Automorphismes périodiques du facteur hyperfini de type II_1

A. Connes

Introduction

Il y a de nombreuses constructions de facteurs qui donnent naissance au facteur hyperfini de type II_1, que nous noterons R dans la suite. Par exemple 1) tout produit tensoriel infini d'un nombre dénombrable d'algèbres matricielles selon leur trace, 2) la construction de l'espace du groupe de mesure pour une mesure ergodique préservant les transformations, 3) la représentation régulière à gauche d'un groupe discret localement fini avec classes de conjugaison infinies.

À chacune de ces façons d'obtenir R correspondent des automorphismes de R. Deux automorphismes α et β of R sont conjugués quand pour un certain automorphisme σ de R on a $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$.

Le problème le plus simple non trivial de la théorie ergodique est certainement celui de classifier, à conjugaison près, les automorphismes périodiques de R. Il s'avère qu'une classification complète est possible, au moyen d'invariants très simples que nous allons maintenant décrire.

Notons d'abord que le problème de la conjugaison se sépare en deux problèmes :

a) le problème de la conjugaison extérieure : décider s'il existe, étant donnés $\alpha, \beta \in \text{Aut } R$ un automorphisme intérieur Ad W tel que β est conjugué de Ad $W \cdot \alpha$

b) le problème de la conjugaison intérieure : étant donné $\alpha \in \text{Aut } R$ décider quels W, unitaires dans R, sont tels que Ad $W \cdot \alpha$ est conjugué de α.

Pour résoudre le problème a) on définit d'abord deux invariants de conjugaison extérieure :

1. $p_0(\alpha)$ est la période extérieure de α défini comme l'entier tel que, pour $n \in \mathbf{Z},\ \alpha^n \in \text{Int } R \iff n \in p_0(\alpha)\mathbf{Z}$.

2. $\gamma(\alpha)$ est un nombre complexe de module 1 défini par l'implication : U unitaire dans R, $\alpha^{p_0(\alpha)} = \text{Ad } U \implies \alpha(U) = \gamma U$. On vérifie par calcul direct (prop. 1.4) que p_0 et γ sont invariants de classes de conjugaison extérieures et que $\gamma(\alpha)^{p_0(\alpha)} = 1$.

On trouve pour chaque couple $p \in \mathbf{N}, \gamma \in \mathbf{C}$, avec $\gamma^p = 1$, un automorphisme de R, s_p^γ, de période égale à $p \cdot$ Ordre de γ et tel que

$$p_0(s_p^\gamma) = p, \qquad \gamma(s_p^\gamma) = \gamma \qquad \text{(prop. 1.6).}$$

On démontre que les invariants p_0, γ classifient complètement les automorphismes périodiques de R, à conjugaison extérieure près, de telle façon que tout automorphisme périodique de R est conjugué extérieur d'un (et d'un seul) des s_p^γ (théorème 6.2).

Reçu le 5 février 1975.

Référence http://acta.bibl.u-szeged.hu/14612/1/math$_0 39_f asc_0 01_0 02_0 39 - 066.pdf$

Traduction : Denise Vella-Chemla, juin 2022.

La preuve s'appuie sur l'introduction d'une structure de groupe sur l'ensemble Br_p, des classes de conjugaison extérieures des automorphismes de période extérieure p. On vérifie que si α et β sont de telles classes alors $\alpha \otimes \beta$ est également une classe appartenant à Br_p, ainsi que la classe de l'opposé α^0 de α, une fois que $R \otimes R$ et R^0 (le facteur opposé de R) sont identifiés avec R par un certain isomorphisme (les classes $\alpha \otimes \beta$ et α^0 étant bien sûr indépendantes de cet isomorphisme).

Une fois ceci fait, on démontre que Br_p est un groupe d'opération inverse $\alpha \to \alpha^0$ et que γ est un isomorphisme de Br_p sur le groupe des racines $p^{\text{ièmes}}$ de 1 dans $\mathbf{C}$.

La preuve de l'injectivité de γ, i.e. de l'unicité de la classe de conjugaison extérieure avec invariants extérieurs $(p, 1)$, est obtenue grâce à une technique de séquences centrales, comme cela a été utilisé par D. McDuff dans [7] (voir le théorème 5.1).

Le lecteur familier avec la construction du groupe de Brauer $B(k)$ d'un corps commutatif arbitraire k reconnaîtra l'analogie avec la construction de Br_p ci-dessus - les objets que nous étudions sont des automorphismes périodiques de R et le concept de similarité des algèbres centrales simples sur k correspond au concept de conjugaison extérieure de deux automorphismes périodiques. Le rôle des algèbres de division est joué par l'automorphisme périodique *minimal* : α est dit minimal périodique quand sa période est la plus petite période de sa classe de conjugaison extérieure. Exactement comme tout algèbre centrale simple sur k est le produit tensoriel d'une unique algèbre de division par une algèbre de matrices $M_n(k)$, on a que tout automorphisme périodique de R est le produit tensoriel d'un automorphisme périodique minimal (déterminé de manière unique à conjugaison près) par un automorphisme intérieur (théorème 1.11). De plus, les automorphismes minimaux sont également caractérisés par le fait que leur algèbre de point fixe est un facteur (théorème 2.5).

Pour tout $p \in \mathbf{N}, \gamma \in \mathbf{C}, \gamma^p = 1$, l'automorphisme s_p^γ est l'unique automorphisme minimal de la classe de conjugaison extérieure avec invariants extérieurs p, γ.

Aussi, le produit tensoriel de deux algèbres de division sur k peut ne pas être une algèbre de division et de la même façon que le produit tensoriel de deux automorphismes minimaux peut ne pas être minimal. La réponse au problème b) est obtenue en définissant l'invariant intérieur (a) d'un automorphisme périodique arbitraire α de R comme la mesure spectrale (définie seulement à rotation près) correspondant au vecteur trace et un $U \in R$ arbitraire tel que $\alpha^{p_m(\alpha)} = \mathrm{Ad}\, U$, où $p_m(\alpha)$ est la période minimale de α. Il s'avère que p_0, γ et ε forment un système complet d'invariants pour les automorphismes intérieurs de R, les seules relations étant que $\gamma^{p_0} = 1$ et que le support de ε est l'une des $n^{\text{ièmes}}$ racines de 1 pour un certain n (théorème 1.11).

Cela permet aussi de résoudre le problème de l'équivalence faible :

c) Pour α et $\beta \in \mathrm{Aut}\ R$, quand existe-t-il un $\sigma \in \mathrm{Aut}\ R$ tel que $\sigma[\alpha]\sigma^{-1} = [\beta]$? (où le groupe complet $[\alpha]$ de α est défini en termes classiques (voir par exemple [4] déf. 1.5.4)). Les invariants d'équivalence faible sont $p_0(\alpha)$, Ordre de $\gamma(\alpha) = c(\alpha)$ et les symboles de Legendre $(j/p) = \pm 1$, où p est un nombre premier divisant $c(\alpha)$, et $\gamma(\alpha) = -\exp\, i2\pi j/c$, avec deux symboles additionnels $\varepsilon(j), \omega(j)$ (resp. un : $\varepsilon(j)$) quand $c(\alpha)$ est divisible par 4 (resp. 2 mais pas 4) qui sont classiques en arithmétique élémentaire.

Il s'avère que ce sont des invariants complets d'équivalence faible, la seule relation étant que $c(\alpha)$ divise $p(\alpha)$ (théorème 6.5).

On applique alors ces résultats à des questions simples de théorie ergodique non-commutative et on obtient les réponses suivantes : un α périodique est conjugué de l'opposé de son inverse si et seulement si $\gamma(\alpha)^2 = 1$ (théorème 7.2).

Un α périodique est le produit tensoriel infini d'automorphismes intérieurs si et seulement si $\gamma(\alpha) = 1$ (théorème 7.9).

On détermine également les conditions, de nature arithmétique, selon lesquelles α est un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie (théorème 7.4 (c)).

On démontre alors que tout automorphisme périodique α de R admet une très bonne approximation par des automorphismes de dimension finie, au sens où $\alpha(P_n) = P_n, \forall n \in \mathbf{N}$ pour une certaine séquence croissante de sous-algèbres de dimension finie de R avec $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, dense dans R.

Cela, bien sûr, implique que les produits croisés ou les algèbres de von Neumann à points fixes de n'importe quel automorphisme périodique arbitraire de R sont hyperfinis (voir la remarque 7.10 sur ce point).

Finalement, on donne un exemple d'un automorphisme (périodique) de R qui n'a pas de racine carrée, et on donne les conditions (théorème 7.7) (notamment $c(=$ Ordre de $\gamma)$ impair) selon lesquelles s_p^γ a une racine carrée.

I. Construction des automorphismes $s_p^\gamma, p \in \mathbf{N}, \gamma^p = 1$

Soit N un facteur, $\alpha \in \operatorname{Aut} N$, alors on définit deux nombres, $p_0(\alpha)$ et $\gamma(\alpha)$ comme suit[1] :

$$\begin{gathered}\{n \in \mathbf{Z}, \alpha^n \in \operatorname{Int} N\} = p_0(\alpha)\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad p_0(\alpha) \in \mathbf{N} \\ (\alpha^{p_0(\alpha)} = \operatorname{Ad} U, \quad U \text{ unitaire dans } N) \implies \alpha(U) = \gamma(\alpha)U.\end{gathered} \tag{1.1}$$

On voit que pour tout α, $p_0(\alpha)$ est un entier, que l'on appelle période extérieure de α ; il est égal à 0 si toutes les puissances non nulles de α sont extérieures.

On voit également que $\gamma(\alpha)$ est un nombre complexe de module 1, indépendant du choix de U tel que $\alpha^{p_o(\alpha)} = \operatorname{Ad} U$, et satisfaisant

$$\gamma(\alpha)^{p_0(\alpha)} = 1 \tag{1.2}$$

parce que $\alpha^{p_0(\alpha)}(U) = \gamma(\alpha)^{p_0(\alpha)}U$ et $\alpha^{p_0(\alpha)}(U) = UUU^* = U$.

Définition 1.3. α et $\beta \in \operatorname{Aut} N$ sont dits extérieurs conjugués ssi il existe un $\sigma \in \operatorname{Aut} N$ tel que β et $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ ont la même image dans $\operatorname{Out} N = \operatorname{Aut} N / \operatorname{Int} N$.

[1] Voir la remarque 6.8 pour une interprétation cohomologique de $\gamma(\alpha)$ comme une obstruction.

Pour W unitaire dans N, posons que $\alpha \in \mathrm{Aut}\ N$, ${}_W\alpha = \mathrm{Ad}\ W \cdot \alpha$. Quand W varie, les ${}_W\alpha$ forment la classe de α dans Out N par conséquent les $\beta \in \mathrm{Aut}\ N$ qui sont conjugués extérieurs des α sont tous les automorphismes conjugués d'un certain ${}_W\alpha$, W unitaire dans N.

Proposition 1.4. *Si α et β sont conjugués extérieurs alors $p_0(\alpha) = p_0(\beta), \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$; $(p_0(\alpha), \gamma(\alpha))$ est appelé l'invariant extérieur de α.*

Démonstration. La première égalité est claire. Pour démontrer la seconde, on peut supposer que $\beta = {}_W\alpha$ pour un certain W unitaire dans N. Alors appelons $p = p_0(\alpha), \gamma = \gamma(\alpha)$; $\alpha^p = \mathrm{Ad}\ U, \alpha(U) = \gamma U$, alors on a

$$({}_W\alpha)^p = \mathrm{Ad}\ (W\alpha(W)\dots\alpha^{p-1}(W)(U),$$

$${}_W\alpha(W\alpha(W)\dots\alpha^{p-1}(W)U) = W\alpha(W)\dots\alpha^{p-1}(W)UWU^*\alpha(U)W^*,$$

$$\text{donc} \quad {}_W\alpha(W\alpha(W)\dots\alpha^{p-1}(W)U) = W\alpha(W)\dots\alpha^{p-1}(W)U\gamma \qquad \text{Q.E.D.}$$

Fixons maintenant nos notations, aussi loin que la classification simple des automorphismes périodiques *intérieurs* est concernée, pour le cas du facteur N de type II_1 avec trace canonique τ $(\tau(1) = 1)$.

Soit $\alpha = \mathrm{Ad}\ U$ périodique, alors l'unitaire U qui est déterminé de manière unique par α à multiplication près par un $\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = 1$, a la propriété que U^p est un scalaire λ_0 pour $p =$ période de α. Il s'ensuit de cela que U est une combinaison linéaire finie de ses projections spectrales correspondant aux $p^{\text{ièmes}}$ racines a_j de λ_0, disons $U = \sum_{j=1}^{p} a_j e_j$, où e_j est la projection spectrale de U correspondant à $\{a_j\}$.

On définit maintenant l'invariant intérieur $\varepsilon(\alpha)$ comme étant la mesure de probabilité $\sum \tau(e_j)\varepsilon_{a_j}$, déterminée à rotation près sur $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$. Il est facile de voir que deux automorphismes intérieurs α et β sont conjugués ssi $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)$ et que toutes les mesures de probabilité sur $\mathbf{T}$ qui ont un support contenu dans les $p^{\text{ièmes}}$ racines de d'un certain $\lambda_0 \in \mathbf{T}$ surgissent comme $\varepsilon(\alpha)$. Pour $\alpha \in \mathrm{Aut}\ N$, α périodique avec invariants extérieurs p_0, γ on pose $p_m = p_0 \cdot$ Ordre de γ et on pose $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha^{p_m})$. (Vérifier que $\alpha^{p_m} \in \mathrm{Int}\ N$.)

