élément du monoïde multiplicatif des entiers positifs premiers à tous les  $p \in S$ . Le rôle de l'application  $\mathfrak{E}$  de (4.2) est maintenant joué par

$$(4.6) \quad \mathfrak{E}(f)(x) := |x|^{1/2} \sum_{m \in M_S} f(mx).$$

Quand on calcule en termes de Fourier comme ci-dessus mais maintenant en faisant intervenir les caractères du groupe  $C_{\mathbb{Q},S}$ , (4.6) produit des sommes pour les  $L$ -fonctions qui se réduisent, pour le caractère trivial, à

$$\sum_{M_S} m^{-1/2+is} = \zeta(1/2 - is) \prod_{p \in S} (1 - p^{-1/2+is}).$$

Ainsi nous voyons, heuristiquement comme ci-dessus, que la formule de Poisson donne l'explication conceptuelle pour le Lemme 2.3.

Il y a en général un choix à effectuer pour les caractères additifs de base  $\alpha_S$  de  $\mathbb{A}_S$  tels que  $\mathbb{Q}_S$  est un réseau auto-dual, mais cette ambiguïté disparaît quand on travaille dans le quotient  $X_S = \mathbb{A}_S/\mathbb{Q}_S^*$ . En particulier, la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_\alpha$  est indépendante de tels choix. En effet, les transformations de Fourier de la même fonction pour des choix de caractères différents pour lesquels  $\mathbb{Q}_S$  est un réseau auto-dual sont reliées par l'action (par mise à l'échelle) du groupe  $\mathbb{Q}_S^*$  et ainsi, leur différence s'évanouit dans l'espace  $L^2(X_S)$ . L'inégalité de Weil nécessite la normalisation ci-dessus des caractères additifs et cela indique que la formule de Poisson devrait jouer un rôle-clé dans la solution de la Conjecture 4.1.

En fait, il y a une autre raison frappante pour laquelle la formule de Poisson est intimement reliée à la Conjecture 4.1. Il s’agit de la construction, due à J.P. Kahane (voir [8]), des éléments non-triviaux de l’espace de Sonine, *i.e.* des fonctions qui s’évanouissent à proximité de l’origine comme le fait leur transformée de Fourier. Dénotons par  $\Pi := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$  la distribution de Poisson, qui est la somme des distributions de Dirac sur les entiers. Alors la distribution tempérée  $\mathcal{D}(\Pi)$  vérifie la propriété d’évanouissement ci-dessus, quand  $\mathcal{D}$  est un opérateur différentiel dont le domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$  est l’espace des fonctions qui remplissent les deux conditions

$$(4.7) \quad f(0) = \widehat{f}(0) = 0.$$

Le choix le plus simple pour  $\mathcal{D}$  est  $\mathcal{D}(f)(x) := xf''(x)$ , puisqu’on vérifie par intégration par parties que l’intégrale de  $\mathcal{D}(f)$  s’évanouit. Pour n’importe quel tel choix de  $\mathcal{D}$ , la distribution  $\mathcal{D}(\Pi)$  vérifie la propriété requise de support de Sonine. On obtient alors une solution dans l’espace de Schwartz en appliquant à  $\mathcal{D}(\Pi)$  le lissage par convolution avec une fonction lisse  $\phi$  avec petit support près de zéro, et la multiplication par la transformée de Fourier de  $\phi$ . En fait, le choix ci-dessus de l’opérateur différentiel  $\mathcal{D}$ , quoique simple, n’est pas symétrique par rapport à la transformée de Fourier. On vérifie que la fonction simple  $\mathcal{D} := D_u^2 + D_u$  de notre Hamiltonien de mise à l’échelle  $D_u(f)x := xf'(x)$  marche effectivement, commute avec la transformée de Fourier, et on obtient

$$(4.8) \quad \mathcal{D}(f)(x) = x^2 f''(x) + 2xf'(x).$$

On vérifie directement que le domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$  est l’ensemble des fonctions qui remplissent les deux conditions (4.7). Toute cette construction s’étend textu au cas semi-local.

**Remarque 4.2.** D’une façon surprenante, l’expression de l’adjoint  $\Delta_2 := D_u^2 - D_u$  fournit la structure tropicale du Site de mise à l’échelle comme expliqué dans [14], équation (1).

## 4.2. Temps versus Énergie

Dans l’approche de RH défendue par M. Berry et J. Keating [1, 2], on cherche une interprétation des zéros de la fonction zeta de Riemann comme niveaux d’énergie d’un système quantique. Dans notre approche pourtant, les zéros apparaissent naturellement comme des “temps” *i.e.* d’une manière duale (voir [10]). Bien que ce fait puisse rendre perplexé au premier abord, nous allons brièvement expliquer ci-dessous pourquoi ce point de vue dual est en fait plus naturel en vue de la généralisation de la fonction zeta de Riemann au domaine des corps globaux. En effet, dans ce domaine, on rencontre des avatars bien plus simples de la fonction zeta de Riemann. Ils sont associés à une courbe  $C$  sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$ . Il s’avère que ces analogues de la fonction zeta de Riemann  $\zeta(s)$  sont en fait les fonctions de la forme  $L(q^{-s})$ , où  $q$  est la cardinalité du corps fini sur lequel la courbe est définie. De plus,  $L(z)$  est une fraction rationnelle et ses zéros sont déterminés par les zéros  $z_j$  du numérateur polynomial  $P(z)$  dont le degré est égal à deux fois le genre  $g$  de la courbe. Par un théorème célèbre de A. Weil<sup>3</sup>, tous les  $z_j$  sont sur le cercle de rayon  $q^{-1/2}$ . Ainsi les zéros  $s$  de  $L(q^{-s})$  sont tous de partie réelle  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  et leur partie imaginaire  $\Im(s)$  est de la forme

