

RYTHMES MOTIVIQUES

ALAIN CONNES

Résumé : Dans cet article sur les mathématiques et la musique, nous expliquons comment on peut “écouter les motifs” comme des interprètes rythmiques. Dans l'exemple le plus simple que l'on étudiera, le motif est simplement le H^1 de la réduction modulo un nombre premier p d'une courbe hyperelliptique (définie sur \mathbb{Q}). Les instants d'apparition correspondant sont donnés par les arguments des valeurs propres complexes du Frobenius. Nous trouvons une relation surprenante entre les propriétés mathématiques des motifs et les idées sur les rythmes développées par le compositeur Olivier Messiaen.

Le mot “motif”, inventé par Alexander Grothendieck, a une signification précise en mathématiques. Nous expliquons ci-après comment les motifs mathématiques donnent naissance à des interprètes rythmiques et illustrons leur variété par des exemples concrets simples. Un espace géométrique ordinaire, tel qu'un espace compact riemannien, a une gamme associée, au sens musical, comme cela a été illustré dans la conférence célèbre “peut-on entendre la forme d'un tambour ?” de Marc Kac [7]. Le passage des motifs à la musique expliqué ci-dessous est assez différent. Notre thèse est qu'un motif se manifeste non par une gamme musicale (qui serait un ensemble de fréquences) mais plutôt par un ensemble (périodique) d’“instants d'apparition”. Dans l'exemple le plus simple, qui est celui que nous considérerons, comme une source riche d'exemples concrets, le motif est simplement la cohomologie H^1 de la réduction modulo un nombre premier p d'une courbe hyperelliptique (définie sur \mathbb{Q}). Les “instants d'apparition” correspondant sont donnés par les arguments des valeurs propres complexes du Frobenius. Notre but qui est de “nature illustrative” est de donner à voir les motifs les plus simples comme des interprètes rythmiques. À une courbe hyperelliptique de genre g correspond pour chaque nombre premier p ne divisant pas le discriminant une collection de $2g$ instants d'apparition ayant un profond sens mathématique qui se répètent de manière périodique selon une fréquence $\log p$. Nous avons trouvé en mettant en œuvre ce projet une relation surprenante entre des propriétés mathématiques et les idées développées par le compositeur Olivier Messiaen, comme on l'explique dans la Section 1.

1. Motivation mathématique

Un des plus grands problèmes non résolus des mathématiques est l’“hypothèse de Riemann” qui concerne une formule trouvée par le mathématicien Bernhard Riemann reliant le nombre de nombres premiers aux zéros d'une mystérieuse fonction analytique appelée la fonction zeta. Ma propre rencontre de ce problème a eu lieu quand, alors que je travaillais dans le domaine de la mécanique quantique statistique avec J. B. Bost, nous avons trouvé un système mécanique quantique simple dont la fonction de partition est la fonction zeta de Riemann. Du fait de ce travail, j'ai été invité en 1996 à une conférence à Seattle pour célébrer les grandes contributions du mathématicien norvégien Atle Selberg à l'étude de la fonction zeta de Riemann. Par sérendipité, j'ai trouvé, à mon retour de Seattle, qu'une réalisation spectrale des zéros de zeta émergeait naturellement du travail en physique quantique que j'avais fait avec J. B. Bost, qu'on appelle le “système-BC”. Dans la façon habituelle

Référence <https://arxiv.org/pdf/1812.09946.pdf>.

Traduction : Denise Vella-Chemla, novembre 2021.

de chercher une interprétation des zéros de la fonction zeta de Riemann, on les recherche comme les niveaux d'énergie d'un système quantique (voir par exemple [2]) et ce qui était étrange c'est que dans ma propre approche, les zéros apparaissent naturellement comme des "instants d'apparition" *i.e.* de façon duale (voir [4]). Alors que cela peut rendre perplexé au premier abord, j'expliquerai brièvement pourquoi ce point de vue dual est en fait plus naturel dans le but de généraliser la fonction zeta de Riemann au domaine des corps globaux. En effet, quand les mathématiciens sont confrontés à un problème très difficile, ils étendent leur champ d'étude de façon à incorporer la question initiale dans un contexte plus général dont la plus grande étendue permet de considérer des instances plus simples du problème qui, étant plus aisées à traiter, peuvent fournir des indices de la solution. C'est ainsi qu'on rencontre des avatars plus simples de la fonction zeta de Riemann. Ils sont associés à une courbe C sur un corps fini \mathbb{F}_q . Il s'avère que ces analogues de la fonction zeta de Riemann $\zeta(s)$ sont en fait des fonctions de la forme $L(q^{-s})$ où q est la cardinalité du corps fini sur lequel la courbe est définie. De plus, $L(z)$ est une fraction rationnelle et les zéros sont déterminés par le numérateur polynomial $P(z)$ dont le degré est le double du genre g de la courbe. Par un théorème célèbre d'André Weil, tous les zéros z_j de $P(z)$ sont sur le cercle de rayon $q^{-1/2}$. Ainsi les zéros de $L(q^{-s})$ sont tous de partie réelle $\Re(s_k) = \frac{1}{2}$ et leur partie imaginaire est de la forme

$$\Im(s) = \frac{1}{\log q} (\alpha_j + 2\pi k), \quad j \in \{1, \dots, 2g\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

où les $-\alpha_j$ sont les arguments des z_j et sont déterminés seulement modulo 2π . Cette sorte de distribution périodique des nombres est très naturelle comme une distribution dans le "temps". En fait, si on spécifie le choix des arguments par le domaine fondamental $-\pi \leq \alpha_j \leq \pi$ et qu'on les interprète comme fournissant des "instants d'apparition" lorsque les notes sont jouées, plusieurs faits frappants sont mis en évidence :

1. L'équation fonctionnelle de la fonction L signifie que le rythme obtenu est palindromique, *i.e.* avec $-\pi \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_g \leq 0 \leq \alpha_{g+1} \leq \dots \leq \alpha_{2g} \leq \pi$, on a

$$\alpha_{2g+1-j} = -\alpha_j$$

2. Les valeurs obtenues sont en général des nombres irrationnels.
3. La période du rythme est donnée par le $\frac{2\pi}{\log q}$ et le "tempo" accélère lorsque q croît.

Le compositeur Olivier Messiaen a introduit dans son travail (voir [8] et le traité complet [9]) à la fois la caractéristique palindromique (qu'il a appelée "rythmes non-rétrogradables") et l'irrationalité de l'attaque (les "instants d'apparition"). Cela vaut le coup de dessiner le type de rythme palindromique qui caractérise les zéros de la fonction L d'une courbe sur un corps fini, et nous allons entreprendre de faire cela ci-dessous.

2. Exemples explicites de rythmes motiviques

Dans cette section, nous montrons dans une forme visuelle les rythmes motiviques de genre $g = 5$ de façon à illustrer la construction générale. Le choix du nombre $g = 5$ pourrait être remplacé par n'importe quel autre nombre, le nombre d'instants d'apparition est $2g = 10$. Les motifs sont déterminés en choisissant une courbe C de genre $g = 5$ définie sur un corps de nombres rationnels et ensuite en réduisant la courbe modulo chacun des nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ excepté pour cet ensemble de nombres premiers de cardinalité dénombrable "de mauvaise réduction" pour

lesquels la réduction se comporte mal. Les courbes les plus adaptées au calcul sont les courbes “hyperelliptiques”. On les appelle ainsi parce que les plus simples d’entre elles (celles avec $g = 1$) sont les courbes elliptiques bien connues qui sont un joyau de la géométrie algébrique. Une courbe hyperelliptique sur \mathbb{Q} est donnée par une équation de la forme $y^2 = P(x)$ lorsque $P(x)$ est un polynôme à coefficients entiers et dont le degré détermine le genre de telle façon que nous devons utiliser un degré égal à 11 pour obtenir une courbe de genre 5. Les nombres premiers de mauvaise réduction sont ceux qui divisent le discriminant de $P(x)$ et par conséquent, nous prendrons les plus simples dont le discriminant ne fait intervenir aucun nombre premier compris entre 7 et 67 de telle façon que nous pourrions explorer les motifs associés à la séquence de nombres premiers en question. En commençant avec une telle courbe hyperelliptique, on obtient pour chaque nombre premier ne divisant pas le discriminant de P une courbe sur le corps fini \mathbb{F}_p et on peut calculer les zéros de sa fonction L . Donc le choix du polynôme est dicté par l’absence d’un diviseur premier du discriminant compris entre 7 et 67. On commence avec

$$C_1 : y^2 = x^{11} - 4x^{10} + 15x^8 - 40x^6 + 20x^5 + 25x^3 - 25$$

On donne ci-dessous la liste des polynômes de degré 10, associés aux nombres premiers 7, 11, \dots , 67 et dont les zéros donnent les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^1(C_1/p)$ où C_1/p est la réduction de la courbe hyperelliptique C_1 modulo le nombre premier p . Le degré de ces polynômes est le double du genre, *i.e.* $5 \times 2 = 10$ et le terme de degré 10 est toujours de la forme $p^5 x^{10}$. Les zéros complexes sont tous de module $p^{-1/2}$ et les arguments des zéros nous donnent les rythmes palindromiques qui fixent l’interprétation associée à C_1/p .