Théorème 1.5. *Soit N le facteur II_1 hyperfini R. Deux automorphismes périodiques $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}\ R$ sont conjugués si et seulement s'ils ont les mêmes invariants extérieurs et intérieurs (i.e. $p_0(\alpha), \gamma(\alpha)$ et $\varepsilon(\alpha)$).*

Cet article est entièrement consacré à la démonstration du théorème 1.5. On utilise le reste de ce paragraphe à donner une description simple des automorphismes, les $s_p^\gamma \otimes \mathrm{Ad}\ V$, en ayant contraint les invariants extérieurs et intérieurs. Notre première tâche est de décrire les automorphismes $s_p^\gamma, p \in \mathbf{N}, \gamma^p = 1$ qui ont un invariant extérieur (p, γ) et un invariant intérieur trivial. Pour $p = 1$ on appelle s_1^1 l'automorphisme identité de R. Soit $p \neq 1$. Alors on écrit R comme le produit tensoriel infini, indexé par $\mathbf{N}$, des couples (F_p, Trace canonique sur F_p) où F_p est l'algèbre des matrices $p \times p$ sur $\mathbf{C}$ avec les unités matricielles $(e_{i,j})_{i,j=1\dots p}$.

Pour $q \in \mathbf{N}$, soit π_q l'isomorphisme canonique de F_p sur un sous-facteur F_p^q de R, tel que $\pi_q(x) = 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \ldots$.

Soit $e_{ij}^q = \pi_q(e_{ij})$ et θ le décalage : $\theta\pi_q(x) = \pi_{q+1}(x), x \in F_p$. Le décalage θ est un automorphisme de R sur le commutant de F_p^1 dans R.

Soit $\gamma \in \mathbf{C}, \gamma^p = 1$, et $U_\gamma \in F_p^1$ l'unitaire :

$$U_\gamma = \sum_{j=1}^{p} \gamma^j e_{jj}^1.$$

On définit un unitaire $v_\gamma \in (F_p^1 \bigcup F_p^2)''$[2] par la formule :

$$v_\gamma = e_{p1}^1 \theta(U_\gamma^*) + \sum_{j=1}^{p-1} e_{j,j+1}^1.$$

La proposition suivante est en même temps la définition de l'automorphisme s_p^γ de R.

Proposition 1.6. Soit p et γ comme ci-dessus.

(a) La séquence des automorphismes intérieurs de R définis par

$$\alpha_n = \mathrm{Ad}\ (v_\gamma \theta(v_\gamma) \theta^2(v_\gamma) \theta^3(v_\gamma) ... \theta^n(v_\gamma))$$

converge point par point fortement vers un automorphisme s_p^γ de R.

(b) La $p^{ième}$ puissance $(s_p^\gamma)^p$ de cet automorphisme est égale à Ad U_γ et $s_p^\gamma(U_\gamma) = \gamma U_\gamma$.

(c) L'invariant extérieur de s_p^γ est égal à (p, γ), son invariant intérieur est $\{\varepsilon_1\}$.

Démonstration. (a) Soit m donné et $x \in F_p^{(1,m)} = \left(\bigcup_1^m F_p^q \right)''$. Alors pour $n \geq m$ on a $[\theta^n(v), x] = 0$ pour tout $v \in R$. Il s'ensuit que $\alpha_n(x) = \mathrm{Ad}\ (v_\gamma \theta(v_\gamma) ... \theta^{m-1}(v_\gamma))(x) = \alpha_{m-1}(x)$ de telle façon que la séquence $(\alpha_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est constante pour $n \geq m$. Pour tout n, α_n est une isométrie dans la norme L^2 de R ; cela découle donc de la densité forte dans R de la sous-algèbre $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_p^{(1,m)}$ qu'il existe un homomorphisme s_p^γ de R dans R tel que

$$s_p^\gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \alpha_n(x), \qquad x \in R.$$

On va démontrer maintenant que $(s_p^\gamma)^p = \mathrm{Ad}\ U_\gamma$. Il s'ensuivra de cela que s_p^γ est surjective et est un automorphisme de R.

[2] À partir de maintenant, on pose $F_p^{(i,j)} = (\sum_{i \leq q \leq j} F_p^q)''$, donc par exemple $v_\gamma \in F_p^{(1,2)}$

(b) On a d'abord, en utilisant l'égalité $s_p^\gamma(U_\gamma) = \alpha_0(U_\gamma)$, que :

$$s_p^\gamma(U_\gamma) = \text{Ad } v_\gamma(U_\gamma) = \text{Ad } \left(\sum_{j=1}^{p} e_{j,j+1}\right)(U_\gamma) = \left(\sum_1^p e_{j,j+1}\right)\left(\sum_1^p \gamma^k e_{kk}\right) {}^3$$
$$\left(\sum_1^p e_{l+1,l}\right) = \sum_1^p \gamma^{j+1} e_{jj} = \gamma U_\gamma.$$

On termine la preuve de (b) en montrant par induction sur m que l'énoncé suivant est vrai :
(1.7) $\forall \gamma \in \mathbf{C}, \gamma^p = 1, \quad x \in F_p^{(1,m)} \quad$ on a $\quad (s_p^\gamma)^p(x) = U_\gamma x U_\gamma^*$.

On suppose que l'énoncé est vrai pour m, on le démontre pour $m+1$, sa vérité pour $m=1$ découle également de ce calcul.

Posons, pour $x \in R, \beta(x) = \lim_{n\to\infty} \text{Ad } (\theta(v_\gamma)\theta^2(v_\gamma)...\theta^n(v_\gamma))(x)$ alors, comme ci-dessus, β est un homomorphisme de R dans R, qui laisse F_p^1 ponctuellement invariant et satisfait l'égalité :
(1.8) $\beta(\theta(x)) = \theta(s_p^\gamma(x)), \quad x \in R.$

Prenons $x \in F_p^{(1,m+1)}, x = \sum_{i,j} e_{ij}^1 \theta(x_{ij})$ avec $x_{ij} \in F_p^{(1,m)}$. De (1.8) et de l'hypothèse d'induction on conclut que :

$$\beta^p\theta(x_{ij}) = \theta((s_p^\gamma)^p(x_{ij})) = \theta(U_\gamma)\theta(x_{ij})\theta(U_\gamma)^* \quad \text{pour} \quad i,j = 1,\dots,p\ ;$$

et par conséquent, en utilisant les égalités $\beta^p(e_{ij}^1) = e_{ij}^1$, pour $i,j = 1,...,p$:
(1.9) $\beta^p(x) = \theta(U_\gamma)x\theta(U_\gamma)^*.$

Mais on a $s_p^\gamma = \text{Ad } v_\gamma \cdot \beta$, et donc (1.7) s'ensuivra de
(1.10) $v_\gamma\beta(v_\gamma)...\beta^{p-1}(v_\gamma) = U_\gamma\theta(U_\gamma^*).$

Pour prouver (1.10) on a juste à utiliser l'égalité $\beta\theta(U_\gamma) = \theta(s_p^\gamma(U_\gamma)) = \theta(\gamma U_\gamma)$, de telle façon qu'on ait : $\beta^k\theta(U_\gamma^*) = \gamma^{-k}\theta(U_\gamma^*)$,

$$\beta^k(v_\gamma) = \gamma^{-k}e_{p1}^1\theta(U_\gamma^*) + \sum_{j=1}^{p-1} e_{j,j+1}^1,$$
$$v_\gamma(\beta^p v_\gamma)\dots\beta^{-1}(v_\gamma) = \sum \gamma^j e_{jj}^1\theta(U_\gamma^*) = U_\gamma\theta(U_*^\gamma).$$

(c) On a juste à prouver que $(s_p^\gamma)^q$ est extérieur pour $q \in \{1,...,p-1\}$. Pour faire cela, noter que $v_{\gamma''}$ commute avec $\theta^j(U_{\gamma'})$ pour $j \geq 1$, $\{\gamma'\}^p = 1$, $(\gamma'')^p = 1$. Aussi $v_{\gamma''}U_{\gamma'}v_{\gamma''}^* = \gamma' U_{\gamma'}$ comme vu ci-dessus, de telle façon que :

$$s_p^\gamma(\theta^n(U_{\gamma'})) = \gamma'\theta^n(U_{\gamma'}), \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \forall \gamma', \gamma'^p = 1.$$

Cela montre que pour $q \in \{1,...,p-1\}$ on a $\|(s_p^\gamma)^q\theta^n(U_{\gamma'}) - \theta^n(U_{\gamma'})\|_2 = |\gamma'^q - 1|$, et donc que $(s_p^\gamma)^q$ ne peut être un automorphisme intérieur parce que la séquence $(\theta^n(U_{\gamma'}))_{n\in N}$ est une séquence

[3] Dans toutes les sommes comme $\sum_1^p e_{j,j+1}$, on prend $e_{p,p+1} = e_{p,1}$, disons plus généralement que $e_{i+p_1,j+p_2} = e_{i,j}$ à chaque fois que p_1 et p_2 sont des multiples de p.

centrale dans R.

On peut maintenant établir une conséquence importante du théorème 1.5 et de la proposition 1.6 :

Théorème 1.11. *Soit R le facteur hyperfini de type* II_1. *Soit $p\in\mathbf{N}$, $\gamma\in\mathbf{C}$ avec $\gamma^p=1$ et ε une mesure de probabilité sur $\mathbf{T}$ telle que* Support de $\varepsilon\{n^{\text{ième}}$ *racine de* $\lambda_0\}$ *pour un certain $\lambda_0\in\mathbf{T}$ et $n\in\mathbf{N}$. Alors il existe un certain automorphisme périodique $\alpha\in$* Aut R, *satisfaisant les conditions $p_0(\alpha)=p, \gamma(\alpha)=\gamma, \varepsilon(\alpha)=\varepsilon$. De plus, soit β un automorphisme intérieur de R tel que $\varepsilon(\beta^{p\text{ Ordre de }\gamma})=\varepsilon$ alors tout $\alpha\in$* Aut R *périodique, avec les invariants $p_0(\alpha)=p$, $\gamma(\alpha)=\gamma$, $\varepsilon(\alpha)=\varepsilon$ est conjugué de*

$$s_p^\gamma\otimes\beta\in\text{Aut } R\otimes R.$$

Démonstration. On a juste à vérifier que l'invariant extérieur de $s_p^\gamma\otimes\beta$ est (p,γ), ce qui est facile et à vérifier que son invariant intérieur est ε. Mais $(s_p^\gamma\otimes\beta)^{p\text{ Ordre de }\gamma}=1\otimes\beta^{p\text{ Ordre de }\gamma}$

Q.E.D.

II. Automorphismes périodiques minimaux

Dans toute la suite, N est un facteur, décomposable de façon dénombrable pour simplifier. Étant donné $\alpha\in$ Aut N soit Sp α le spectre de α dans l'algèbre de Banach $B(N)$ des applications linéaires faiblement continues de N dans N. Alors Sp α est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{T}=\{z\in\mathbf{C},|z|=1\}$ et est égal au spectre au sens de [1] [4] de la représentation $n\to\alpha^n$ de $\mathbf{Z}$ sur N[4]) (cf. [4] 2.3.8).

Pour n'importe quelle projection non nulle $e\in N^\alpha$ on pose comme dans [4] p.170, $\alpha^e=\alpha$ restreint à N_e, et on a par [4] 2.2.1 et 2.3.17 que

(2.1) $$\Gamma(\alpha)=\bigcap_{e\in N^\alpha}\text{Sp }\alpha^e=\bigcap_{W\text{ unitaire dans}N}\text{Sp }{}_W\alpha$$

où ${}_W\alpha=\text{Ad } W\cdot\alpha$ par définition.

Par le théorème 2.2.4 de [4], $\Gamma(\alpha)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{T}$ et par le théorème 2.3.1 de [4] on a :

(2.2) $$\Gamma(\alpha)^\perp=\{n\in\mathbf{Z},\alpha^n\text{ est intérieur }:\ \alpha^n(x)=uxu^*,\forall x\in N\text{ avec }u\in N^\alpha\}.$$

Proposition 2.3. *Soit α un automorphisme périodique de N et soit $p_m(\alpha)=p_0(\alpha)\cdot$*Ordre de $\gamma(\alpha)$, *où (p_0,γ) sont les invariants extérieurs de α. Alors $p_m(\alpha)$ est la plus petite période des automorphismes conjugués extérieurs de α. (On appelle $p_m(\alpha)$ la période minimale de α.)*

Démonstration. Comme $\alpha^{p_m(\alpha)}=\text{Ad } U^{\text{Ordre de }\gamma(\alpha)}$, où $\alpha^{p_0(\alpha)}=\text{Ad } U$, on voit que $p_m(\alpha)\in\Gamma(\alpha)^\perp$. Inversement, si $q\in\Gamma(\alpha)^\perp$ alors q est un multiple $np_0(\alpha)$ de $p_0(\alpha)$ et nécessairement $\gamma(\alpha)^n=1$ de telle façon que q est un multiple de $p_m(\alpha)$. En utilisant le corollaire 2.3.11 de [4] on obtient la proposition 2.3 parce que

(2.4) $$\Gamma(\alpha)^\perp=\{p_m(\alpha)\mathbf{Z}\},\qquad\Gamma(\alpha)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\lambda^{p_m(\alpha)}=1\}.$$

[4]en identifiant $\mathbf{T}$ avec le groupe dual de $\mathbf{Z}$, par $(n,\lambda)=\lambda^n,\lambda\in\mathbf{T},n\in\mathbf{Z}$.