$$\Im(s) = \frac{1}{\log q} (\alpha_j + 2\pi k), \quad j \in \{1, \dots, 2g\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

où les  $-\alpha_j$  sont les arguments des  $z_j$  et sont déterminés seulement modulo  $2\pi$ . Ce genre de distribution des nombres, étant périodique, est très naturelle, comme une distribution en “temps”, et non pas en “énergie”.

---

3. référence de ce théorème ?

### 4.3. Analyse et Géométrie

La discussion ci-dessus n'élimine pas la pensée lancinante par laquelle nous avons commencé. En fait, il y a une possibilité réelle que l'on puisse trouver une manière de résoudre la Conjecture 4.1, en se concentrant d'abord sur le cas le plus simple d'une place unique et en trouvant un moyen d'utiliser la condition du support sur la fonction test. Un aspect effrayant de cette stratégie est que la positivité de Weil est très dépendante des choix judicieux des valeurs principales et il est difficile d'éviter des erreurs de calcul. Cette approche analytique est, à cet égard, par sa vulnérabilité, assez différente de l'approche géométrique que nous avons graduellement développée dans [13, 15]. Tandis que l'espace des classes d'adèles est clairement implicite dans l'approche analytique semi-locale décrite ci-dessus, sa structure géométrique est seulement révélée au niveau global et elle révèle son sens conceptuel en les points du Site de mise à l'échelle, où l'action du groupe de mise à l'échelle se révèle être l'action du Frobenius.

## Références

- [1] M. Berry, J. Keating,  *$H = qp$  and the Riemann zeros*, “Supersymmetry and Trace Formulae : Chaos and Disorder”, edited by J.P. Keating, D.E. Khmelnitskii and I.V. Lerner, Plenum Press. [Link to download the paper](#)
- [2] M. Berry, J. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*. SIAM Rev. 41 (1999), n° 2, 236–266.
- [3] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*. Acta Mathematica 81, (1948) 239–255.
- [4] E. Bombieri, J. Lagarias, *Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis*. J. Number Theory 77 (1999), n° 2, 274–287.
- [5] E. Bombieri, *The Riemann hypothesis*. The millennium prize problems, 107–124, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006.
- [6] J. F. Burnol, *Sur les formules explicites. I. Analyse invariante* [On explicit formulae. I. Invariant analysis] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (2000), n° 6, 423–428.
- [7] J. F. Burnol, *Sur certains espaces de Hilbert de fonctions entières, liés à la transformation de Fourier et aux fonctions  $L$  de Dirichlet et de Riemann*. (French) [Some Hilbert spaces of entire functions associated with the Fourier transform and Dirichlet and Riemann L-functions] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), n° 3, 201–206.
- [8] J. F. Burnol, *Sur les espaces de Sonine associés par de Branges à la transformation de Fourier*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 689–692.
- [9] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).
- [10] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), n° 1, 29–106.
- [11] A. Connes, *Formules explicites, formules de trace et réalisation spectrale des zéros de la fonction zéta*, Cours au Collège de France, 1999.
- [12] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Société mathématique américaine, 2008.
- [13] A. Connes, *An essay on the Riemann Hypothesis*. Dans “Open problems in mathematics”, Springer (2016), volume édité par Michael Rassias et John Nash.

- [14] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Scaling Site*. Selecta Math. (N.S.) 23 (2017), n° 3, 1803–1850.
- [15] A. Connes, C. Consani, *The Riemann-Roch strategy, complex lift of the Scaling Site*, À paraître dans “Advances in Noncommutative Geometry, On the Occasion of Alain Connes’ 70th Birthday”, Chamseddine, A., Consani, C., Higson, N., Khalkhali, M., Moscovici, H., Yu, G. (Eds.), Springer (2019). Disponible à l’adresse <http://arxiv.org/abs/1805.10501>. ISBN 978-3-030-29596-7.
- [16] A. Connes, C. Consani, *On Absolute Algebraic Geometry* prépublication (2019). Disponible à l’adresse <https://arxiv.org/abs/1909.09796>
- [17] J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke’s zeta-function*, Thèse, Princeton, 1950. Réimprimé dans J.W.S. Cassels et A. Frölich (Eds.) “Algebraic Number Theory”, Academic Press, 1967.
- [18] Li, Xian-Jin, *A generalization of A. Connes’ trace formula*. J. Number Theory 130 (2010), n° 2, 386–430.