$$\begin{aligned}
& 1 - x + 3x^2 - 11x^3 + 28x^4 - 74x^5 + 196x^6 - 539x^7 + 1029x^8 - 2401x^9 + 16807x^{10} \\
& 1 + 8x^2 + 20x^3 - 49x^4 + 124x^5 - 539x^6 + 2420x^7 + 10648x^8 + 161051x^{10} \\
& 1 + 6x + 28x^2 + 94x^3 + 271x^4 + 656x^5 + 3523x^6 + 15886x^7 + 61516x^8 + 171366x^9 + 371293x^{10} \\
& 1 + 4x + 20x^2 + 39x^3 - 8x^4 - 304x^5 - 136x^6 + 11271x^7 + 98260x^8 + 334084x^9 + 1419857x^{10} \\
& 1 + 3x - 8x^2 - 106x^3 + x^4 + 870x^5 + 19x^6 - 38266x^7 - 54872x^8 + 390963x^9 + 2476099x^{10} \\
& 1 - 9x + 22x^2 + 52x^3 - 20x^4 - 1946x^5 - 460x^6 + 27508x^7 + 267674x^8 - 2518569x^9 + 6436343x^{10} \\
& 1 + 6x + 37x^2 + 121x^3 + 312x^4 + 3070x^5 + 9048x^6 + 101761x^7 + 902393x^8 + 4243686x^9 + 20511149x^{10} \\
& 1 - 5x + 11x^2 + 49x^3 + 428x^4 - 6606x^5 + 13268x^6 + 47089x^7 + 327701x^8 - 4617605x^9 + 28629151x^{10} \\
& 1 + 2x - 6x^2 - 16x^3 + 882x^4 + 4052x^5 + 32634x^6 - 21904x^7 - 303918x^8 + 3748322x^9 + 69343957x^{10} \\
& 1 - 3x + 16x^2 - 8x^3 - 746x^4 + 12868x^5 - 30586x^6 - 13448x^7 + 1102736x^8 - 8477283x^9 + 115856201x^{10} \\
& 1 - 3x + 21x^2 - 54x^3 - 272x^4 + 14706x^5 - 11696x^6 - 99846x^7 + 1669647x^8 - 10256403x^9 + 147008443x^{10} \\
& 1 + 4x + 64x^2 + 406x^3 + 4450x^4 + 16386x^5 + 209150x^6 + 896854x^7 + 6644672x^8 + 19518724x^9 + 229345007x^{10} \\
& 1 + 218x^3 + 772x^4 - 6358x^5 + 40916x^6 + 612362x^7 + 418195493x^{10} \\
& 1 - x + 20x^2 + 18x^3 + 918x^4 - 26614x^5 + 54162x^6 + 62658x^7 + 4107580x^8 - 12117361x^9 + 714924299x^{10} \\
& 1 + 10x + 90x^3 + 4604x^4 + 42354x^5 + 280844x^6 + 334890x^7 + 138458410x^9 + 844596301x^{10} \\
& 1 - 4x - 7x^2 + 264x^3 + 2588x^4 - 12188x^5 + 173396x^6 + 1185096x^7 - 2105341x^8 - 80604484x^9 + 1350125107x^{10}
\end{aligned}$$

FIGURE 1 : Polynômes associés à $H^1(C_1/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

Nous ne dessinons pas le nombre premier p , $7 \leq p \leq 67$, correspondant à chacun de ces polynômes mais on voit que les coefficients de x^{10} augmentent quand on descend dans la liste comme ils doivent le faire puisqu’ils sont donnés par la cinquième puissance p^5 . La propriété “palindromique” de ces polynômes est, avec $P(z)$ associé au nombre premier p l’égalité

$$p^5 z^{10} P(1/(pz)) = P(z)$$

qui correspond à l'équation fonctionnelle de la fonction zeta *i.e.* le remplacement $s \mapsto 1 - s$ dont l'effet sur $z = p^{-s}$ est

$$z = p^{-s} \mapsto p^{-(1-s)} = 1/(pz).$$

Comme les rythmes se répètent périodiquement, nous n'en montrons qu'une période et pour des raisons de simplicité, nous ne montrons pas l'accélération du tempo. Nous les dessinons d'abord linéairement puis de façon circulaire, ce qui convient mieux à leur propriété périodique et est plus proche de leur sens mathématique.

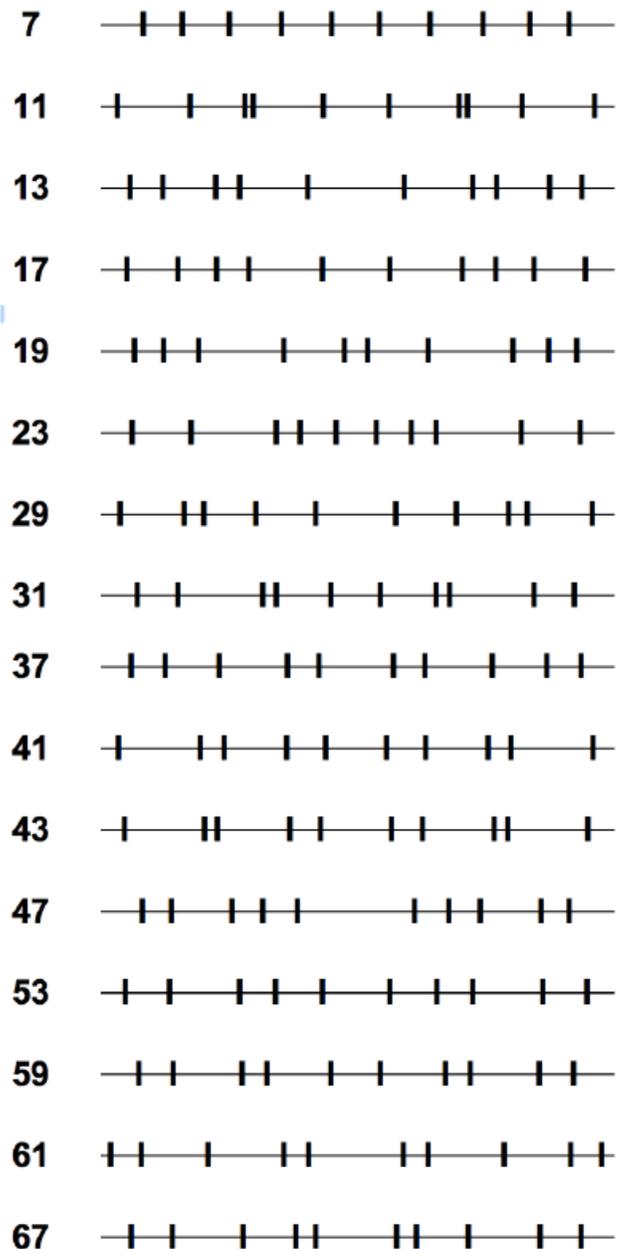


FIGURE 2 : Rythmes motiviques pour $H^1(C_1/p)$, jusqu'à $p = 67$.

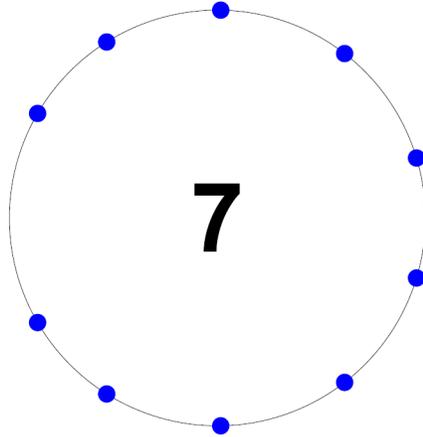


FIGURE 3 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 7$.

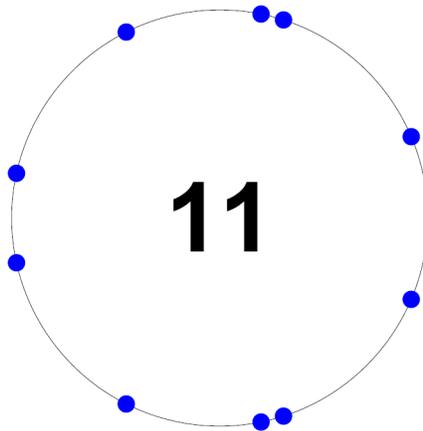


FIGURE 4 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 11$.

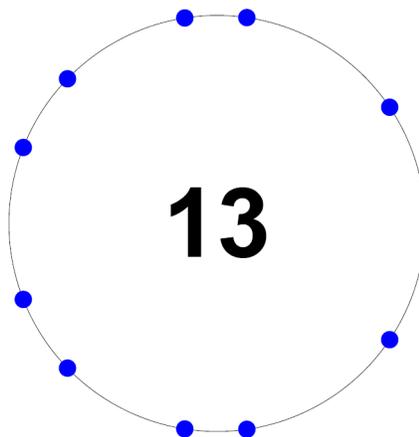


FIGURE 5 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 13$.

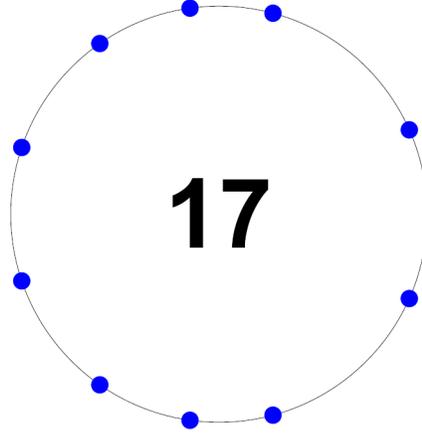


FIGURE 6 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 17$.

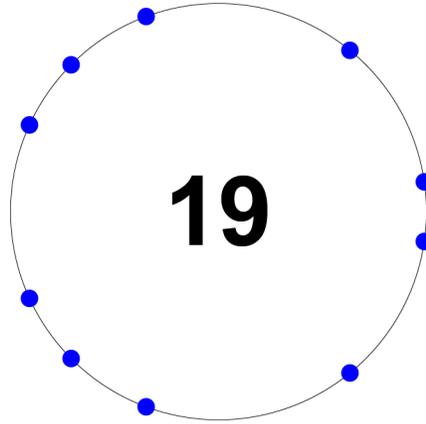


FIGURE 7 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 19$.

Nous donnons l'exemple suivant d'une courbe hyperelliptique de genre 5 avec une bonne réduction pour tous les nombres premiers compris entre 7 et 67.

Elle est donnée par l'équation :

$$C_2 : y^2 = x^{11} - 60x^7 - 64x^6 - 320x^4 - 380x^3 - 512x - 640$$

$1 - x - x^2 + x^3 + 36x^4 - 68x^5 + 252x^6 + 49x^7 - 343x^8 - 2401x^9 + 16807x^{10}$
 $1 + 5x + 16x^2 + 61x^3 + 219x^4 + 624x^5 + 2409x^6 + 7381x^7 + 21296x^8 + 73205x^9 + 161051x^{10}$
 $1 + x + 16x^2 + 21x^3 + 89x^4 + 32x^5 + 1157x^6 + 3549x^7 + 35152x^8 + 28561x^9 + 371293x^{10}$
 $1 + 2x + 10x^2 + 140x^3 + 478x^4 + 1246x^5 + 8126x^6 + 40460x^7 + 49130x^8 + 167042x^9 + 1419857x^{10}$
 $1 + 5x - 7x^2 - 119x^3 + 176x^4 + 3320x^5 + 3344x^6 - 42959x^7 - 48013x^8 + 651605x^9 + 2476099x^{10}$
 $1 - x + 9x^2 + 116x^3 + 402x^4 + 522x^5 + 9246x^6 + 61364x^7 + 109503x^8 - 279841x^9 + 6436343x^{10}$
 $1 - 9x + 67x^2 - 247x^3 + 768x^4 - 1948x^5 + 22272x^6 - 207727x^7 + 1634063x^8 - 6365529x^9 + 20511149x^{10}$
 $1 - 11x + 48x^2 - 63x^3 - 1045x^4 + 9804x^5 - 32395x^6 - 60543x^7 + 1429968x^8 - 10158731x^9 + 28629151x^{10}$
 $1 - 9x + 66x^2 - 466x^3 + 2334x^4 - 15056x^5 + 86358x^6 - 637954x^7 + 3343098x^8 - 16867449x^9 + 69343957x^{10}$
 $1 + 3x + 27x^2 - 49x^3 + 715x^4 - 221x^5 + 29315x^6 - 82369x^7 + 1860867x^8 + 8477283x^9 + 115856201x^{10}$
 $1 - 9x + 104x^2 - 786x^3 + 6764x^4 - 42256x^5 + 290852x^6 - 1453314x^7 + 8268728x^8 - 30769209x^9 + 147008443x^{10}$
 $1 + 4x + 60x^2 + 342x^3 + 2692x^4 + 18448x^5 + 126524x^6 + 755478x^7 + 6229380x^8 + 19518724x^9 + 229345007x^{10}$
 $1 - 13x + 90x^2 - 128x^3 - 3658x^4 + 48750x^5 - 193874x^6 - 359552x^7 + 13398930x^8 - 102576253x^9 + 418195493x^{10}$
 $1 + 2x + 7x^2 - 204x^3 + 2036x^4 + 10644x^5 + 120124x^6 - 710124x^7 + 1437653x^8 + 24234722x^9 + 714924299x^{10}$
 $1 - 10x + 78x^2 - 682x^3 + 5842x^4 - 48402x^5 + 356362x^6 - 2537722x^7 + 17704518x^8 - 138458410x^9 + 844596301x^{10}$
 $1 + 3x + 59x^2 + 139x^3 - 273x^4 + 15950x^5 - 18291x^6 + 623971x^7 + 17745017x^8 + 60453363x^9 + 1350125107x^{10}$