Les conditions équivalentes suivantes définissent les automorphismes périodiques minimaux :

Théorème 2.5. Soit α un automorphisme périodique de N, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Période de α = période minimale de α,

(b) $\mathrm{Sp}\,\alpha = \Gamma(\alpha)$,

(c) N^α est un facteur,

(d) Pour $n \in \{1, (\text{période de } \alpha) - 1\}$ et $\alpha^n = \mathrm{Ad}\,U,\ \ U \in N$ on a $\alpha(U) \neq U$.

Démonstration. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) découle de 2.4 ; (b) $\Longleftrightarrow$ (c) est un corollaire du théorème 2.4.1 de [4], et également (a) $\Longleftrightarrow$ (d) découle de 2.2.

Corollaire 2.6. *Soit α un automorphisme périodique minimal de N de période minimale p, alors*

(a) *Un unitaire $U \in N$ est de la forme $v^*\alpha(v)$, v unitaire dans N, si et seulement si $U\alpha(U)...\alpha^{p-1}(U) = 1$.*

(b) *Tout $\beta \in \mathrm{Aut}\, N$ périodique minimal qui est conjugué extérieur de α est conjugué de α.*

Démonstration. La condition (a) est clairement nécessaire puisque pour tout v on a

$$v^*\alpha(v)\alpha(v^*\alpha(v))...\alpha^{p-1}(v^*\alpha(v)) = v^*v = 1.$$

Pour prouver que c'est suffisant, soit ([4] lemme 2.2.6) β l'automorphisme de $N \otimes F_2$ [5] tel que :

$$\beta(x \otimes e_{11}) = \alpha(x) \otimes e_{11}, \qquad \beta(x \otimes e_{22}) = U\alpha(x)U^*, \qquad \beta(1 \otimes e_{21}) = U \otimes e_{21}$$

Alors la condition (a) et le calcul dans [4] p. 176 montre que $\beta^p = 1$. Par conséquent, comme $\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha) = \{p\mathbf{Z}\}$ on voit que β est périodique minimal.

Si N est fini, alors $1 \otimes e_{11}$ et $1 \otimes e_{22}$ ont la même trace dans le facteur fini $(N \otimes F_2)^\beta$ et par conséquent sont équivalents dans $(N \otimes F_2)^\beta$.

Si N est proprement infini, alors il en est de même de N^α et $N^{(U^\alpha)}$ ce qui signifie que $1 \otimes e_{11}$, et $1 \otimes e_{22}$ sont proprement infinis, et par conséquent équivalents, dans $(N \otimes F_2)^\beta$.

Dans tous les cas il existe donc une isométrie partielle $v^* \otimes e_{21} \in (N \otimes F_2)^\beta$ avec $1 \otimes e_{11}$ comme support initial et $1 \otimes e_{22}$ comme support final. Mais alors $\beta(v^* \otimes e_{21}) = v^* \otimes e_{21}$ signifie $U\alpha(v^*)$ de telle façon que v est l'unitaire requis. (b) On peut supposer que $\beta = {}_W\alpha$ pour un certain W. Comme $\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha)$ on voit que la période de β est égale à p = période de α. Il s'ensuit de cela que $W\alpha(W)...\alpha^{p-1}(W)$ est un scalaire. En remplaçant W par λW, $\ \lambda \in \mathbf{C}$, pour un λ adéquat, on peut supposer que $W\alpha(W)...\alpha^{p-1}(W) = 1$. Alors l'énoncé (a) du corollaire montre que β est conjugué de α.

[5] F_2 est un facteur de type I_2 avec un système d'unités matricielles $(e_{ij})_{i,j=1,2}$

Corollaire 2.7. *Soit α un automorphisme minimal période de N.*

(a) *Soit e_1, e_2 deux projections dans N^* qui sont équivalentes relativement à N. Alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\alpha$ il existe une isométrie partielle $U \in N$ telle que :*

$$\alpha(U) = \lambda U, \;\; U^*U = e_1, \;\; UU^* = e_2.$$

(b) *Si N est continu, alors pour tout entier m divisant* période de $\alpha = p$ *et pour chaque λ, $\lambda^m = 1$ il existe un système d'unités matricielles de taille $m \times m$ notées $e_{ij} \in N$ telles que*

$$\alpha(e_{ij}) = \lambda^{i-j} e_{ij}.^6$$

Démonstration. (a) Comme on l'a vu ci-dessus, soit N est fini et $e_1 \sim e_2(N^\alpha)$, soit N est proprement infini et on a encore $e_1 \sim e_2(N^\alpha)$ de telle façon qu'il existe une isométrie partielle $v \in N^\alpha, v^*v = e_1, vv^* = e_2$. Maintenant α^{e_1} a une période au plus égale à la période de α alors que $\Gamma(\alpha^{e_1}) = \Gamma(\alpha)$ par [4] 2.3.3. Donc α^{e_1} est périodique minimal avec la même période que α. Mais alors par le corollaire 2.6 (a), il existe un opérateur unitaire $W \in N^{e_1}$ tel que $\alpha(W) = \lambda W$ (appliquer 2.6 (a) à $U = \lambda$). On a alors $W^*W = e_1, WW^* = e_1$, et $\alpha(W) = \lambda W$ de telle façon que $U = vW$ satisfait la condition (a) de 2.7. (b) Le facteur N^α est continu parce qu'une projection minimale dans N^α est automatiquement minimale dans N.

Donc on définit $(e_j)_{j=1,...,m}$ comme étant une famille de m projections de N^α équivalentes dans N. Alors par 2.7 (a), appelons U_j satisfaisant $U_j \in N, U_j^*U_j = e_j, U_jU_j^* = e_{j+1}$ et $\alpha(U_j) = \lambda U_j$, pour $j = 1, 2, ..., m-1$.

Il s'ensuit que $e_{j+1,j} = U_j$ engendre un système d'unités matricielles satisfaisant les conditions requises.

Q.E.D.

Corollaire 2.8. *Soient α et β des automorphismes périodiques d'un facteur N de type* II_1*, ayant pour trace canonique τ. Alors α et β sont conjugués si et seulement s'ils sont conjugués extérieurs et si les automorphismes intérieurs $\alpha^{p_m(\alpha)}$ et $\beta^{p_m(\alpha)}$ sont conjugués.*

En d'autres termes, deux éléments d'une classe de conjugaison extérieure sont conjugués si et seulement s'ils ont le même invariant intérieur.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, notons d'abord que si α et β sont extérieurs conjugués on a $p_m(\alpha) = p_m(\beta) = p$ pour un certain $p \in N$. Écrivons maintenant $\alpha^p = \mathrm{Ad}\,U$, $U = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ où les e_i sont les projections appartenant au centre de N^α (on utilise 2.4 et 2.2), avec disons $\tau(e_i) = \mu_i$, et les λ_i sont des nombres complexes de module 1. Pour chaque λ_i choisissons une racine $p^{\text{ième}}$ et appelons-la $\lambda_i^{1/p}$ alors $U^{1/p} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{1/p} e_i$ appartient à N^* de telle façon que $\tilde{\alpha} = \mathrm{Ad}\,U^{-1/p}\alpha$ satisfait $\tilde{\alpha}^p = \mathrm{Ad}\,U^*\alpha^p = 1$.

6 Dans la suite $i \pm j$ pour $i, j \in \{1, ..., m\}$ signifie $i \pm j$ modulo m.

Écrivons alors $\beta^p = \text{Ad } v$, avec $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ où les λ_i sont identiques aux λ_i utilisés ci-dessus pour U et où pour chaque i, f_i est une projection (appartenant à N^β) qui est équivalent à e_i relativement au facteur N. On a utilisé le fait que α^p et β^p sont des automorphismes conjugués intérieurs de N.

Choisissons $v^{1/p} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{1/p} f_i$ et posons comme ci-dessus :

$$\widetilde{\beta} = \text{Ad } v^{-1/p}\beta.$$

On a $\widetilde{\beta}^p = 1$. Par conséquent $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ sont conjugués extérieurs et périodiques minimaux, de telle façon que par 2.6 ils sont conjugués, disons $\widetilde{\beta} = \sigma\widetilde{\alpha}\sigma^{-1}, \sigma \in \text{Aut } N$. Maintenant $\alpha = \widetilde{\alpha} \cdot \text{Ad } U^{1/p} = \text{Ad } U^{1/p}\widetilde{\alpha}$ et :

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = \widetilde{\beta} \text{ Ad } \sigma(U^{1/p}) = \text{Ad } \sigma(U^{1/p})\widetilde{\beta}.$$

Comme on a $\beta = \text{Ad } v^{1/p}\widetilde{\beta}$ on doit juste trouver un automorphisme θ de N commutant avec $\widetilde{\beta}$ et tel que $\theta\sigma(U^{1/p}) = v^{1/p}$. À la fois $\sigma(U^{1/p})$ et $v^{1/p}$ appartiennent à N^β et on cherche θ comme un automorphisme intérieur défini par un unitaire $X \in N^\beta$.

On a $\sigma(U^{1/p}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{1/p}\sigma(e_i), v^{1/p} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{1/p} f_i$, et donc il suffit de vérifier que pour chaque i, $\sigma(e_i)$ est équivalent à f_i relativement à N^β. Mais cela est vrai parce que $\tau(e_i) = \tau(f_i)$, ainsi $\tau(\sigma(e_i)) = \tau(f_i)$ pour $i = 1, ..., k$.

III. Action des automorphismes de R sur les séquences centrales

Définition 3.1. [7] *Soit N un facteur de type* II_1 *avec trace canonique τ, et ω un ultrafiltre libre sur N.*

(a) On définit $N_{\tau,\omega}$ comme le quotient de $l^\infty(\mathbf{N}, N)$ par l'idéal à deux côtés $J_\omega = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, x_n \to 0$ fortement quand $n \to \omega\}$.

(b) On dénote par N_ω le commutant dans $N_{\tau,\omega}$ de l'image $\widetilde{N}$ de N dans $N_{\tau,\omega}$ où pour $x \in N, \widetilde{x} \in N_{\tau,\omega}$ est représenté par la séquence $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, x_n = x, \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Cette définition est exactement celle qui est donnée par McDuff dans [7], excepté pour un changement de notations qui s'accorde avec [5] partie II. Par [7] on sait que $N_{\tau,\omega}$ est un facteur de type II_1 avec trace canonique $\tau_\omega : \tau_\omega((x_n)_{x\in\mathbf{N}}) = \lim_{n\to\infty} \tau(x_n)$.

Soit $\theta \in \text{Aut } N$ alors l'automorphisme $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \to (\theta(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ de $l^\infty(\mathbf{N}, N)$ laisse J_ω globalement invariant et définit ainsi un automorphisme $\theta_{\tau,\omega}$ de $N_{\tau,\omega}$. De plus $\theta_{\tau,\omega}(\widetilde{N}) = \widetilde{N}$ de telle façon que $\theta_{\tau,\omega}$ laisse N_ω globalement invariant et définit ainsi un automorphisme θ_ω de N_ω.

Maintenant prenons $N = R$, le facteur hyperfinite II_1. On sait que toutes les séquences hypercentrales sur R sont triviales [7], et donc par le théorème 4 de [7], R_ω est un facteur de type II_1.

Théorème 3.2. *Soit α un automorphisme du facteur hyperfini de type* II_1 *R, et ω un ultrafiltre libre, alors :*

(1) *α_ω est intérieur sur R_ω, si et seulement si α est intérieur sur R, auquel cas $\alpha_\omega = 1$.*

(2) *Il existe un unitaire $U \in R_{\tau,\omega}$ tel que $(\alpha(x))^\sim = U\widetilde{x}U^*$, $\forall x \in R$.*

Avant que l'on ne poursuive et prouve ce théorème, notons une conséquence pour les automorphismes périodiques :

Corollaire 3.3. *Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}\, R$ périodique, avec* période extérieure α = période de $\alpha = n$, *alors il existe un unitaire $v \in R_{\tau,\omega}$, tel que :*

$$\alpha_{\tau,\omega}(v) = v\ ;\ v^{n'} = 1\ ;\ (\alpha(x))^\sim = v\widetilde{x}v^*, \qquad \forall x \in R.$$

Démonstration. Soit U un unitaire, $U \in R_{\tau,\omega}$ tel que $(\alpha(x))^\sim = U\widetilde{x}U^*, x \in R$. On a alors ça $\alpha_{\tau,\omega}(\widetilde{x}) = U\widetilde{x}U^*, \forall x \in R$ et en remplaçant x par $\alpha^{-1}(x)$: $\alpha_{\tau,\omega}(\widetilde{x}) = \alpha_{\tau,\omega}(U)\widetilde{x}\alpha_{\tau,\omega}(U^*), \forall x \in R$. Alors $U^*\alpha_{\tau,\omega}(U) \in (\widetilde{R})' \bigcap R_{\tau,\omega} = R_\omega$.

Appelons $w = U^*\alpha_{\tau,\omega}(U)$. On a $w\alpha_{\tau,\omega}(w)...\alpha_{\tau,\omega}^{n-2}(w)\alpha_{\tau,\omega}^{n-1}(w) = 1$.

Maintenant comme période extérieure $\alpha = n$ on a période extérieure $\alpha_\omega = n$ en utilisant la partie (1) du théorème 3.2. Ainsi il s'ensuit du corollaire 2.6 que ce $w \in R_\omega$, tel que $w\alpha_\omega(w)...\alpha_\omega^{n-1}(w) = 1$ peut s'écrire $w = X^*\alpha_\omega(X)$ pour un certain unitaire $X \in R_\omega$.