FIGURE 8 : Polynômes associés à $H^1(C_2/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

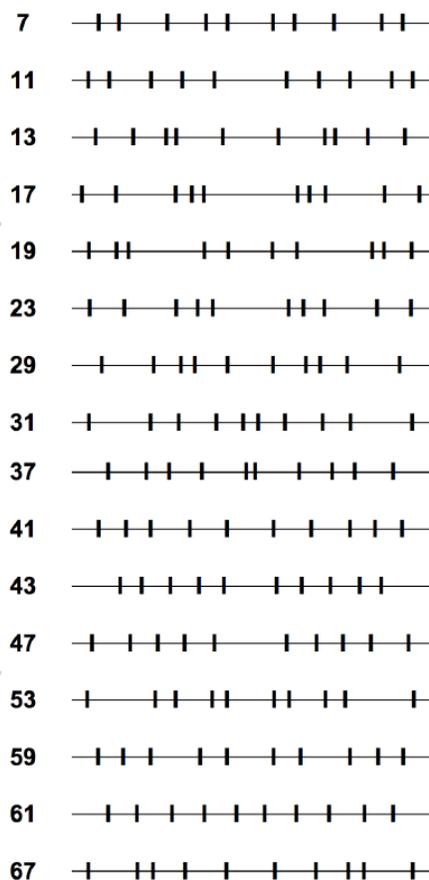


FIGURE 9 : Rythmes associés à $H^1(C_2/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

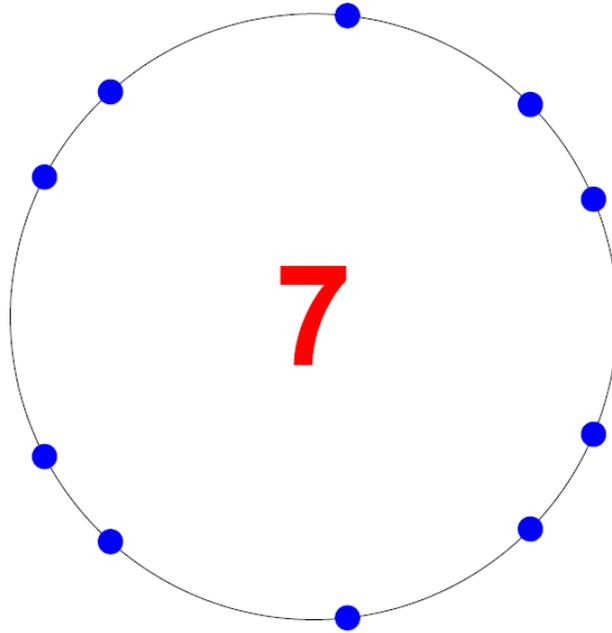


FIGURE 10 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 7$

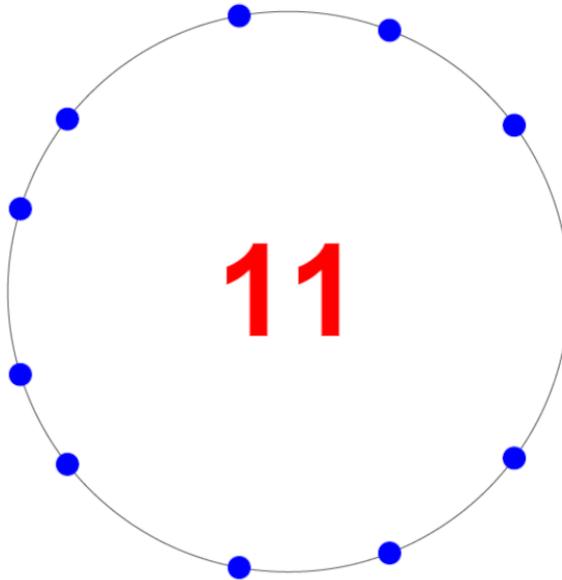


FIGURE 11 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 11$

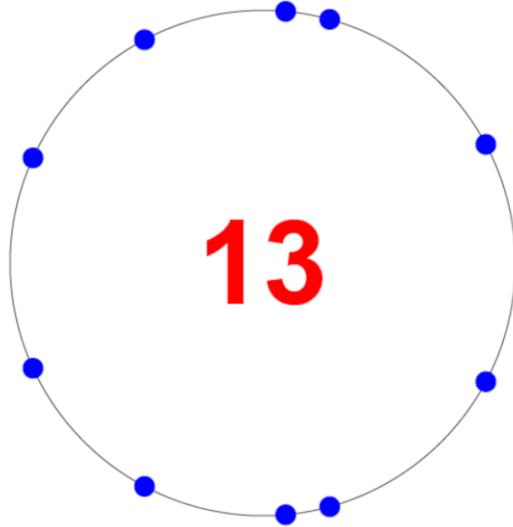


FIGURE 12 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 13$

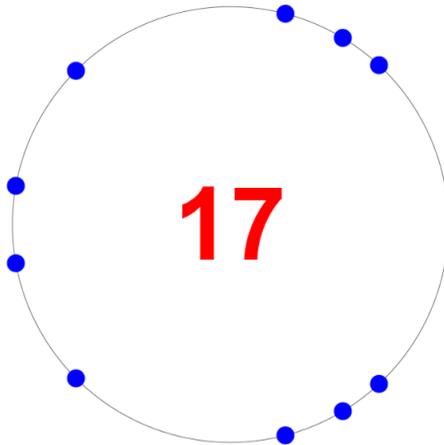


FIGURE 13 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 17$

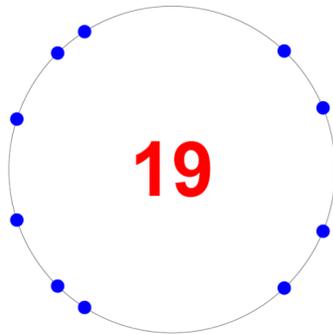


FIGURE 14 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 19$.

Dans le prochain paragraphe nous expliquons comment nous avons conçu une formule mathématique pour une partition de base pour les nombres premiers compris entre 7 et 67.

Il y a des inter-relations remarquables, à la fois cognitives et théoriques, entre les motifs et les rythmes qui sont bien documentés dans la littérature (voir [10], [11]). Nous avons choisi de laisser la partie rythmique complètement indépendante du choix d'un ensemble de motifs associés aux nombres premiers dont il est question dans le prochain paragraphe. La première justification du maintien de cette indépendance est que les motifs rythmiques s'appliquent au jeu de n'importe quelle partition ayant le bon nombre de notes et la propriété de palindromie. La seconde raison est qu'on souhaite rester en accord avec l'origine mathématique des instants d'apparition, accord qui serait perdu si ces instants étaient réinterprétés en fonction des fréquences.

3. Partition de base

Les rythmes motiviques provenant d'une courbe C dépendent d'un nombre premier et puisqu'on est libre de choisir les mélodies de la chanson palindromique qui seront rythmiquement interprétés par le motif, on trouve que l'on devrait associer un chant *i.e.* ici un ensemble ordonné de 5 notes (ce qui donnera un total de 10 notes par symétrie) à chaque nombre premier (ici ceux compris entre 7 et 67). Ce qui importe, c'est que les notes associées aux nombres premiers permettent de reconnaître de quel nombre premier il s'agit. On peut essayer d'abord des méthodes simples comme le nom d'un nombre premier traduit en un certain langage mais cela est loin d'être "canonique". Pour obtenir un processus canonique, on a besoin d'utiliser l'information provenant des mathématiques bien connues qui interviennent dans les fréquences de la gamme musicale qui nous est familière et qui sont données par les puissances entières du nombre $q := 2^{\frac{1}{12}}$ (qui est numériquement proche de $3^{\frac{1}{19}}$).

Dans ce paragraphe nous décrivons comment obtenir à partir d'une formule mathématique une partition palindromique de dix notes pour chaque nombre premier compris entre 7 et 67. L'idée est que la partition associée au nombre premier p devrait être reliée au nombre \sqrt{p} parce que le motif est de poids $\frac{1}{2}$. Ce poids d'un motif correspond au coefficient de rétrécissement du cercle sur lequel sont montrés les zéros dans les Figures 10 à 14. L'inverse du rayon de ce cercle est égal à \sqrt{p} . De plus, puisque la gamme musicale est l'ensemble des $\{q^n\}$, les puissances entières du nombre $q := 2^{\frac{1}{12}}$, il est naturel de commencer par la puissance entière $q^{n_1(p)}$ qui est la plus proche de \sqrt{p} . Cela correspond à un motif naturellement associé à p . Donc pour commencer, posons :

$$n_1(p) := \text{Partie entière}(6 \log p / \log 2)$$

Puisque pour construire les notes suivantes de la partition, nous avons besoin d'obtenir des nombres entiers et d'être sûr qu'ils suffisent à caractériser p , nous avons choisi d'utiliser les termes suivants $n_j(p)$ dans l'expansion de la fraction continue

$$6 \log p / \log 2 = n_1 + 1/(n_2 + 1/(n_3 + 1/(n_4 + 1/(n_5 + \dots))))$$

Pour satisfaire les rôles respectifs des $n_j(p)$, il est naturel de les convertir en la liste suivante

$$(n_1(p), n_1(p) - n_2(p), n_1(p) - n_2(p) + n_3(p), n_1(p) - n_2(p) + n_3(p) - n_4(p), \\ n_1(p) - n_2(p) + n_3(p) - n_4(p) + n_5(p))$$

Cela nous fournit une partition que nous complétons par symétrie, pour la rendre palindromique, de manière à être capable de "retourner" les rythmes palindromiques, pour tout nombre premier compris entre 7 et 67.