Posons $Y = UX^*$. Alors $\alpha_{\tau,\omega}(Y) = \alpha_{\tau,\omega}(U)\alpha_{\tau,\omega}(X^*) = Uww^*X^* = Y$ et $(\alpha(x))^\sim = Y\widetilde{x}Y^*, \forall x \in R$, parce que $X^* \in (\widetilde{R})'$.

Maintenant $\alpha_{\tau,\omega}^n(\widetilde{x}) = Y^n\widetilde{x}(Y^*)^n, \forall x \in R$, de telle façon que $Y^n \in R_\omega$. Comme $R_\omega^{\alpha_\omega}$ est une algèbre de von Neumann, il existe un certain $Z \in R_\omega^{\alpha_\omega}$ tel que $Z^n = Y^n$ et Z est dans l'algèbre de von Neumann engendrée par Y^n dans $R_\omega^{\alpha_\omega}$. En particulier Z et Y commutent comme éléments de $R_{\tau,\omega}$. Posons $U' = YZ^*$ alors on a :

$$\begin{gathered}\alpha_{\tau,\omega}(U') = \alpha_{\tau,\omega}(Y)\alpha_\omega(Z^*) = YZ^* = U', \\ U'^n = Y^n(Z)^{-n} = 1, \qquad U'\widetilde{x}U'^* = Y\widetilde{x}Y^* = (\alpha(x))^\sim, \qquad \forall x \in R.\end{gathered}$$

Q.E.D.

La preuve du théorème, partie (1), repose sur l'adaptation simple suivante de la preuve donnée dans [10] p. 156-157 du théorème de dérivation qu'on peut aussi trouver dans [3] avec $\| \ \|$ à la place de $\| \ \|_2$.

Lemme 3.4. Soit P un facteur de type II_1, et K un sous-facteur de dimension finie de P. Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}\, P$, alors si $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{U \text{ unitaire dans } K' \cap P} \|\alpha(U) - U\|_2 < 1$ l'automorphisme α est intérieur.

Démonstration. Soit U_0 le groupe unitaire de $K' \bigcap P$. Alors, exactement comme dans [10] p. 156-157 on définit une action de U_0 sur l'espace vectoriel P par la formule

$$\varphi_u(x) = ux\alpha(u^*), \qquad x \in P, \qquad u \in U_0.$$

Comme $\|\varphi_u(x)\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in P$ on peut étendre cette action à une action de U_0 sur $L^2(P,\tau)$ où τ est la trace canonique de P. Si l'hypothèse du lemme est satisfaite, la projection orthogonale y de

0 sur $\overline{\text{Conv}}\{\varphi_u(1), u \in U_0\}$[7] est différente de 0 et est un point fixe pour φ_u, pour tout $u \in U_0$. En d'autres termes on a $uy = y\alpha(u), \forall u \in U_0$, donc $xy = y\alpha(x) \quad \forall x \in K' \cap P$. Maintenant il existe un unitaire $v \in P$ tel que ${}_v\alpha = \text{Ad } v \cdot \alpha$ est de la forme $1_K \otimes \beta$ où $\beta \in \text{Aut } (K' \cap P)$, et on a :

$$xyv^* = yv^*_v\alpha(x), \qquad \forall x \in K' \cap P.$$

Soit $yv^* = \sum e_{ij} \otimes y_{ij}$, avec $e_{ij} \in K$ et $y_{ij} \in K' \cap P$, alors si les e_{ij} sont des unités matricielles dans K on obtient $xy_{ij} = y_{ij}\beta(x), \forall x \in K' \cap P, \forall i, j$. Il s'ensuit alors qu'il existe un $z \in K' \cap P$ non nul tel que

$$xz = z\beta(x), \forall x \in K' \cap P.$$

Par conséquent par [9] $\beta = ({}_v\alpha$ restreint à $K' \cap P)$ est un automorphisme intérieur, de telle façon que ${}_v\alpha$ est intérieur sur P, étant l'identité sur K, et finalement α est intérieur sur P.

Démonstration de la partie (1) du théorème 3.2. Si α est un automorphisme intérieur alors facilement $\alpha_\omega = 1$. Soit α un automorphisme extérieur, et u_n une séquence d'unitaires de R. On construit une séquence centrale $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'unitaires telle que $\|u_n v_n u_n^* - v_n\|_2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $\|\alpha(v_n) - v_n\|_2 \geq \frac{1}{2}, \forall n$. Il découle de cela que pour tout unitaire $u \in R_{\tau,\omega}$, il existe un unitaire $v \in R_\omega$ tel que $uvu^* = v$ alors que $\alpha(v) \neq v$. Cela montrera donc que α_ω n'est pas intérieur sur R_ω.

Pour construire la séquence $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, soit K_n une séquence croissante de sous-facteurs de dimension finie de R telle que : $u_n \overset{1/n}{\in} K_n$,[8] $\forall n \in \mathbf{N}, (\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} K_n)^- = R$. Dénotons alors, pour tout n, par v_n un unitaire dans K_n' tel que $\|\alpha(v_n) - v_n\|_2 \geq \frac{1}{2}$ (on applique le lemme 3.4).

Clairement $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une séquence centrale dans R et $\|[u_n, v_n]\|_2 \leq \frac{2}{n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$, de telle façon que $\|u_n v_n u_n^* - v_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Q.E.D.

Démonstration de la partie (2) du théorème 3.2. Soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une séquence croissante de sous-facteurs de dimension finie de R. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ il existe un unitaire u_n' tel que $\alpha(K_n) = u_n' K_n u_n'^*$ donc un unitaire u_n tel que $\alpha(x) = u_n x u_n^*, \; \forall x \in K_n$.

Il s'ensuit de cela que $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n x u_n^*, \; \forall x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, et par conséquent $\forall x \in R$, en supposant que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ est fortement dense dans R.

Q.E.D.

IV. Quelques lemmes techniques

Lemme 4.1. *Soit $\varepsilon \in]0,1[$, et N un facteur de type* II_1*. Soient $e_1, \ldots, e_n$ des projections de N telles que $\|\sum\limits_{j=1}^{n} e_j - 1\|_2 \leq \varepsilon$. Alors*

[7] L'image canonique de la boule unité C^* de P dans $L^2(P, \tau)$ est faiblement fermée et contient les $\varphi_u(1), u \in U_0$. Ainsi y appartient à cette boule-unité.

[8] $x \overset{\varepsilon}{\in} K$ signifie que, comme dans [7], il existe un certain $y \in K$ tel que $\|x - y\|_2 < \varepsilon$.

(a) $f_j = \bigvee_1^j e_l - \bigvee_1^{j-1} e_k$ est une famille de projections orthogonales deux à deux telles que $\|f_j - e_j\|_2 \leq 10n\varepsilon^{1/4}$.

(b) Il existe une famille de projections deux à deux orthogonales $E_j \sim e_j$ avec $\|E_j - e_j\|_2 \leq 14n\varepsilon^{1/8}$, à condition que $\sum \tau(e_j) \leq 1$.

Démonstration. (a) Dénotons par $T_j = \sum_1^j e_l$, et $F_j = \bigvee_1^j e_l$. On a $F_j =$ Support de T_j. Soit f^j la projection spectrale de T_j correspondant à l'intervalle $[1+\sqrt{\varepsilon}, \infty[$. Comme on a $T_j \leq T_n$, on obtient $\tau(f^j) \leq \tau(f^n)$ par le théorème du minimax, ainsi $\tau(f^j) \leq \varepsilon$. Aussi, f^j commute avec T_j et F_j et comme $\|(1+\sqrt{\varepsilon}F_j - T_j\| \leq n$, on a $\tau((1-f^j)((1+\sqrt{\varepsilon})F_j - T_j)) \leq \tau((1+\sqrt{\varepsilon})F_j - T_j) + n\tau(f^j) \leq \sqrt{\varepsilon} + n\varepsilon$. (Parce que $\tau(F_j \leq \sum_1^j \tau(E_j) = \tau(T_j))$. Comme $0 \leq (1-f^j)((1+\sqrt{\varepsilon})F_j - T_j) \leq 1+\sqrt{\varepsilon} \leq 2$, on a $\|(1-f^j)((1+\sqrt{\varepsilon})F_j - T_j)\|_2 \leq \sqrt{2}(n+1)^{1/2}\varepsilon^{1/4}$.

Mais $\|f^j((1+\sqrt{\varepsilon})F_j - T_j\|_2 \leq n(\tau(f^j))^{1/2} \leq n\varepsilon^{1/4}$, de telle façon que $\|F_j - T_j\|_2 \leq \|(1+\sqrt{\varepsilon})F_j - T_j\|_2 + \sqrt{\varepsilon} \leq (n\sqrt{2} + (n+1)^{1/2}\sqrt{2} + 1)\varepsilon^{1/4}$. Comme $T_j - T_{j-1} = e_j$ et $F_j - F_{j-1} = f_j$, on obtient (a).

(b) On a $\sum \tau(e_j) \leq 1$. Prenons f_j comme dans (a). Soit $I = \{j \in \{1, \ldots, n\}, \tau(f_j) \leq \tau(e_j)\}$ et $J = \{j \in \{1, \ldots, n\}, \tau(f_j) > \tau(e_j)\}$. Soit pour tout $j \in J, f'_j$ une sous-projection de f_j telle que $\tau(f'_j) = \tau(f_j) - \tau(e_j)$. Alors les f'_j sont des projections deux à deux orthogonales avec $\sum_{j\in J} \tau(f'_j) + \tau(1 - \bigvee_{j=1}^n f_j) = \sum_{j\in J} \tau(f'_j) + 1 - \sum_{j=1}^n \tau(f_j) = 1 - \sum_{j\in I} \tau(f_j) - \sum_{j \in J} \tau(e_j) \geq \sum_{j\in I} (\tau(e_j) - \tau(f_j))$. Soit $(f''_j)_{j\in I}$ une famille de projections deux à deux orthogonales, avec $f''_j \leq \sum_{j\in J} f'_j + 1 - \sum_{j=1}^n f_j$, $\quad \tau(f''_j) = \tau(e_j - f_j)$, $\forall j \in I$. Posons $E_j = f_j + f''_j$ pour $j \in I, R_j = f_j - f'_j$ pour $j \in J$. Alors chaque E_j est une projection équivalente à e_j, les E_j sont deux à deux orthogonales, et

$$\|E_j - f_j\|_2 \leq |\tau(e_j) - \tau(f_j)|^{1/2} \leq 4n^{1/2}\varepsilon^{1/8}, \qquad \|E_j - e_j\|_2 \leq (10n + 4n^{1/2})\varepsilon^{1/8} \leq 14n\varepsilon^{1/8}.$$

Lemme 4.2. *Soient $n, m \in \mathbf{N}$ avec n divisant m. Soit α un automorphisme minimal périodique de période m, d'un facteur N de type* II_1. Soit $\eta \in]0, 1/m[$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda^n = 1$. *Soit $(u_j)_{j=1,\ldots,n-1}$ une famille de $n-1$ éléments de N de norme inférieure à 1 telle que*

(a) $\|\alpha(u_j) - \lambda u_j\|_2 \leq \eta, j \in \{1, ..., n-1\}$,

(b) $\left\| \left(\sum_1^{n-1} u_j^* u_j \right) + u_{n-1}u_{n-1}^* - 1 \right\|_2 \leq \eta$

(c) $\|u_j^* u_j - (u_j^* u_j)^2\|_2 \leq \eta$ pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, et
$\|u_{n-1}u_{n-1}^* - (u_{n-1}u_{n-1}^*)^2\|_2 \leq \eta$

(d) $\|u_j u_j^* - u_{j+1}^* u_{j+1}\|_2 \leq \eta$ pour $j = 1, ..., n-2$.

Alors il existe un système d'unités matricielles $(e_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ de N tel que $\alpha(e_{ij}) = \lambda^{i-j} e_{ij}$ et

$$\|u_j - e_{j+1,j}\|_2 \leq 142n(m\eta)^{1/256} \qquad \text{pour tout} \qquad j \in \{1, ..., n-1\}.$$

Démonstration. Pour $x \in N$, on pose $x^\lambda = \dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda^j \alpha^j(x)$. Alors si $\|x\| \le 1, \|\alpha(x) - \lambda x\|_2 \le \eta$, on a $\|x^\lambda\| \le 1$, $\alpha(x^\lambda) = \lambda x^\lambda$ et $\|x - x^\lambda\|_2 \le \dfrac{1}{m}\sum_{1}^{m} k\eta \le \dfrac{m-1}{2}\eta$. Prenons $v_j = u_j^\lambda$, alors on a

(e) $\|u_j - v_j\|_2 \le \dfrac{m-1}{2}\eta$, $\|u_j^* u_j - v_j^* v_j\| \le (m-1)\eta$,

$\|u_{n-1}u_{n-1}^* - v_{n-1}v_{n-1}^*\| \le (m-1)\eta$ et les v_j satisfont une condition comme (b) avec $nm\eta$ à la place de η, comme (c) avec $3m\eta$ et (d) avec $2m\eta$.

Posons $T_j = v_j^* v_j$, pour $j = 1, ..., n-1$ et $T_n = v_{n-1}v_{n-1}^*$. Alors on a $T_l \in N^\alpha \quad (l = 1, ..., n)$ et $\|T_l^2 - T_l\|_2 \le 3m\eta \quad (l = 1, ..., m)$.

Alors par [6] p. 273-274 il existe pour $j \in \{1, ..., n\}$ une projection spectrale F_j of $T_j, F_j \in N^\alpha$ telle que :

(f) $\|T_j - F_j\|_2 \le 8(m\eta)^{1/2}, \|T_j^{1/2} - F_j\|_2 \le 6(m\eta)^{1/4}$.

Si pour $j \in \{1, ..., n-1\}$ on dénote par $v_j = V_j T_j^{1/2}$ la décomposition polaire de v_j on obtient :

(f') $\|v_j - V_j F_j\|_2 \le 6(m\eta)^{1/4}$.

Posons $a = \mathrm{Inf}(1/n, \tau(F_1), ..., \tau(F_n))$. On a $|\tau(F_j) - \tau(T_j)| \le 8(m\eta)^{1/2}, j \in \{1, ..., n\}$;

par conséquent, en utilisant la condition (b) pour les v :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \tau(F_j) - 1\right| \le \left|\sum_{j=1}^{n} \tau(T_j) - 1\right| + 8n(m\eta)^{1/2} \le nm\eta + 8n(m\eta)^{1/2} \le 9n(m\eta)^{1/2}.$$

(parce que $m\eta \le 1$.)

Pour $j < n-1$

$$|\tau(F_j) - \tau(F_{j+1}| \le |\tau(v_j v_j^*) - \tau(v_{j+1}^* v_{j+1})| + 16(m\eta)^{1/2} \le 2m\eta + 16(m\eta)^{1/2} \le 18(m\eta)^{1/2}.$$

De plus $\tau(F_{n-1}) - \tau(F_n) \le 18(m\eta)^{1/2}$. De telle façon que

$$\left|\tau(F_j) - \frac{1}{n}\right| \le \left|\tau(F_j) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tau(F_i)\right| + 9(m\eta)^{1/2} \le \frac{n-1}{2} 18(m\eta)^{1/2} + 9(m\eta)^{1/2} \le 9n(m\eta)^{1/2}.$$

Ainsi $\left|a - \dfrac{1}{n}\right| \le 9n(m\eta)^{1/2}$ et $|\tau(F_j) - a| \le 18n(m\eta)^{1/2}$. Pour chaque j, appelons E_j une projection dans N^α avec $E_j \le F_j, \tau(E_j) = a$. Posons $W_j = V_j E_j$, $j < n$. Alors

$$\|W_j - v_j\|_2 \le \|F_j - E_j\|_2 + \|v_j - V_j F_j\|_2 \le 5n^{1/2}(m\eta)^{1/4} + 6(m\eta)^{1/4} \le (16n)(m\eta)^{1/4},$$
$$\|W_{n-1}W_{n-1}^* - T_n\|_2 \le 32n(m\eta)^{1/4} ;$$

pour $j < n-1$,

$$\|W_j W_j^* - W_{j+1}^* W_{j+1}\|_2 \le 4 \cdot 16n(m\eta)^{1/4} + 2m\eta \le 66n(m\eta)^{1/4}.$$

Maintenant on a $\tau(E_j) = a \leq \frac{1}{n}$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} E_j - 1\right\|_2 \leq 5n^{3/2}(m\eta)^{1/4} + 8n(m\eta)^{1/2} + \left\|\sum_{j=1}^{n} T_j - 1\right\|_2 \leq 14n^{3/2}(m\eta)^{1/4}$$

Ainsi il existe un système G_j de projections deux à deux orthogonales de N^α, avec $\tau(G_j) = \tau(E_j) = a$, et $\|G_j - E_j\|_2 \leq 22n^2(m\eta)^{1/32}$ (Lemme 4.1). Pour chaque $j < n$, on dénote, en utilisant le lemme 7 de [6] p. 275, par X_j un unitaire dans N^α tel que $X_j G_j X_j^* = E_j$, par Y_j un unitaire dans N^α avec $Y_j W_j W_j^* Y_j^* = G_{j+1}$ et tel que :

$$\|X_j - 1\|_2 \leq 50n^{1/4}(m\eta)^{1/256}, \quad \|Y_j - 1\|_2 \leq 72n^{1/4}(m\eta)^{1/256}.$$

Choisissons n projections orthogonales deux à deux G'_j telles que $G'_j \in N^\alpha, \tau(G'_j) = \frac{1}{n} - a, G'_j \leq 1 - \sum_{k=1}^{n} G_k$, et $n-1$ isométries partielles $(U'_j)_{j=1,n-1}$ où $U'^*_j U'_j = G'_j, U'_j U'^*_j = G'_{j+1},\ \alpha(U'_j) = \lambda U'_j$ (appliquer 2.7a). Posons $U_j = Y_j W_j X_j + U'_j$ pour $j = 1, ..., n-1$. Alors U_j est une isométrie partielle de support initial $G_j + G'_j$ et de support final $G_{j+1} + G'_{j+1}$.

Également $\alpha(U_j) = \lambda U_j$, et on a :

$$\|U_j - W_j\|_2 \leq 122(n^{1/4}(m\eta)^{1/256}) + \left(\frac{1}{n} - a\right)^{1/2}, \quad \text{et en utilisant (e),}$$

$$\|U_j - u_j\|_2 \leq \frac{m-1}{2}\eta + 16n(m\eta)^{1/4} + 122n^{1/4}(m\eta)^{1/256} + 3n^{1/2}(m\eta)^{1/4}$$

$$\leq (1 + 16n + 122n^{1/4} + 3n^{1/2})(m\eta)^{1/256} \leq 142n(m\eta)^{1/256}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Lemme 4.3. *Soient $n, m \in \mathbf{N}$ avec n divisant m. Soit α un automorphisme minimal périodique de période m d'un facteur N de type II_1 Soit $\delta > 0$, et $(e_j)_{j=1,...,n}$ une partition de l'unité dans N telle que $\alpha(e_j) = e_{j+1}, j = 1, ..., n \quad (e_{n+1} = e_1)$, et $U \in N,\ \|U\| \leq 1$ avec*

(1) $$\|U^{n-1} - (U^*)^l\|_2 \leq \delta, \qquad l = 0, 1, 2, ..., n-1 \quad (\text{lire } (U^*)^0 = 1),$$

(2) $$\|\alpha(U) - U\|_2 \leq \delta,$$

(3) $$\|Ue_lU^* - e_{i+1}\|_2 \leq \delta \qquad (i = 1, ..., n).$$

Alors il existe une partition de l'unité $(E_j)_{j=1,...,n}$ of N, telle que $\alpha(E_j) = E_{j+1}$ for $j = 1, ..., n \quad (E_{n+1} = E_1)$, et un unitaire $V, V^n = 1, V \in N^\alpha$ tel que $VE_iV^* = E_{i+1}$ pour $i = 1, ..., n$ et tel que

$$\|V - U\|_2 \leq \varepsilon, \quad \|E_i - e_i\| \leq \varepsilon, \quad i = 1, ..., n,$$

où $\varepsilon = 143n^4(2mn^2\delta)^{1/256}$ (en supposant $2n^2\delta \leq 1/m$).

Démonstration. Soit $\lambda = \exp(i2\pi/n)$. Posons $W = \sum \lambda^j e_j$. Alors W est un unitaire de N tel que $\alpha(W) = \sum \lambda^j e_{j+1} = \lambda W$.

Pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, posons $f_k = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \lambda^{jk} U^j$, où U^0 est pris égal à 1. Alors $U^l = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{kl} f_k$ pour $l = 0, 1, ..., n-1$.

De plus $\|f_k\| \leq 1 \quad (k = 0, 1, ..., n-1)$ et

$$\|f_k^* - f_k\|_2 \leq \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda^{-k})^{n-j}(U^{n-j} - (U^*)^j)\right\|_2 + \frac{1}{n}\|U^n - 1\|_2 \leq 2\delta,$$

$$n^2 f_k^* f_k = \sum_{j,l=0,...,n-1} (\lambda^k)^j (\lambda^k)^{-l} (U^*)^j U^l.$$

Pour $l \geq j$ on a $\|(U^*)^j U^l - U^{l-j}\|_2 \leq (U^*)^j U^l - U^{n-j} U^l\|_2 \leq 2\delta$. Et pour $l < j$, on a $\|(U^*)U^l - U^{n-(j-l)}\|_2 \leq \delta$. Il s'ensuit de cela que, dans la somme ci-dessus pour $n^2 f_k^* f_k$ on peut remplacer chaque $(U^*)^j U^l$ par $U^{\underline{l-j}}$ où $\underline{l-j} = l - j \bmod n$, et $0 \leq \underline{l-j} < n$ pour obtenir

$$\|n^2 f_k^* f_k - n^2 f_k\|_2 \leq 2n^2\delta, \quad \|f_k^* f_k - f_k\|_2 \leq 2\delta$$

Posons $U_j = W f_j$ avec f_j comme ci-dessus. Alors comme W est unitaire on obtient : $U_j^* U_j = f_j^* f_j, \|U_j^* U_j - f_j\|_2 \leq 2\delta$. Également $U_{\underline{n-2}} U_{\underline{n-2}}^* = W f_{\underline{n-2}} f_{\underline{n-2}}^* W^*$ so $\|U_{\underline{n-2}} U_{\underline{n-2}}^* - (U_{\underline{n-2}} U_{\underline{n-2}}^*)^2\|_2 \leq 4\delta$. On obtient $\|U_j^* U_j - (U_j^* U_j)^2\|_2 \leq 4\delta$ (parce que $\|U_j^* U_j - f_j^*\|_2 \leq 2\delta, \quad \|U_j^* U_j - f_j\|_2 \leq 2\delta$).

Aussi $UWU^* = \sum \lambda^j U e_j U^*$ de telle façon que $\|UWU^* - \lambda W\|_2 \leq n\delta$ et $\|UW^*U^* - \lambda W^*\|_2 \leq n\delta$, $\|WUW^* - \lambda U\|_2 \leq n\delta + \|U^*U - 1\|_2 \leq (n+2)\delta$ parce que $\|U^* - U^{n-1}\|_2 \leq \delta$ et $\|U^n - 1\|_2 \leq \delta$.

Ainsi pour $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ on obtient $\|WU^jW^* - \lambda^j U^j\|_2 \leq j(n+2)\delta$. Par conséquent $\|W f_k W^* - f_{k+1}\|_2 \leq \dfrac{1}{n}\sum \|WU^jW^* - \lambda^j U^j\|_2 \leq \dfrac{n-1}{n}(n+2)\delta \leq n^2\delta$. Il découle de cela que $\|U_k U_k^* - U_{k+1}^* U_{k+1}\|_2 \leq \|W f_k W^* - f_{k+1}\|_2 + 4\delta \leq (n^2+4)\delta$ pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$. Donc aussi $\|U_{n-2} U_{n-2}^* - f_{n-1}\|_2 \leq (n^2+2)\delta$ et $\left\|\left(\sum_0^{n-2} U_j^* U_j\right) + U_{n-2} U_{n-2}^* - 1\right\| \leq 2(n-1)\delta + (n^2+2)\delta$ parce que $\sum_{j=0}^{n-1} f_j = 1$. Comme $\alpha(W) = \lambda W$ et $\|\alpha(f_j) - f_j\|_2 \leq \dfrac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\|U^l - \alpha(U^l)\|_2 \leq \dfrac{n-1}{2}\delta$ on a $\|\alpha(U_j) - \lambda U_j\|_2 \leq \dfrac{n-1}{2}\delta$.

On a montré que la famille $(U_j)_{j=0,...,n-2}$ satisfait les conditions (a), (b), (c), (d) du Lemme 4.2 avec $\eta = 2n^2\delta$. Par hypothèse $2n^2\delta \leq \dfrac{1}{m}$ de telle façon qu'on peut trouver une famille $(e_{ij})_{i,j\in\{0,...,n-1\}}$ d'isométries partielles de N, telle que $\alpha(e_{ij}) = \lambda^{i-j} e_{ij}$ et

$$\|U_j - e_{j+1,j}\|_2 \leq 142n(2mn^2\delta)^{1/256} = \delta' \quad (j = 0, 1, ..., n-2).$$

De plus, on a $U_{n-1} = W f_{n-1} = (W^*)^{n-1} f_{n-1}$ et comme $\|f_k^* W^* - W^* f_{k+1}^*\|_2$ est plus petit que $n^2\delta$

pour tout k on obtient :

$$\|U_{n-1} - U_0^* U_1^* \dots U_{n-2}^*\|_2 \leq n(n^2\delta) + \sum_{j=1}^{n-1} \|(f_j^*)^2 - f_j^*\|_2 \leq nn^2\delta + 4n\delta,$$

$$\|U_{n-1} - e_{0,n-1}\|_2 \leq 2n^3\delta + n\delta' \leq \delta'' = 143n^2(2mn^2\delta)^{1/256}$$

Posons $W_1 = \sum_{j=0}^{n-1} e_{j+1,j}$. Alors W_1 est un unitaire tel que $W_1^n = 1$ et $\alpha(W_1) = \lambda W_1$. Posons $E_j = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} \lambda^{jl} W_1^l$, pour $j = 0, ..., n-1$, de telle façon que $W_1 = \sum \lambda^j E_j$ et les E_j sont les projections spectrales des W_1 correspondant aux λ^j, $j = 0, ..., n-1$. On a $\alpha(E_j) = E_{j+1}$ $(j = 0, ..., n-1)$.