FIGURE 15 : Partitions des lignes mélodiques associées à $7 \leq p \leq 47$.

FIGURE 16 : Partition des lignes mélodiques associées à $53 \leq p \leq 67$.

Il reste à cette étape la tâche musicale d'harmoniser la partition simple ci-dessus et on a toute liberté pour faire cela. Une contrainte est que les accords doivent être joués en même temps que les notes de la mélodie initiale de façon à les laisser subir le changement de rythme dicté par l'“interprétation motivique”. Nous en avons composé un simple, utilisé pour créer la vidéo, mais nous mettons au défi les musiciens d'en trouver un vraiment bon !

Sans cette contrainte, on peut produire une harmonisation qui est plus dynamique et qui permet de devenir familier avec les notes de la mélodie initiale (les mélodies associées aux deux premiers nombres premiers utilisés 7 et 11 sont répétées deux fois) ; l'enregistrement peut être téléchargé à l'adresse [lien de téléchargement du fichier mp3](#). Nous l'utiliserons également ci-dessous pour l'illustration visuelle.

4. Illustration visuelle : La danse des nombres premiers

Pour illustrer visuellement la succession des nombres premiers et ensuite le jeu de chaque rythme motivique, nous avons créé une petite chorégraphie.

4.1. La première minute : le crible d'Ératosthène

Dans la première partie, la musique est jouée avec des intervalles égaux entre les notes et l'illustration visuelle est une chorégraphie du crible d'Ératosthène qui est conçu comme suit. Il y a deux rectangles comme dans la Figure 17. Chacun de ces rectangles contient $60 \times 60 = 3600$ positions possibles, chacune d'entre elles correspondant à un nombre entre 1 et 3600. La première ligne par exemple correspond aux nombres compris entre 1 (en haut à gauche) et 60 (en haut à droite), la seconde ligne aux nombres compris entre 61 et 120 et etc. Au début, tous les multiples de 2 (*i.e.* tous les nombres pairs) sauf 2 lui-même, ont été amenés en bas dans le rectangle inférieur. La même opération a été réalisée pour tous les multiples de 3 et tous les multiples de 5. Être un multiple de l'un de ces trois premiers nombres premiers est sans effet si on ajoute un multiple de 60 et donc la figure géométrique obtenue est formée d'une union de lignes verticales comme on peut le voir sur la Figure 17. La seule ligne verticale dans le graphique initial qui ne correspond pas à un nombre premier $p < 60$, est la ligne verticale associée à $49 = 7^2$. Tous les autres nombres composés ont été éliminés comme multiples de 2, 3 ou 5. La chorégraphie commence quand la musique associée à 7 est jouée, les danseurs dans le rectangle ci-dessus qui sont à une position qui est un multiple de sept (excepté en sept lui-même) descendent tous dans le rectangle du bas comme cela apparaît sur les Figures 18, 19, 20 et se positionnent à leur place dans le rectangle inférieur. Ensuite, quand la musique de 11 est jouée, tous les danseurs à des positions qui sont des multiples de onze descendent excepté onze lui-même. Cela continue pour tous les nombres premiers jusqu'à 67. À la fin de la chorégraphie, les nombres qui restent dans le rectangle du haut sont tous les nombres premiers entre 2 et 3600 (le nombre 1 est ignoré). Le nombre de danseurs est environ 460 parce qu'au début, il y a seulement 963 danseurs dans le rectangle supérieur alors qu'à la fin, seuls les nombres premiers inférieurs à 3600 restent et il y a 503 tels nombres premiers. La vidéo est visionnable en cliquant sur le lien suivant : [Vidéo](#). Pour l'harmonisation “dynamique” de la danse des premiers jouée de façon égale, on peut cliquer sur le lien suivant : [Danse des nombres premiers](#). Noter que le chant de chaque nombre premier est ici répété deux fois avec les danseurs attendant pendant la répétition.

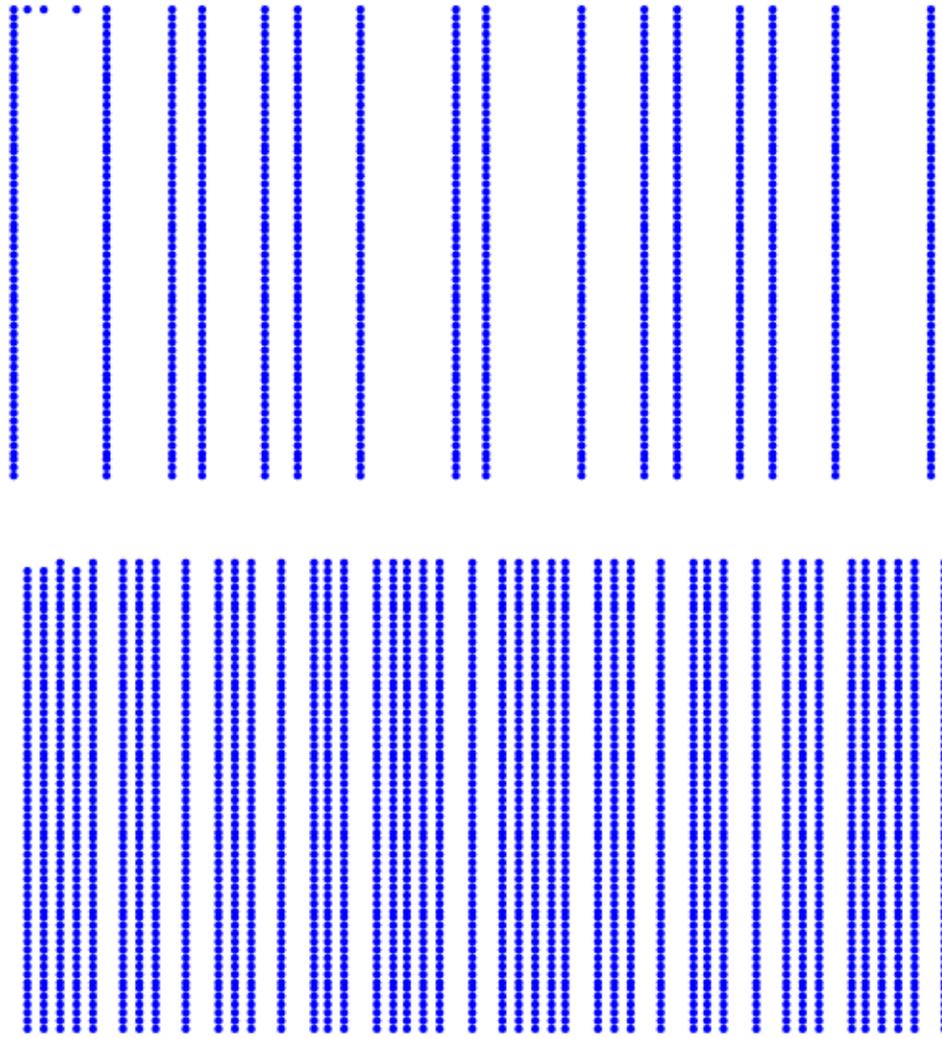


FIGURE 17 : Configuration de départ : tous les multiples de 2 sauf 2 lui-même, ainsi que ceux de 3 et 5 ont été amenés dans le rectangle du bas.

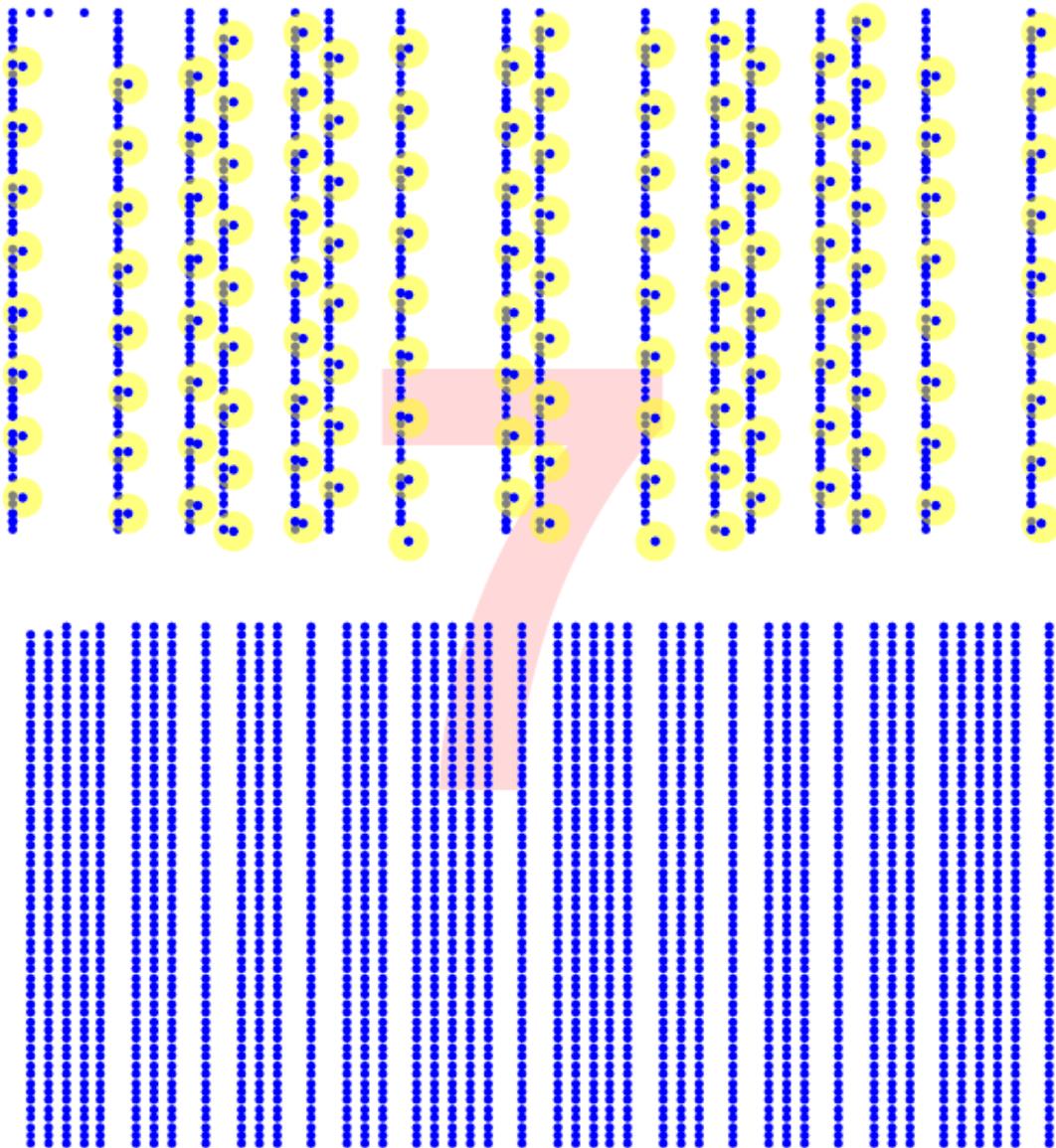


FIGURE 18 : Tous les multiples de 7 sauf 7 lui-même sont en train de descendre dans le rectangle du bas. Cela montre la première étape quand les danseurs correspondant aux multiples de 7 font un pas de côté vers la droite.

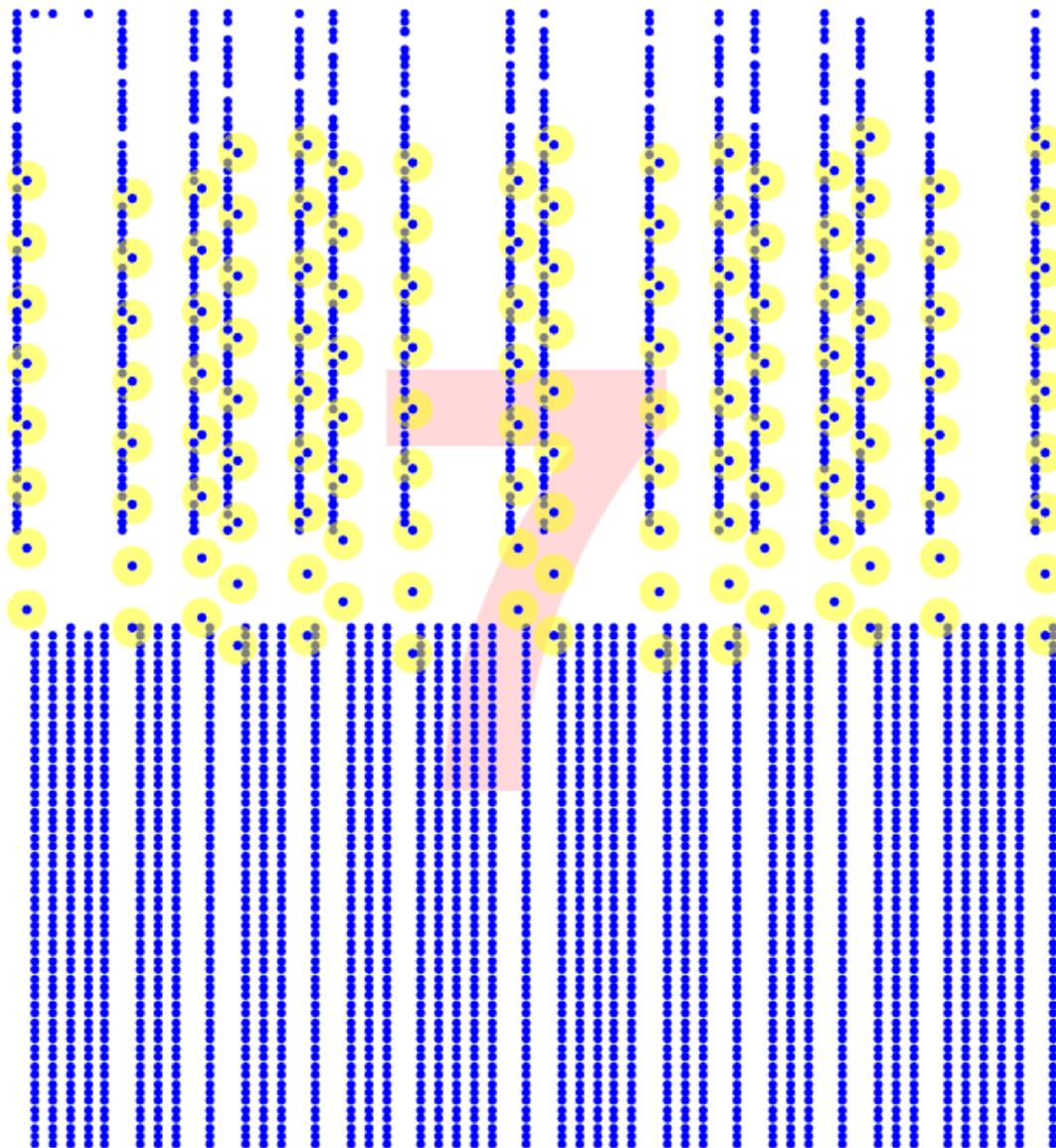


FIGURE 19 : Tous les multiples de 7 sauf 7 lui-même sont en train de descendre dans le rectangle du bas. Pendant que ce mouvement s'effectue, la petite musique correspondant à 7 est jouée.

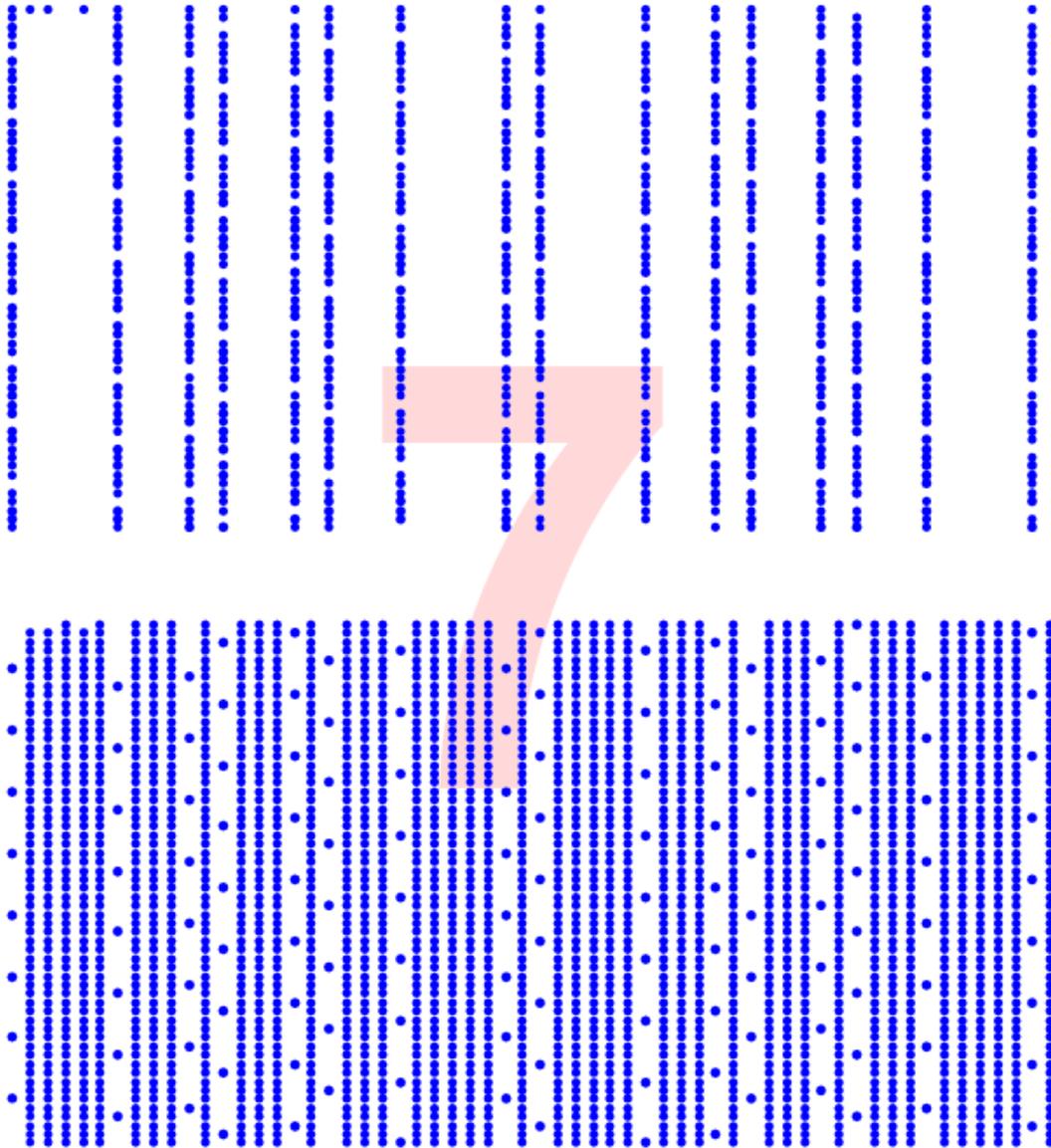


FIGURE 20 : Tous les multiples de 7 sauf 7 lui-même sont en train de descendre et trouvent leur place dans le rectangle du bas. Pendant que ce mouvement s'effectue, la musique correspondant à 7 est jouée.