Posons $V = \sum \lambda^k e_{kk}$ alors V est unitaire, $V^n = 1, \alpha(V) = V$ et $VE_jV^* = E_{j+1}$ $(j = 0, 1, ..., n-1)$. (parce que $VW_1V^* = \lambda W_1$.)

On a

$$\|W_1 - W\|_2 \leq \left\|\sum_0^{n-1} (U_j - e_{j+1,j})\right\|_2 \leq n\delta'',$$

et donc

$$\|E_j - e_j\|_2 \leq \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} \|W_1^l - W^l\|_2 \leq \left(\frac{n-1}{2}\right) n\delta''.$$

Aussi $\|V - U\|_2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|e_{kk} - f_k\|_2 \leq n(2\delta') + (n-1)2\delta + n^2\delta \leq 2\delta''$. Ainsi on obtient la conclusion du lemme, en prenant $\varepsilon = n^2\delta'' = 143n^4(2mn^2\delta)^{1/256}$. Q.E.D.

V. Actions des groupes cycliques finis, par automorphismes extérieurs, sur le facteur hyperfini II_1

Le fait que pour chaque n il n'existe qu'une seule action par automorphisme extérieur de $\mathbf{Z}/n$ sur R découle de l'assertion (b) de

Théorème 5.1. *Soit R le facteur de type* II_1 *et* $p, q \in \mathbf{N}$.

(a) *Soit $\alpha \in$ Aut R périodique minimal avec* (période extérieure de α) $= pq$ alors $\alpha \otimes s_q^1$ *est conjugué de α, et également $\alpha \otimes 1_R$ est conjugué de α.*

(b) *Tout périodique $\alpha \in$ Aut R tel que* période de α = période extérieure de $\alpha = p$ *est conjugué de s_p^1.*

Démonstration. Soit $(x_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une séquence fortement dense dans la boule unité R_1 de R. Nous construirons, dans la preuve de (a) et (b), une séquence (K_j) de sous-facteurs de type I_n de R commutant deux à deux, avec :

$$(5.2) \qquad \|E_{K'_m}(x_l) - x_l\|_2 \leq \frac{1}{2^m}, \qquad l < m.$$[9]

On rappelle qu'en utilisant [7], on a alors pour chaque l et

$$l' \geq l, \quad x_l \overset{1/2^{l'-1}}{\in} \bigcap_{m \geq l'} K'_m = \left((K_1 \bigcup \ldots \bigcup K_{l'})'' \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right) \right)''$$

parce que $(\prod_{m \geq l'} E_{K'_m})(x)$ appartient à $\bigcap_{m \geq l'} K'_m$.

Donc on sait ([7]) qu'en posant $K = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right)''$ le facteur R se décompose en le produit tensoriel de K par son commutant K' dans R.

(a) Soit λ une racine $n^{\text{ième}}$ de 1 où n est un entier divisant la période extérieure de α. On construit par induction sur m une séquence K_m de sous-facteurs de type I_n commutant deux à deux de R satisfaisant la condition 5.2 et :

(5.3) $\alpha(K_m) = K_m$ et il existe un système d'unités matricielles e^m_{ij} de K_m tel que $\alpha(e^m_{ij}) = \lambda^{i-j} e^m_{ij}$.

L'existence de K_1 découle du corollaire 2.7.

Supposons que l'on a construit les K_j jusqu'à K_m inclus. On cherche K_{m+1} tel que :

1. $K_{m+1} \subset (K_1 \cup \ldots \cup K_m)'$,
2. K_{m+1} est engendré par un système d'unités matricielles de taille $n \times n$ dénotées (e_{ij}) tel que $\alpha(e_{ij}) = \lambda^{i-j} e_{ij} \quad (i, j = 1, ..., n)$.
3. $\|[e_{i+1,i}, x_l]\|_2 < \varepsilon, \quad i = 1, ..., n-1\,; l = 1, ..., m$.

Clairement, si ε est choisi suffisamment petit, les conditions (1), (2), (3) impliqueront les conditions (5.2) et (5.3).

Pour obtenir K_{m+1}, restreignons-nous à $P = (K_1 \cup ... \cup K_m)'$ qui est un facteur hyperfini de type II_1 sur lequel la restriction β de α a une période extérieure égale à $p_0(\alpha)$. Alors par le corollaire 2.7 et par le fait que β_ω est périodique minimal de période $p_0(\alpha)$ (théorème 3.2.1) il existe un système $(v_j)_{j=1,...,n}$ d'isométries partielles dans P_ω tel que, avec $v_{n+1} = v_1$:

$$\beta_\omega(v_j) = \lambda v_j, \quad \sum_{j=1}^{n} v_j^* v_j = 1, \quad v_j v_j^* = v_{j+1}^* v_{j+1} \quad (j = 1, ..., n).$$

Appliquons alors le lemme 4.2 pour construire les $(e_{j,k})_{j,k=1,...,n}$ satisfaisant les conditions (1), (2), (3) ci-dessus.

[9] Dans la suite, si K est une sous-algèbre de von Neumann de R, on dénote par E_K la trace préservant l'attente conditionnelle de R sur K et soit K' le commutant relatif de K dans R.

Maintenant soit $K = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\right)''$. Prenons d'abord $n = q$ et $\lambda = e^{i2\pi/q}$ alors la restriction de α à K est de façon évidente conjugué de s_q^1. Maintenant $s_q^1 \otimes s_q^1$ est conjugué de s_q^1 de telle façon que $s_q^1 \otimes \alpha$ est conjugué de α, parce que $\alpha = \alpha/K \otimes \alpha/K'$.

Prenons alors $n =$ période extérieure de α et $\lambda = 1$, alors la restriction de α à K est l'identité de telle façon que $\alpha \otimes 1_R$ est conjugué de α parce que $1_R \otimes 1_R = 1_R$.

(b) Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on choisit un ε_n positif ayant la propriété suivante :

(5.4) Soit U un unitaire dans R avec $U^p = 1$, $(e_j)_{j=1,\dots,p}$ une partition de l'unité dans R avec $Ue_jU^* = e_{j+1}$, $j = 1, ..., p-1$, et K un sous-facteur de type I_p de R engendré par U et les e_j.

Alors $x \in R, \|x\|_\infty \leq 1, \|[x, U]\|_2 \leq 2\varepsilon_n, \|[x, e_j]\|_2 \leq 2\varepsilon_n, \quad j = 1, ..., p$ implique

$$\|E_{K'}(x) - x\|_2 \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Nous pouvons de plus supposer que $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors on construit par induction une séquence $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-facteurs de type I_p de R commutant deux à deux et satisfaisant la condition 5.2 et

(5.5) Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on a $\alpha(K_n)K_n$, α restreint à K_n égale $\mathrm{Ad}\, U_n$, U_n unitaire dans K_n et :

$$\left\|\alpha(x_j) - \left(\prod_1^n \mathrm{Ad}\, U_k\right)(x_j)\right\|_2 \leq \varepsilon_n \quad j = 1, ..., n.$$

On prouve directement l'existence de K_{n+1} en supposant que $K_1, \dots K_n$ ont déjà été construits. Cela montrera également comment construire K_1. Soit $P = (K_1 \cup ... \cup K_n)' \cap R$ et P_1 sa boule-unité. P est globalement invariant par α, soit $\beta = \alpha/P$, alors $p_0(\beta) = p$ de telle façon que par 5.1 (a) il existe une partition de l'unité $(e_j)_{j=1,\dots,n}$ in P, avec $\beta(e_j) = e_{j+1} \quad (j = 1, ..., p)$ et :

$$\|[e_j, x_j]\|_2 \leq \varepsilon_n \qquad (j = 1, .., p \ ; l = 1, ..., n).$$

On choisit alors un système d'unités matricielles $(f_r)_{r=1,\dots,n}$ n^{2n} dans $(K_1 \cup ... \cup K_n)''$ et on écrit $x_j = \sum_r \lambda_{r,j} f_r y_{r,j}$ où les λ sont des scalaires, les y appartiennent à P_1, pour $j = 1, ..., n+1$. Clairement on a ainsi un nombre fini k d'éléments de P_1, disons $y_1, \dots, y_k$ et un $\eta > 0$ tel que

$$\text{(5.6)} \quad \begin{aligned} &(v \text{ unitaire dans } P, \|\beta(y_j) - v y_j v^*\|_2 \leq \eta \quad (j = 1, \dots, k)) \\ &\implies (\|\alpha(x_j) - \left(\prod_1^n \mathrm{Ad}\, U_l\right) \mathrm{Ad}\, v(x_j)\|_2 \leq \varepsilon_{n+1} \quad (j = 1, ..., n+1)). \end{aligned}$$

On suppose de plus que $\eta \leq 2\varepsilon_n$.

On choisit $\delta > 0$ à partir du $\eta > 0$ ci-dessus et du lemme 4.3 avec $\varepsilon = \dfrac{1}{4}\eta$. Maintenant par le corollaire 3.3 on peut trouver un élément U de P, $\|U\| \leq 1$, satisfaisant les conditions suivantes :

$$(5.7) \qquad \|U^{p-l}-(U^*)^l\|_2 \le \delta, \qquad \|\beta(U)-U\|_2 \le \delta$$

$$\|U^p-1\| \le \delta, \quad \|Ue_iU^*-\beta(e_i)\|_2 \le \delta \quad (i=1,\dots,p)$$

et

$$\|Uy_jU^*-\beta(y_j)\|_2 \le \frac{1}{2}\eta \quad (j=1,\dots,k).$$

Il découle alors du lemme 4.3 appliqué à $\beta \in \mathrm{Aut}\,P$ qu'il xiste une partition de l'unité $(E_j)_{j=1,\dots,p}$ dans P, un unitaire $V\in P$ tel que $VE_jV^*=E_{j+1}$ pour tout j, $V^p=1$, que le sous-facteur K de P de type I_p engendré par $(E_j)_{j=1,\dots,p}$, et V est globalement invariant par β, avec $\beta/K=\mathrm{Ad}\,V/K$ et que

$$\|E_j-e_j\|_2 \le \frac{1}{4}\eta, \quad \|V-U\|_2 \le \frac{1}{4}\eta.$$

On prendra $K_{n+1}=K, U_{n+1}=V$. On a pour $j\in\{1,...,k\}$:

$$\|Vy_jV^*-\beta(y_j)\| \le 2\|V-U\|_2+\|Uy_jU^*-\beta(y_j)\|_2 \le \eta$$

de telle façon que par 5.6 on obtient :

$$\left\|\alpha(x_j)-\left(\prod_1^{n+1}\mathrm{Ad}\;U_l\right)(x_j)\right\|_2 \le \varepsilon_{n+1} \qquad (j=1,\dots,n+1).$$

Mais par l'hypothèse d'induction on avait :

$$\left\|\alpha(x_j)-\left(\prod_1^{n}\mathrm{Ad}\;U_l\right)(x_j)\right\|_2 \le \varepsilon_{n} \qquad (j=1,...,n).$$

Cela, en utilisant le fait que $\prod\limits_1^n \mathrm{Ad}\;U_l$ préserve la norme $\|\quad\|_2$ montre que $\|Vx_jV^*-x_j\|_2 \le \varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}\le 2\varepsilon_n \;\; (j=1,...,n)$.

On a aussi $\|[E_i,x_j]\|_2 \le \|[e_i,x_j]\|_2+2\|E_i-e_i\|_2 \le 2\varepsilon_n \quad (j=1,...,n \quad \text{et} \quad i=1,...,p)$.

Ainsi il découle de 5.4 que :

$$\|E_{K'_{n+1}}(x_j)-x_j\|_2 \le \frac{1}{2^{n+1}} \quad (j=1,\dots,n).$$

On a montré comment construire la séquence $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfaisant 5.2 et 5.5. Soit $K=\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}K_n\right)''$, alors par (5.2) on a une séparation de R comme produit tensoriel de K par K'_R. Notons également par 5.5 que :

$$\alpha(x)=\left(\prod_1^{\infty}\mathrm{Ad}\;U_l\right)(x), \quad \forall x\in R.$$

Cela montre que α est conjugué de $s_p^1\otimes$(identité sur K'_R) ; mais α est conjugué de $\alpha\otimes 1_R$ (théorème 5.1 (a)) et (Identité sur K'_R) $\otimes$ (Identité sur R) est clairement 1_R parce que $K'_R\otimes R$ est isomorphe à R. Ainsi α est conjugué de $s_p^1\otimes 1_R$ qui à nouveau par 5.1 (a) est conjugué de s_p^1. Q.E.D.

VI. Le groupe cyclique des classes de conjugaison extérieures avec une période extérieure donnée p

Dans cette section on démontrera que pour $p \in \mathbf{N}$ donné et γ, $\gamma^p = 1$, il n'y a qu'une classe de conjugaison extérieure avec invariants extérieurs (p, γ). La preuve repose sur l'étude du produit tensoriel comme loi de composition entre les classes de conjugaison extérieures de période extérieure p.

Définition 6.1. Soit R le facteur hyperfini II_1, a et b des classes de conjugaison extérieures dans Aut R, alors on définit $a \times b$ comme la classe de conjugaison extérieure de n'importe quel automorphisme $\alpha \otimes \beta \in \mathrm{Aut}\ R \otimes R$ avec $\alpha \in a, \beta \in b$, ramenée à Aut R par n'importe quel isomorphisme Π de R sur $R \otimes R$.

En d'autres termes, pour $\alpha \in a, \beta \in b$ et $\pi : R \to R \otimes R$ l'automorphisme $\pi^{-1}(\alpha \otimes \beta)\pi$ appartient à $a \times b$. Clairement changer α en $\alpha' \in a$, β en $\beta' \in b$, et π en $\pi' : R \to R \otimes R$ ne change pas la classe de conjugaison extérieure de $\pi^{-1}(\alpha \otimes \beta)\pi$, de telle façon que 6.1 a du sens.