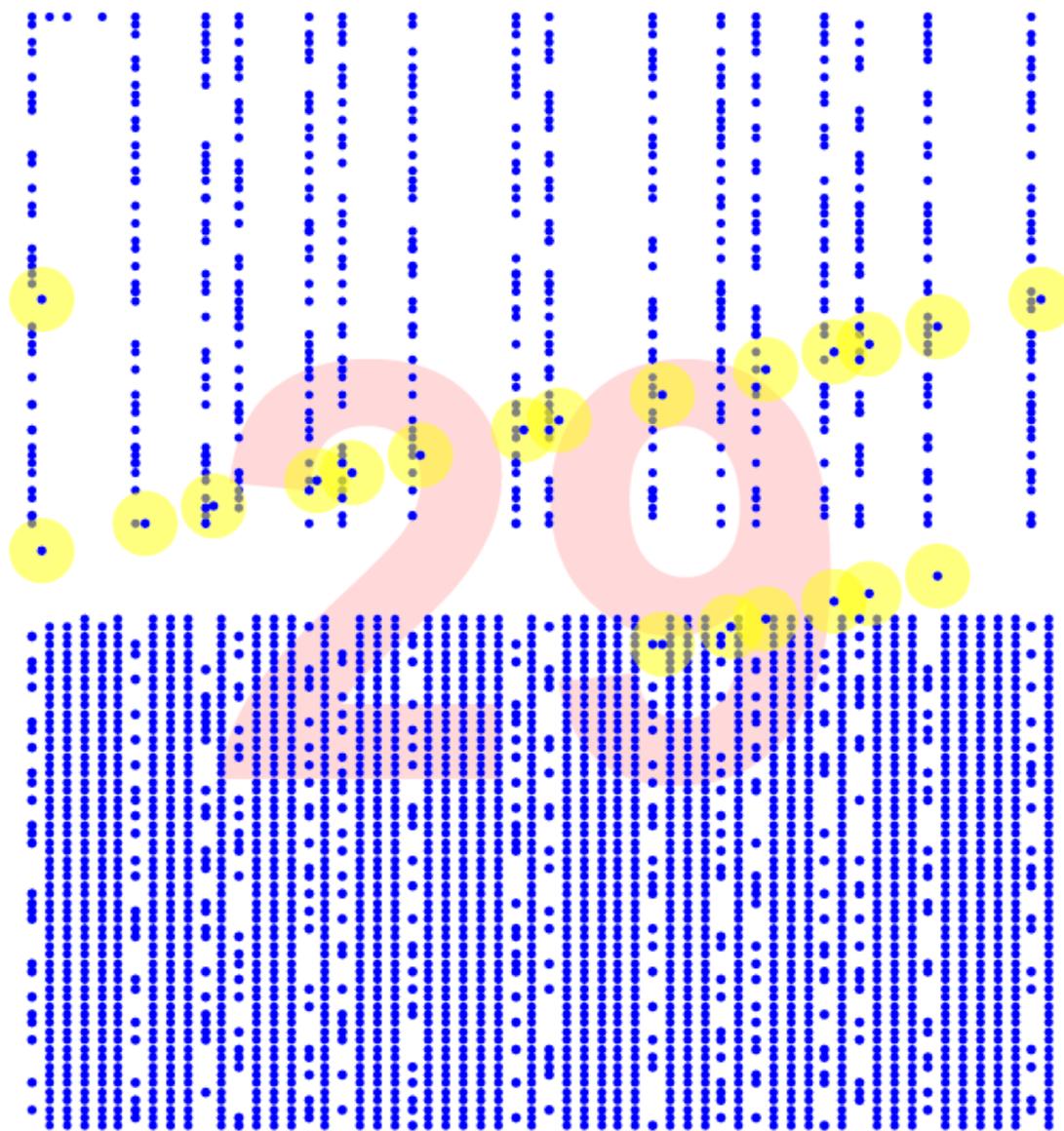


FIGURE 21 : Tous les multiples de 29 sauf 29 sont en train de descendre dans le rectangle du bas. Pour 29 et également pour 31, ces multiples forment une jolie figure géométrique.

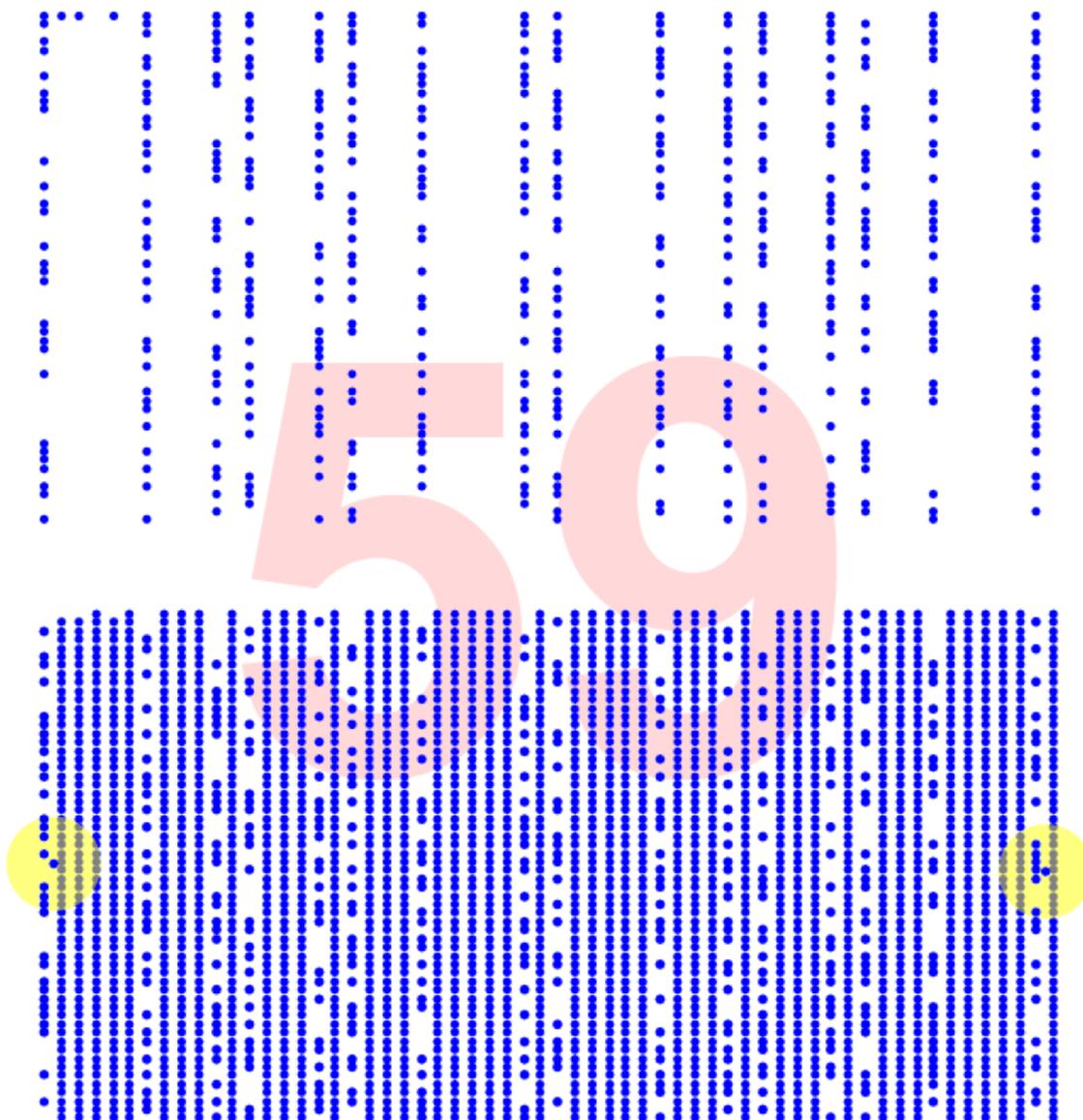


FIGURE 22 : Tous les multiples de 59 excepté 59 lui-même sont en train de descendre dans le rectangle du bas. Les deux derniers danseurs correspondent à 59^2 sur la gauche et à 59×61 sur la droite.

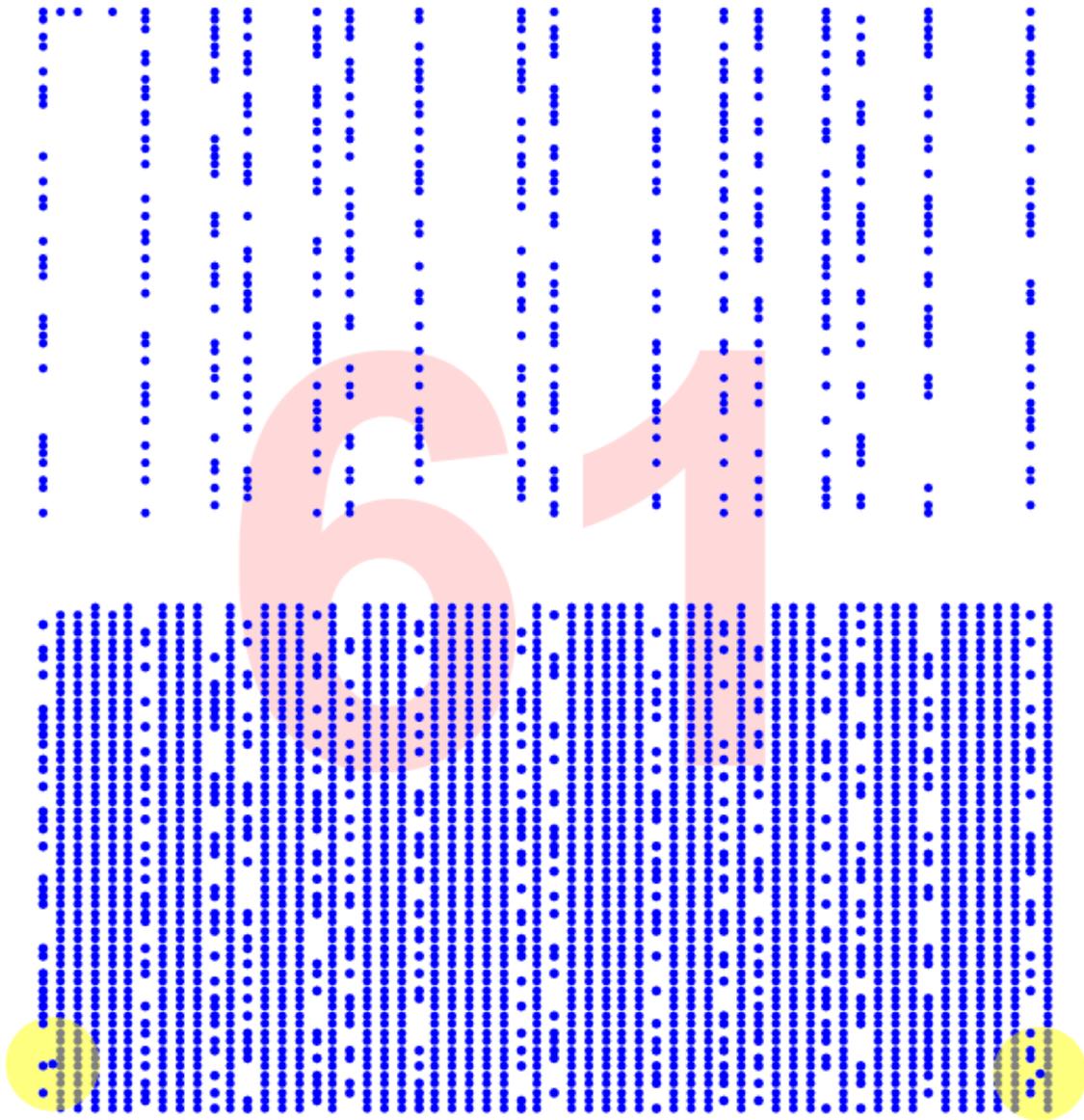


FIGURE 23 : Les deux derniers danseurs correspondant à 59^2 sur la gauche et à 59×61 sur la droite ont presque atteint leur position finale, terminant ainsi la danse.