Théorème 6.2. *Pour chaque $p \in \mathbf{N}$ l'ensemble Br_p des classes de conjugaison extérieures dans* Aut R*, de période extérieure égale à p, muni de la loi de composition $(a, b) \to a \times b$ est un groupe abélien et γ est un isomorphisme de ce groupe sur le groupe des racines $p^{\text{ièmes}}$ de 1 dans $\mathbf{C}$.*

Corollaire 6.3. *Pour chaque $p \in \mathbf{N}$, Br_p est un groupe cyclique d'ordre p avec comme unité la classe de conjugaison extérieure de s_p^1 et comme générateur la classe de conjugaison extérieure de s_p^γ si γ est une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de 1.*

Démonstration. Découle immédiatement de 6.2 et de la proposition 1.6.

Corollaire 6.4. *Soit R le facteur hyperfini* II_1 *, $\alpha, \beta \in$* Aut R *périodiques, alors,*

$$(\alpha \text{ conjugué de } \beta) \iff (p_0(\alpha) = p_0(\beta), \gamma(\alpha) = \gamma(\beta), \varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)).$$

Démonstration. Par 6.2, α et β sont conjugués extérieurs ssi ils ont les mêmes invariants extérieurs. Par 2.8 si α et β sont conjugués extérieurs et $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)$ alors α et β sont conjugués. Q.E.D.

Démonstration du théorème 6.2. Vérifions d'abord que $a \in Br_p, b \in Br_p \implies a \times b \in Br_p$. Par [9] Corollaire 6 on sait que le produit tensoriel $\alpha \otimes \beta$ de deux automorphismes α et β est intérieur si et seulement si tous les deux sont intérieurs. Il en découle en général que $p_0(\alpha \otimes \beta)$ est égal au p.p.c.m.$(p_0(\alpha), p_0(\beta))$ et en particulier que Br_p est stable par $(a, b) \to a \times b$. Ensuite, on montre que la classe e de s_p^1 est une unité dans Br_p. Soit $a \in Br_p$ et soit α un automorphisme minimal périodique. Alors par le théorème 5.1 (a) on sait que $\alpha \otimes s_p^1$ est conjugué de α et ainsi que $a \times e$ est égal à a.

Vérifions maintenant que γ est un homomorphisme ; soit $a, b \in Br_p, \alpha \in a, \beta \in b$, et $\alpha^p = \mathrm{Ad}\ u, \beta^p = \mathrm{Ad}\ v, u, v \in R$ avec $\alpha(u) = \gamma(\alpha)u, \quad \beta(v) = \gamma(\beta)v$. On a alors $(\alpha \otimes \beta)^p = \mathrm{Ad}\ (u \otimes v)$ et $\alpha \otimes \beta(u \otimes v) = \alpha(u) \otimes \beta(v) = \gamma(\alpha)\gamma(\beta)u \otimes v$.

Prouvons que e est caractérisé dans Br_p par la condition $\gamma(e) = 1$. Prenons $a \in Br_p$, avec $\gamma(a) = 1$, et soit α périodique minimal. Alors la période de α est égal à sa période extérieure, égale à p. Ainsi par le théorème 5.1 (b) α est conjugué de s_p^1 de telle façon que $a = e$.

On sait ainsi que Br_p est un groupe, on peut en fait donner une description de l'inverse d'un élément a de Br_p : soit R^0 l'algèbre de von Neumann opposée de R, i.e. R^0 coïncide avec R comme espace vectoriel complexe mais le produit est $(x, y) \to yx$ au lieu de $(x, y) \to xy$. Alors soit $\alpha \in \text{Aut } R$, de façon évidente, α comme transformation linéaire de R définit un automorphisme α^0 de R^0, qui, parce que R^0 est hyperfini et par conséquent isomorphe à R, définit une classe de conjugaison dans Aut R, appelée l'opposée de α. Clairement, $p(\alpha) = p(\alpha^0)$. Soit $\alpha^p = \text{Ad } U, \alpha(U) = \gamma U$, alors l'égalité $\alpha^p(x) = UxU^*, x \in R$, signifie que $(\alpha^0)^p(x) = U^*xU, x \in R^0$, de telle façon que, comme $\alpha^0(U^*) = \alpha(U^*) = \gamma U^*$, on obtient $\gamma(\alpha^0) = \gamma(\alpha)^{-1}$.

Bien sûr a^0 a du sens pour $a \in Br_p$ et $a \times a^0$ est égal à e parce que $\gamma(a \times a^0) = 1$.

La fin de la preuve de 6.2 est maintenant facile. On sait que Br_p est un groupe, que γ est un homomorphisme de noyau trivial et que γ est surjective par 1.6 (c). Q.E.D.

On applique maintenant le théorème 6.2 pour déterminer les conditions selon lesquelles deux automorphismes périodiques $\alpha, \beta \in \text{Aut } R$ sont faiblement équivalents, i.e. il existe un $\sigma \in \text{Aut } R$ tel que $\sigma[\alpha]\sigma^{-1} = [\beta]$, où $[\alpha]$ est le groupe complet, [4] p. 163, du groupe $\{\alpha^n, n \in \mathbf{Z}\} \subset \text{Aut } R$.

Soit $n = 2^l m, m$ impair, un entier. Soit S_n l'ensemble contenant tous les diviseurs premiers de m en plus d'un élément ε si $l = 2$ et de deux éléments ε, ω si $l > 2$. Soit pour chaque entier k premier à n, $\left(\frac{k}{n}\right) \in \{-1, 1\}^{S_n}$ tel que $\left(\frac{k}{n}\right)_\varepsilon = (-1)^{\varepsilon(k)}, \varepsilon(k) = \frac{k-1}{2}$, $\left(\frac{k}{n}\right)_\omega = (-1)^{\omega(k)}$ où $\omega(k) = \frac{k^2-1}{8}$, and $\left(\frac{k}{n}\right)_p = \left(\frac{k}{n}\right)$ comme dans [11] p. 14 sinon.

Théorème 6.5. *Pour un périodique* $\alpha \in \text{Aut } R$ *définissons* $c(\alpha) = \text{Ordre de } \gamma(\alpha)$ *et* $q(\alpha) = \left(\frac{k}{c(\alpha)}\right)$ *où* $\gamma(\alpha) = \exp\,(2\pi i k / c(\alpha))$.

(a) *Deux automorphismes périodiques* α *et* β *sont faiblement équivalents si et seulement si* $p_0(\alpha) = p_0(\beta)$, $c(\alpha) = c(\beta)$ *and* $q(\alpha) = q(\beta)$.

(b) *Soient* c *et* d *deux entiers* ≥ 1, S_c *définis comme ci-dessus, et* $q \in \{-1, 1\}^{S_c}$. *Alors il existe un périodique* $\alpha \in \text{Aut } R$ *tel que* $p_0(\alpha) = cd$, $c(\alpha) = c, q(\alpha) = q$.

Démonstration. (a) Si α est faiblement équivalent à β alors $p_0(\alpha) = p_0(\beta) = p$ parce que $p_0(\alpha)$ est l'ordre de l'image de $[\alpha]$ dans Out R. Aussi, il existe un entier s, nécessairement premier à p, et tel que α est équivalent extérieur à β^s.

On a, avec $p = p(\alpha) = p(\beta)$, que $\beta^p = \text{Ad } U$, $\beta(U) = \gamma(\beta)U$ pour un certain unitaire $U \in R$. Ainsi $(\beta^s)^p = \text{Ad } U^s$, $\beta^s(U^s) = \gamma(\beta)^{s^2}U$ de telle façon que $\gamma(\beta^s) = \gamma(\beta)^{s^2}$.

Comme s est premier à p il s'ensuit que l'ordre de $\gamma(\beta)^{s^2}$ est le même que l'ordre de $\gamma(\beta)$ de telle façon que $c(\alpha) = c(\beta) = c$. Posons $\gamma(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi ik}{c}\right)$, $\gamma(\beta) = \exp\left(\frac{2\pi ik'}{c}\right)$. Alors on a $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)^{s^2}$ de telle façon que dans $\mathbf{Z}/c$ on obtient $k = s^2k'$, où k, k', s^2 sont des unités dans $\mathbf{Z}/c$. Il s'ensuit ainsi que $q(\alpha) = q(\beta)$.

Inversement, supposons que $p_0(\alpha) = p_0(\beta)$, $c(\alpha) = c(\beta)$, $q(\alpha) = q(\beta)$, et posons $\gamma(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi ik}{c}\right)$, $\gamma(\beta) = \exp\left(\frac{2\pi ik'}{c}\right)$. Alors par le théorème 3 de [11], p. 39 et 1, p. 46, prenons s, premier à $p_0(\alpha)$, tel que $ks^2 = k'(c(\alpha))$. Il s'ensuit que α^s a les mêmes invariants extérieurs que β et que α et β sont faiblement équivalents.

(b) Soit $k \in \mathbf{Z}/c$ une unité dans $\mathbf{Z}/c$ tel que $\left(\frac{k}{c}\right) = q$ ([11] lemme 1, p. 46) alors prenons $\gamma = \exp\left(\frac{2\pi ik}{c}\right)$ et $\alpha = s_{cd}^{\gamma}$.

Il s'ensuit que $p_0(\alpha) = cd, c(\alpha) =$ Ordre de $\gamma = c$, and $q(\alpha) = q$. Q.E.D.

Remarque 6.7. Par 6.5, il y a des automorphismes α de R, le plus simple étant s_3^j where $j^3 = 1$, $j \neq 1$, qui ne sont pas faiblement équivalents à leur opposé α^0. On peut déduire de cela que la paire $R^\alpha \subset R$ n'est pas isomorphe à la paire opposée.

Remarque 6.8. Soit $n \in \mathbf{N}$ et M un vecteur arbitraire. Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}\ M$, $p_0(\alpha) = n$. Alors considérons le noyau abstrait

$$q \in \mathbf{Z}/n \to \varepsilon(\alpha^q) \in \mathrm{Out}\ M$$

où ε est l'application canonique de Aut M dans Out M. À ce noyau abstrait il correspond une obstruction $k \in H^3(\mathbf{Z}/n, \mathbf{T})$ ([12] p. 216) avec $\mathbf{T}$ =centre du groupe unitaire de M (i.e. $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$) avec action triviale of $\mathbf{Z}/n$. Pour obtenir k on prend pour $q \in \mathbf{Z}/n$ un $\beta_q \in \mathrm{Aut}\ M$ arbitraire avec $\varepsilon(\beta_q) = \varepsilon(\alpha^q)$, on prend alors pour $q_1, q_2 \in \mathbf{Z}/n$ un unitaire u_{q_1,q_2} de M avec Ad $u_{q_1,q_2} = \beta_{q_1}\beta_{q_2}\beta_{q_1+q_2}^{-1}$ et : $k(q_1, q_2, q_3) = \beta_{q_1}(u_{q_2,q_3})u_{q_1,q_2+q_3}u_{q_1+q_2,q_3}^{-1}u_{q_1,q_2}^{-1} \in \mathbf{T}$. Avec le choix $\beta_q = \alpha^q$, on obtient :

$$k(q_1, q_2, q_3) = \gamma(\alpha)^{q_1\eta(q_2,q_3)} \quad \text{where} \quad \eta(q_2, q_3) = \begin{cases} 0 \text{ si } q_2 + q_3 < n, \\ 1 \text{ si } q_2 + q_3 \geq n. \end{cases}$$

En comparant la résolution bar du module triviale $\mathbf{Z}/n\,\mathbf{Z}$ avec sa résolution périodique de période, on ramène k à l'élément $\gamma(\alpha)$ de $\{a \in \mathbf{T}, a^n = 1\}$.

VII. Applications à diverses questions de théorie ergodique non-commutative

Dans la suite, on note R le facteur hyperfini de type II_1. Cette section est dédiée à l'application du théorème 1.5 pour répondre aux questions qui suivent.

Problème 7.1. Le périodique $\alpha \in \text{Aut } R$ est-il conjugué de l'opposé de son inverse ? (Il est facile de montrer qu'il y a des automorphismes intérieurs qui ne sont ni conjugués de leur opposé ni l'inverse. Pourtant ils sont toujours conjugués de l'opposé de leur inverse, quand ils sont périodiques).

Théorème 7.2. *Soit $\alpha \in \text{Aut } R$ périodique. Alors α est conjugué de $(\alpha^0)^{-1}$ si et seulement si $\gamma(\alpha)^2 = 1$.*

Démonstration. On a $\gamma(\alpha^{-1}) = \gamma(\alpha)$ ($\alpha^{-p} = \text{Ad } U^*$ où $p = p_0(\alpha)$ et $\alpha(U) = \gamma(\alpha)U$, de telle façon que $\alpha^{-1}(U^*) = \gamma(\alpha)U^*$).

Ainsi, $\gamma((\alpha^{-1})^0) = \overline{\gamma(\alpha)}$ de telle façon que si $\gamma(\alpha)^2 \neq 1$, α n'est même pas conjugué *extérieur* de $(\alpha^0)^{-1}$.

On a $\varepsilon(\alpha^0) = \varepsilon(\alpha^{-1})$ pour tout $\alpha \in \text{Int } R$, α périodique. Ainsi l'égalité $\varepsilon(\alpha^0) = \varepsilon(\alpha^{-1})$ est vérifiée par n'importe quel périodique $\alpha \in \text{Aut } R$ (parce que $(\alpha^0)^{p_m} = (\alpha^{p_m})^0$, $(\alpha^{-1})^{p_m} = (\alpha^{p_m})^{-1}$).

Donc 7.2 découle de 1.5 et on a les égalités :

$$p_0((\alpha^0)^{-1}) = p_0(\alpha), \quad \gamma((\alpha^0)^{-1}) = \overline{\gamma(\alpha)}, \quad \varepsilon((\alpha^0)^{-1}) = \varepsilon(\alpha).$$

En particulier si $\gamma(\alpha)^2 \neq 1$, α ne peut être conjugué extérieur d'un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie, parce que de tels automorphismes sont conjugués des opposés de leur inverse. Cela amène au :

Problème 7.3. Quels automorphismes $\alpha \in \text{Aut } R$, α périodique, sont conjugués (resp. conjugués extérieurs) d'un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie ? d'un produit tensoriel infini d'automorphismes intérieurs de facteurs arbitraires ?

Théorème 7.4. *Soit $\alpha \in \text{Aut } R$, un périodique, alors :*

(a) *Si α est un produit tensoriel infini d'automorphismes intérieurs $\text{Ad } U_j$ de facteurs finis R_j alors $\gamma(\alpha) = 1$.*[10]

(b) *Si $\gamma(\alpha) = 1$, α est le produit tensoriel d'un automorphisme intérieur de R par un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie.*

(c) *Soit α périodique de période p, avec $\gamma(\alpha) = 1$. Posons $p = qp_0(\alpha)$, supposons q premier, soit $\varepsilon = \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j \varepsilon(e^{i2\pi j/n})$ l'invariant intérieur de α. Alors α est un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie si et seulement si soit tous les λ'_j sont des nombres rationnels soit il sont tous $\neq 0$ ainsi que les $\widehat{\lambda}_k$:*

$$\widehat{\lambda}_k = \sum \lambda_j \text{exp} \frac{i2\pi jk}{n} \qquad k = 0, ..., q-1.$$

Démonstration. Peut être laissée au lecteur.

[10] Donc si $\gamma(\alpha) \neq 1$, α n'est pas conjugué extérieur d'un tel produit tensoriel.

On a le résultat général positif suivant concernant l'approximation des automorphismes périodiques de R par des automorphismes d'algèbres de von Neumann de dimension finie :

Théorème 7.5. *Soit α un automorphisme périodique de R, alors il existe une séquence croissante de sous-algèbres de dimension finie P_n de R telle que $\alpha(P_n) = P_n$ pour tout n et $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ est fortement dense dans R.*

Démonstration. D'abord prenons $p \in \mathbf{N}, \gamma \in \mathbf{C}, \gamma^p = 1$ et s_p^γ comme construit dans la partie 1. Considérons $P_n = (F_p^{(1,n)} \cup \{\theta^n(U_\gamma)\})''$ avec les notations de la proposition 1.6. Alors, comme $\alpha\theta^n(U_\gamma) = \gamma\theta^n(U_\gamma)$ avec $\alpha = s_p^\gamma$ et comme $\alpha(F_p^{(1,n)})$ est contenu dans l'algèbre engendrée par $F_p^{(1,n)}$ et $\theta^{n-1}(v_\gamma)$, i.e. par $F_p^{(1,n)}$ et $\theta^n(U_\gamma^*)$, on voit que P_n est globalement invariant par α pour tout n.

En ayant prouvé 7.5 pour les s_p^γ on a juste à prouver cela pour les automorphismes périodiques intérieurs et à conclure en utilisant 1.11.

Soit Ad U un automorphisme intérieur périodique de R, avec $U = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j e_j$ où $a_j \in \mathbf{C}, a_j^m = 1$ et les e_j sont des projections dans R.

Choisissons une séquence croissante de projections $f_n \in R$ commutant avec U, telle que pour chaque $n, j : \tau(f_n e_j)$ est un rationnel dyadique, et avec $f_n \to 1$ quand $n \to \infty$.

Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une séquence dense dans la boule unité de R (dense pour la topologie forte). Alors par induction sur n on construit une séquence $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où K_n est un sous-facteur de type $I_2 p_n$ de R_{f_n} contenant Uf_n de telle façon que $K_{n-1} + \mathbf{C}(f_n - f_{n-1}) \subset K_n$ et qu'il approxime le $f_n x_j f_n$ $(j = 1, ..., n)$ jusqu'à $\frac{1}{n}$ dans la norme trace.

Il s'ensuit de cela que la séquence $P_n = K_n + \mathbf{C}(1 - f_n)$ est croissante, qu'elle engendre R et que $UP_nU^* = P_n$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$. Q.E.D.

Problème 7.6. Quels automorphismes périodiques de R ont une racine carrée ?

Clairement, n'importe quel automorphisme intérieur de R a une racine carrée, et ainsi par 1.11 on voit qu'un périodique α avec invariants extérieurs (p, γ) a une racine carrée dans Aut R si s_p^γ en a une. Pour calculer $p_0(\alpha^2), \gamma(\alpha^2)$ on distingue deux cas :

(1) $p_0(\alpha)$ est impair. Alors α^{2q} est extérieur pour $q = 1, \dots, p_0(\alpha) - 1$ parce que $2q$ n'est pas un multiple de $p_0(\alpha)$. Donc :

$$p_0(\alpha^2) = p_0(\alpha), \qquad \gamma(\alpha^2) = \gamma(\alpha)^4.$$

(2) $p_0(\alpha)$ est pair. Alors $(\alpha^2)^{\frac{p_0(\alpha)}{2}}$ est intérieur et

$$p_0(\alpha^2) = \frac{1}{2}p_0(\alpha), \qquad \gamma(\alpha^2) = \gamma(\alpha)^2.$$

Théorème 7.7.[11] : *Soit* $p \in \mathbf{N}$, $\gamma \in \mathbf{C}, \gamma^p = 1$. *Si l'ordre de* γ *est impair, alors tout automorphisme périodique d'invariant extérieur* (p, γ) *a une racine carrée.*

Si l'ordre de γ est pair alors s_p^γ n'a pas de racine carrée.

Démonstration. Supposons que Ordre de $\gamma = 2q+1$. Appelons $\gamma' = \gamma^{-q}$, alors γ' est une racine de 1 d'un ordre divisant l'ordre de γ et $\gamma'^2 = \gamma^{-2q} = \gamma$. Ainsi $s_{2m}^{\gamma'}$ a une période divisant 2• période de s_p^γ. Comme $2p$ est pair, on a $p_0((s_{2p}^{\gamma'})^2) = p, \gamma((s_{2p}^{\gamma'})^2) = \gamma'^2 = \gamma$, et

$$(s_{2p}^{\gamma'})^{2p \text{ Ordre de } \gamma} = 1$$

Donc $(s_{2p}^{\gamma'})^2$ a des invariants extérieurs (p, γ) et un invariant intérieur trivial, de telle façon qu'il est conjugué de s_p^γ par le théorème 1.5. Par conséquent $s_p^\gamma \otimes \mathrm{Ad}\, U$ a une racine carrée pour tous les automorphismes intérieurs et le théorème 1.11 s'applique.

Si les racines carrées γ', γ'' de γ satisfont Ordre de γ' = Ordre de γ'' = 2 Ordre de γ, prenons α de telle façon que $\alpha^2 = s_p^\gamma$. Alors on doit avoir $p_0(\alpha) = 2p_0(\alpha^2)$ parce que $p_0(\alpha)$ doit être pair. Alors on a également $\gamma(\alpha)^2 = \gamma$, de telle façon que, disons $\gamma(\alpha) = \gamma'$. On a :

(période de α) est un multiple de (période de $s_{2p}^{\gamma'}$).

Par conséquent, comme (période de $s_{2p}^{\gamma'}$) $= 2p \cdot$ Ordre de $\gamma' = 4p \cdot$ Ordre de γ on voit qu'on ne peut pas avoir $\alpha^{2p \text{ Ordre de } \gamma} = 1$ comme requis par $\alpha^2 = s_p^\gamma$. Q.E.D.

Remarque 7.8. Dans Out R tout élément périodique a une racine $q^{\text{ième}}$ pour tout $q \in \mathbf{N}, q \neq 0$, parce que $(s_p^{\gamma q})^q$ est conjugué extérieur de s_{pq}^γ pour tout p, q et $\gamma, (\gamma^q)^p = 1$.

Remarque 7.9. Dans [2] H. Borchers étudie les automorphismes α des algèbres de von Neumann M et leurs relations avec les automorphismes intérieurs. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ il introduit une classe K_n d'automorphismes, et le théorème 4.1 de [2] énonce que, quand M est un facteur pour simplifier, (α^i est intérieur ssi $i = 0\ (n)$) $\iff \alpha \in K_n$.

Pourtant les automorphismes $s_p^\gamma, \gamma \neq 1$, donnent un contre-exemple à ce théorème parce que par [2] prop. 4.7, si $\alpha \in K_n$ alors α^n est de la forme Ad U avec $U \in M^\alpha$. (Dans les notations de [2] $U \in Z_0$ où (Déf. 2.1) Z_0 dénote le centre de l'algèbre point fixe.) Pourtant, si dans [2] on remplace partout le mot "intérieur" par "intérieur implémenté dans Z_0" alors tous les arguments continuent de s'appliquer.

Remarque 7.10. Dans le théorème 1 de [8], V. Ya Golodets énonce que le produit croisé du facteur R hyperfini II_1 par tout groupe cyclique d'automorphismes extérieurs est encore hyperfini. Ce théorème est vrai à partir de nos résultats ci-dessus. (Appliquer 7.5.) Pourtant la preuve donnée dans [8] ne marche pas. Pour voir cela, on prend les notations de [8]. L'automorphisme h de $\mathscr{M} = G \times M$ correspond à l'action duale de Takesaki, du générateur de G associé à ε (ε est une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de 1). En effet, dans $G_h \times \mathscr{M}$ le commutant du facteur de type I_n engendré par V_g et V_h est, par dualité, l'algèbre de von Neumann $\widetilde{\Pi}(M)$, où $\widetilde{\Pi}$ est un isomorphisme de M

[11]Clairement, n'importe quel $\alpha \in$ Aut R de période impaire, disons $2m+1$, a une racine carrée, notamment α^{m+1}.

dans $G_h \times \mathscr{M}$ défini par

$$\widetilde{\Pi}(x) = \sum \widehat{x}_q V_h^q, \quad x = \sum \widehat{x}_q, \quad g(\widehat{x}_q) = \varepsilon^q \widehat{x}_q.$$

Maintenant $\mathscr{M}$, comme sous-facteur de $G_h \times \mathscr{M}$, a $\mathbf{C}$ comme commutant relatif de telle sorte que le normalisateur de $\mathscr{M}$ dans $G_h \times \mathscr{M}$ consiste simplement en les unitaires de la forme vV_h^m unitaires dans $\mathscr{M}, 0 \leq m < n$.

Nous pouvons donc trouver un unitaire X dans $G_h \times \mathscr{M}$ qui commute avec V_g et V_h mais pour lequel $X\mathscr{M}X^* \neq \mathscr{M}$.

L'assertion dans [8] est que pour n'importe quel automorphisme φ de $G_h \times \mathscr{M}$ pour lequel $\varphi(W_1) = V_h, \varphi(W_2) = V_g$, la famille d'opérateurs $\varphi(W_2) = V_g, V_k = \varphi(W_k), \quad k = 3, 4, \ldots$ engendre $\mathscr{M}$.

Mais si cela est vrai pour un certain φ, remplaçons φ par $\varphi' = (\mathrm{Ad}\ X)\varphi$ avec X comme ci-dessus, alors certainement $\varphi'(W_1) = V_h, \varphi'(W_2) = V_g$, mais les $\varphi'(W_p)(p = 2, 3, 4, \ldots)$ engendrent $X\mathscr{M}X^*$ qui est différent de $\mathscr{M}$, de telle façon que la condition ne sera pas vérifiée pour φ'.

Bibliographie

[1] W. Arveson, On group of automorphisms of operator algebras, *J. Funct. Analysis*, **15** (1974), 217-243.

[2] H. Borchers, Characterization of inner * automorphisms of W^* algebras, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, **10** (1974), 11-50.

[3] E. Christensen, Perturbation of operator algebras, *I.S.B.N. Oslo Preprint Series* No. 14, July 74.

[4] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. E.N.S.*, (4) **6** (1973), 133-252.

[5] A. Connes, Almost periodic states and factors of type III_1, *J. Funct. Analysis*, **16** (1974), 415-445.

[6] J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2ed., Gauthier Villars (Paris, 1969).

[7] D. Mcduff, Central sequences and the hyperfinite factor, *Proc. London Math. Soc.*, 21 (1970), 443-461.

[8] V. Ya Golodets, On von Neumann's approximately finite algebras with finite trace, *Soviet Math. Dokl.*, **9** (1968), No. 4.

[9] R. Kallman, A decomposition theorem for automorphisms of von Neumann algebras, *Funct. Analysis*, Edited by C. O. Wilde, Academic Press (1970), pp. 33-35.

[10] S. Sakai, *C^* and W^* algebras* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 60), Springer-Verlag (Berlin Heidelberg-New York, 1971).

[11] J. P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presse Universitaire de France.

[12] Z. Takeda, On the extensions of finite factors. II, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1959), 215-220.

Paris VI U.E.R. 48
Laboratoire d'Analyse fonctionnelle