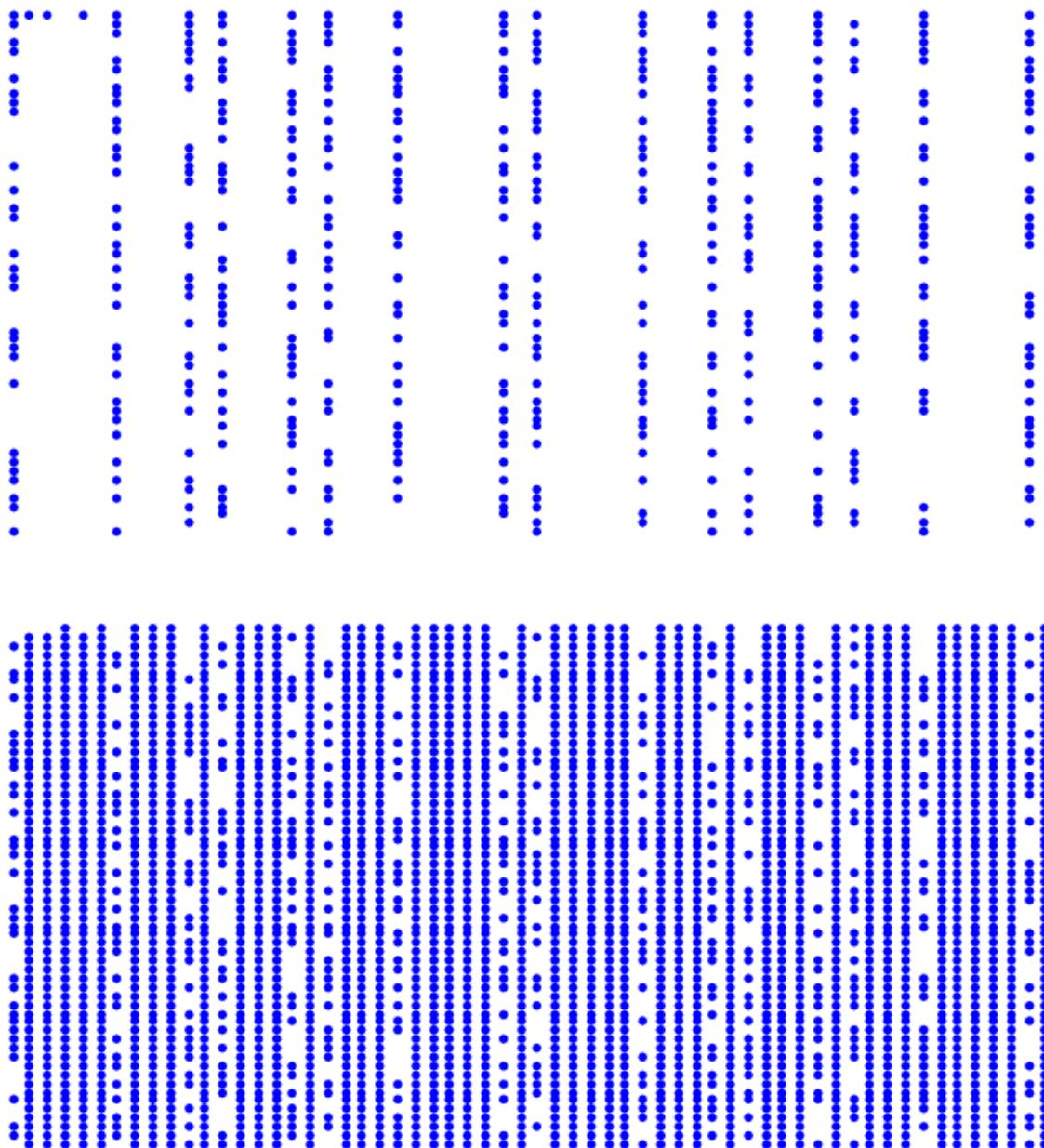


FIGURE 24 : Après que tous les multiples de 59 excepté 59 soient descendus, les danseurs restant dans le rectangle du haut correspondent exactement aux nombres premiers inférieurs à 3600. Ceux qui restent dans le rectangle du bas forment un crible dans la mesure où cet ensemble reste stable par multiplication par n'importe quel nombre. En fait cette propriété d'être un crible est vérifiée par toutes les configurations intermédiaires du rectangle du bas.

4.2. Interprétation rythmique par $H^1(C_j/p)$

La seconde partie de la vidéo est une illustration de l'interprétation rythmique donnée par les

valeurs propres du Frobenius sur $H^1(C_j/p)$, où p est un nombre premier tel que $7 \leq p \leq 67$

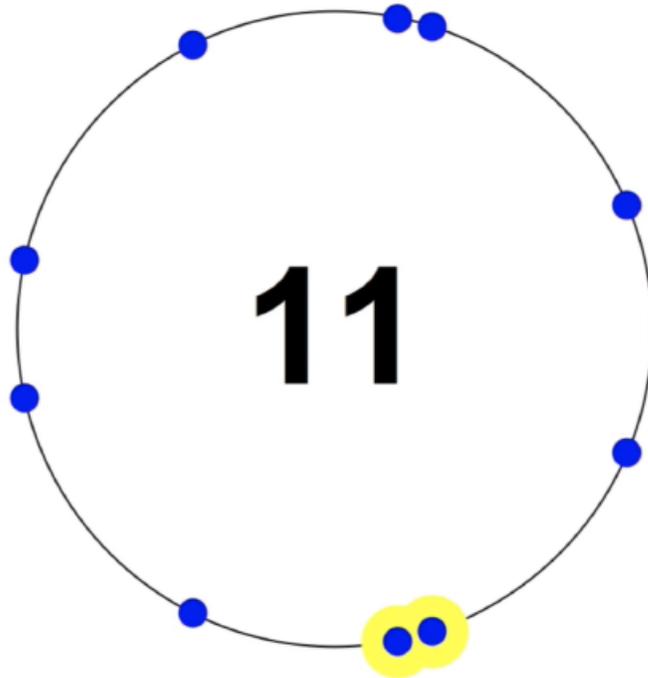


FIGURE 25 : Chacun des six motifs devient un interprète (au niveau rythmique) du même morceau.

Dans le but d'illustrer ces rythmes qui fournissent les instants irrationnels précis d'attaque dans la musique, la vidéo est synchronisée de façon à ce que les zéros correspondant apparaissent en couleur brillante lorsqu'ils sont joués. Le tempo est accéléré comme $\log p$ lorsque p varie de 7 à 67 et cela est fait pour chacun des six motifs $H^1(C_j/p)$. La vidéo peut être visionnée en cliquant sur le lien suivant : [Vidéo](#).

Nous avons déjà décrit C_1 et C_2 . Les courbes suivantes et quelques exemples des interprétations rythmiques associées sont fournis ci-après :

$$C_3 : y^2 = x^{11} - x^{10} + x^9 - 5x^8 + 8x^7 - 8x^6 + 8x^5 - 14x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x - 1$$

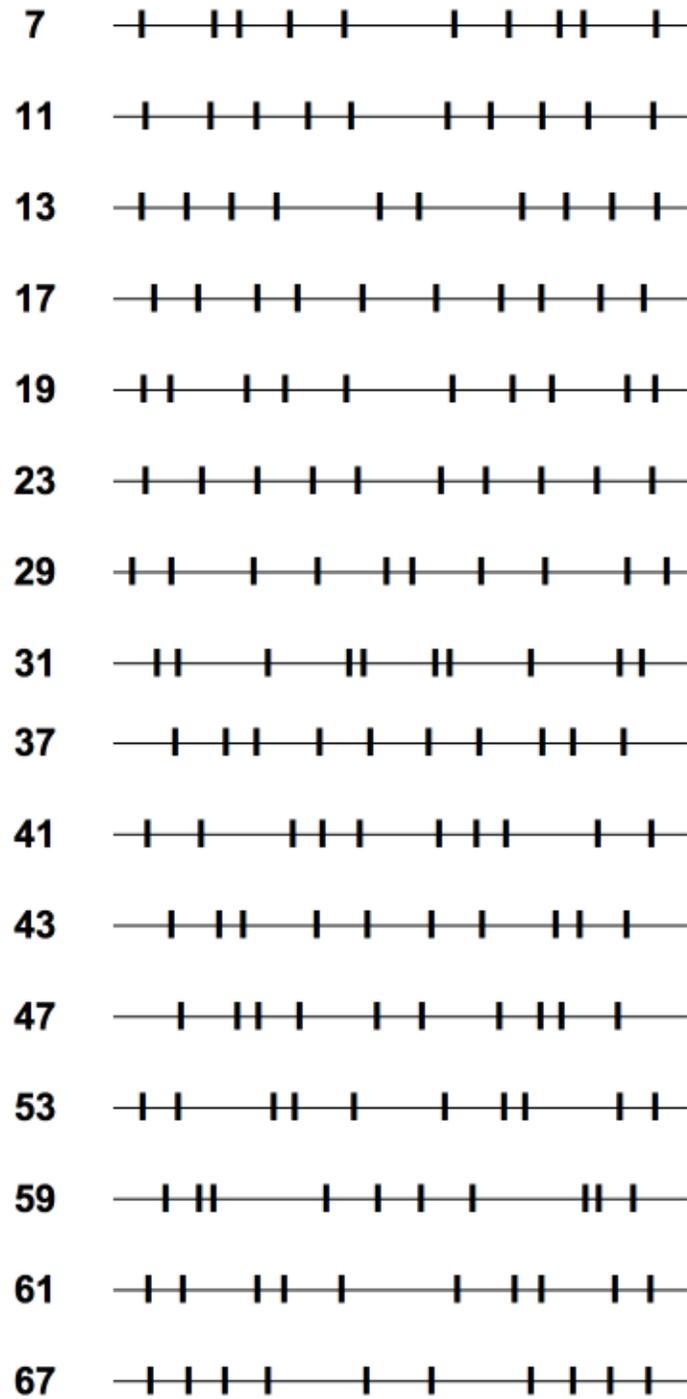


FIGURE 26 : Rythmes associés au $H^1(C_3/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

$$C_4 : y^2 = x^{11} - x^{10} + 3x^9 + x^8 - 8x^7 - 8x^5 + 24x^4 + 58x^3 + 86x^2 + 86x + 50$$

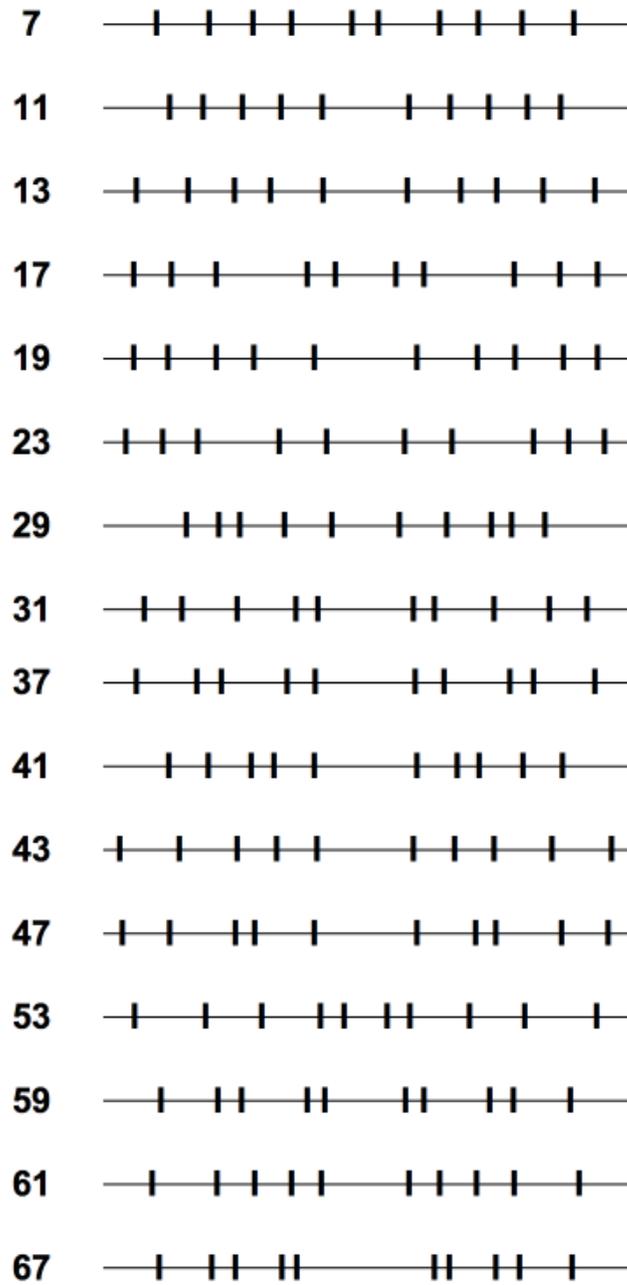


FIGURE 27 : Rythmes associés au $H^1(C_4/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

$$C_5 : y^2 = x^{11} - x^{10} + 7x^9 - 15x^8 + 36x^7 - 48x^6 + 108x^5 - 144x^4 + 90x^3 - 162x^2 + 162x + 198$$

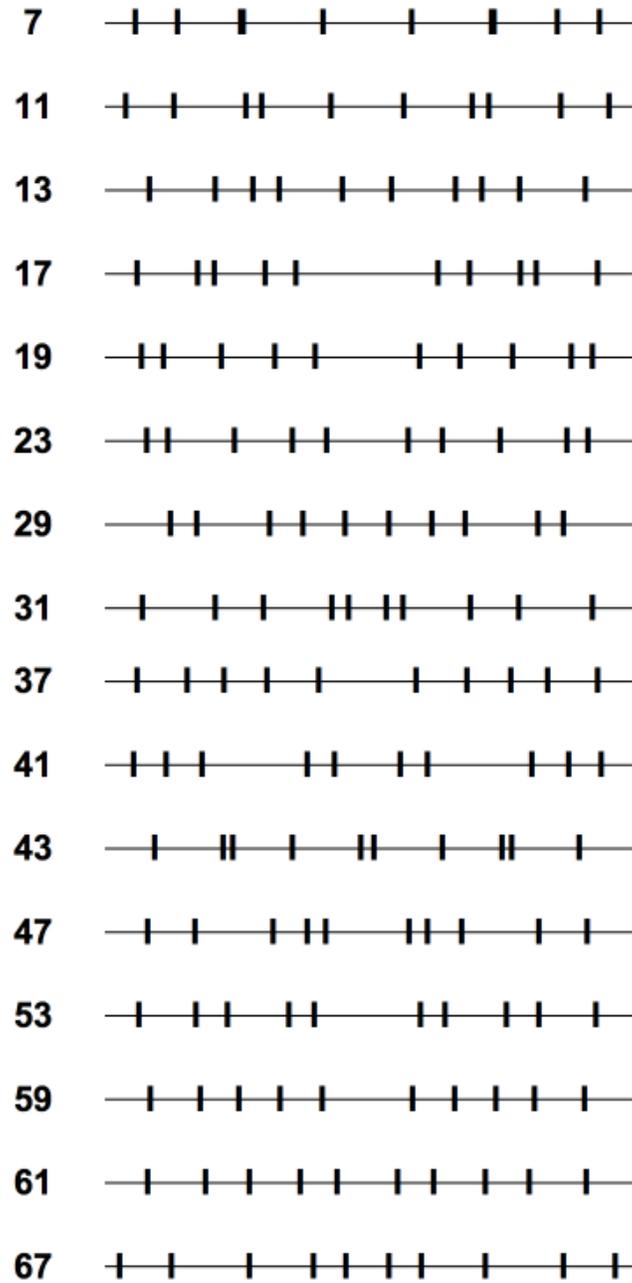


FIGURE 28 : Rythmes associés au $H^1(C_5/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

$$C_6 : y^2 = x^{11} - 3x^{10} - 6x^9 + 12x^8 + 18x^7 - 54x^6 - 96x^5 + 72x^4 + 126x^3 - 206x^2 - 336x - 96$$

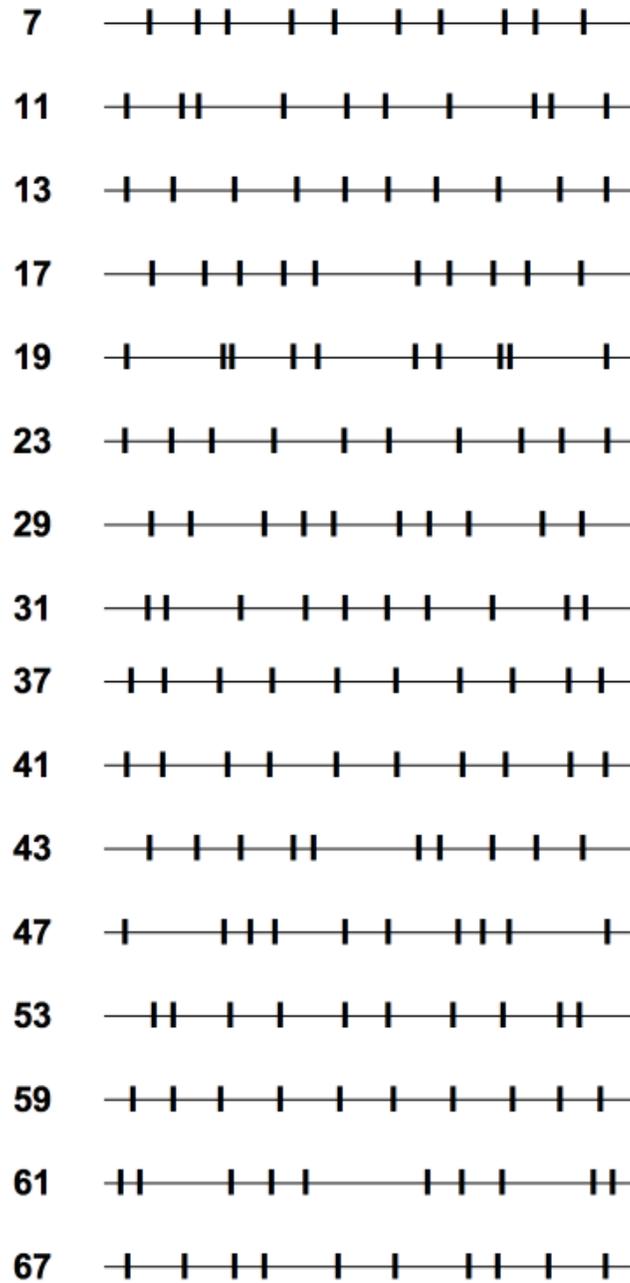


FIGURE 29 : Rythmes associés au $H^1(C_6/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

Remarque : Le fait que le tempo accélère avec $\log p$, *i.e.* que la période naturelle déterminée par $p^{-is} = 1$ soit $\frac{2\pi}{\log p}$ montre dans quel sens la stratégie poursuivie dans notre travail commun avec C. Consani (voir en particulier [5, 6]) est naturelle. En effet, si l’on faisait tendre par exemple $p \rightarrow \infty$, la période tendrait vers 0 et il n’y aurait aucun moyen d’obtenir des valeurs ressemblant aux zéros de la fonction zeta de Riemann. Mais dans notre stratégie, on fait tendre $p \rightarrow 1$ de telle façon que la période $\frac{2\pi}{\log p}$ tend maintenant vers l’infini. De plus, comme expliqué dans [5, 6], le genre tend vers l’infini, permettant ainsi d’obtenir le type de configuration désirée.

Remerciements : Je remercie les évaluateurs pour leurs commentaires utiles, ainsi que Fernando Rodriguez Villegas, Moreno Andreatta, Karim Haddad, Carlos Agon et Ugo Moschella pour leur aide dans l’implémentation de ces idées ; je remercie également les membres de notre groupe de discussion sur les mathématiques et la musique avec, outre Moreno, Charles Alunni, Olivia Caramello et Pierre Cartier. Les principes des développements ci-dessus ont été obtenus durant la collaboration avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, collaboration qui a donné naissance au roman [3].

Références

- [1] M. Babbitt, *Twelve-Tone Rhythmic Structure and the Electronic Medium*, Perspectives of New Music 1, no. 1 (Fall 1962) : 49–79.
- [2] M. Berry and J. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*. SIAM Rev. **41** (1999), no. 2, 236–266.
- [3] D. Chéreau, A. Connes, J. Dixmier, *Le Spectre d’Atacama*. Editions Odile Jacob, 2018.
- [4] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [5] A. Connes, C. Consani, *Schemes over \mathbb{F}_1 and zeta functions*, Compositio Mathematica 146 (6), (2010) 1383–1415.
- [6] A. Connes, C. Consani, *From monoids to hyperstructures : in search of an absolute arithmetic*, in Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, de Gruyter (2010), 147–198.
- [7] M. Kac, *Can One Hear the Shape of a Drum ?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part 2 : Papers in Analysis (Apr. 1966), pp. 1–23.
(Available online at : <https://www.math.ucdavis.edu/hunter/m207b/kac.pdf>)
- [8] Olivier Messiaen, *Technique de mon langage musical*, Paris, Alphonse Leduc, 1944 (English translation as “The Technique of My Musical Language”, Paris, Alphonse Leduc, 1956).
- [9] O. Messiaen, *Traité de Rythme, de Couleur, et d’Ornithologie*. Editions musicales Alphonse Leduc.
- [10] J. Pressing, *Cognitive Isomorphisms between Pitch and Rhythm in World Musics : West Africa, the Balkans and Western Tonality*, Studies in Music, 17, (1983) 38–61.
- [11] J. Rahn, *On Pitch or Rhythm : Interpretations of Orderings of and in Pitch and Time*, Perspectives of New Music, vol. 13, no. 2, 1975, p. 182.