Opérateur de Dirac et gravitation

Daniel Kastler

Résumé : Nous donnons une démonstration directe du fait, annoncé par Alain Connes, que le résidu de Wodzicki du carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac est proportionnel à l'action d'Einstein-Hilbert de la relativité générale. Nous montrons que ceci est toujours vérifié par les opérateurs de Dirac twistés (e.g. par l'électrodynamique), et plus généralement, pour les opérateurs de Dirac appartenant aux connexions de Clifford des fibrés généraux de Clifford.

Récemment la géométrie non-commutative de Connes s'est montrée - à travers sa réinterprétation fascinante du modèle standard des particules élémentaires complet - être également pertinente pour l'étude de la gravitation. En effet, d'un côté, Alain Connes a fait l'observation qui est un réel défi [1] que le résidu de Wodzicki [2] de l'inverse du carré de l'opérateur de (Atiyah-Singer-Lichnérowicz) Dirac amène l'action de Einstein-Hilbert de la relativité générale.

Et de plus, il a travaillé sur une forme quantale de l'action de Polyakov des cordes [2] qui le reproduit dans le cas habituel d'une surface de Riemann, mais également a du sens pour les 4-variétés conformes, amenant alors une action conformellement invariante dont on espère qu'elle est reliée à la gravitation [3].

Dans cet article, nous nous intéressons au résidu de Wodzicki de D^{-2}. Nous calculons d'abord cet objet pour l'opérateur de Dirac pur (fabriqué avec la connexion de spin d'une variété riemannienne, cf. (1) ci-dessous) : nous obtenons alors, comme annoncé par Connes, un multiple de la courbure scalaire (Théorème [1] ci-dessous). Notre preuve est un calcul de force brute effectué dans des cas à coordonnées arbitraires.

Maintenant, puisque l'action d'Einstein-Hilbert et l'action du modèle standard sont toutes deux obtenues par des algorithmes basés sur la trace de Dixmier, on souhaite naturellement obtenir ces deux actions avec une seule procédure. Selon cette méthode, le premier objet naturel sur lequel travailler est le résidu de Wodzicki de $\mathbb{D}^{-2}$, $\mathbb{D}$ l'opérateur composé de Dirac construit avec le produit tensoriel de la connexion de spin σ_μ, et la $U(1)$-connexion de l'électrodynamique a_μ. Mais le calcul de cet objet (Proposition [2] ci-dessous) amène le même résultat que celui obtenu dans le Théorème [1] : la connexion a_μ sort du calcul. En fait, puisque notre calcul est basé sur la formule de Lichnérowicz pour le carré ou l'opérateur de Dirac qui est valable dans le cas des opérateurs de Dirac généraux qui tiennent à partir des connexions de Clifford sur les fibrés de Clifford, notre

Daniel Kastler :

1. Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy, Case 907, P-13288 Marseille Cedex 9, France.
2. Département de Physique, Faculté des Sciences de Luminy, Marseille Cedex, France.

Reçu le 1er Décembre 1993 / forme révisée le 29 Mars 1994.

Origine de l'article : *Communication in mathematical physics*, vol. 166, p.633-643, 1995.

Traduction d'un texte téléchargeable ici
https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-166/issue-3/The-Dirac-operator-and-gravitation/cmp/1104271706.full

Trad. Denise Vella-Chemla, mars 2021.

1. non publiée, mais mentionnée verbalement dans différents exposés.

2. Le résidu de Wodzicki est en fait l'unique (et par conséquent canonique) trace sur les opérateurs pseudo-différentiels (concentrés sur les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre la dimension de la variété).

3. Le travail du groupe de Zürich sur la gravitation en géométrie non-commutative est basé sur une approche différente reliée à l'algorithme de Yang-Mills [6].

résultat se généralise naturellement à ce contexte (Proposition [3] ci-dessous).

Nous concluons donc que les présents algorithmes de la géométrie non-commutative gérant les lagrangiens respectifs du monde de l'infiniment petit et du cosmos semblent (superficiellement) tendre à se repousser l'un l'autre : alors que a_μ sort du résidu de Wodzicki du carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac composé, σ_μ sort de l'algorithme de Yang-Mills non-commutatif [4].

0. Contexte et notations

Dans la suite de ce document, $\mathbf{M}$ est une variété riemannienne 4-dimensionnelle orientée de spins de métrique riemannienne g (avec la norme $\| \ \|$ et l'élément de volume dv). Nous rappelons que l'opérateur de Dirac D est localement donné comme suit en fonction d'une section orthonormale e_i (avec section duale θ^k) du fibré de $\mathbf{M}$: on a

$$\left\{ \begin{array}{l} D = i\gamma^i \widetilde{\nabla}_i = i\gamma^\imath (e_i + \sigma_i) \\ \text{avec} \quad \sigma_\imath(x) = \frac{1}{4}\gamma_{\imath j,k}(x)\gamma^j\gamma^k = \frac{1}{8}\gamma_{ij,k}(x)[\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j], \end{array} \right. \tag{1}$$

où les $\gamma_{ij,k}$ représentent la connexion de Levi-Civita ∇ avec connexion de spins $\widetilde{\nabla}$, spécifiquement

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma_{ij,k} = -\gamma_{ik,j} = \frac{1}{2}[c_{ij,k} + c_{ki,\jmath} + c_{k\jmath,\imath}], & i,j,k = 1,\ldots,4. \\ \text{avec} \quad \mathrm{c}_{ij}^k = \theta^k([e_i, e_\jmath]) & \end{array} \right. \tag{2}$$

Ici les γ^i sont des matrices auto-adjointes de Dirac telles que $\gamma^i\gamma^\jmath + \gamma^\jmath\gamma^\imath = \delta^{\imath\jmath}$. En fonction des coordonnées locales x^μ induisant l' alternative à 4 termes $\partial_\mu = S^\imath_\mu(x)e_i$ (de dual à quatre termes dx^μ), nous avons $\gamma^i e_i = \gamma^\mu\partial_\mu$, les γ^μ étant maintenant des matrices de Dirac x-dépendantes telles que $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu}$ (on utilise des indices ou exposants latins pour les $e_\imath$ de base et des indices ou exposants grecs pour les ∂_μ de base, le type des indices et exposants spécifiant le type des matrices de Dirac). La spécification de l'opérateur de Dirac dans la base grecque est la suivante : on a

$$\left\{ \begin{array}{l} D = i\gamma^\mu \widetilde{\nabla}_\mu = i\gamma^\mu(\partial_\mu + \sigma_\mu) \\ \text{avec} \quad \sigma_\mu(x) = S^i_\mu(x)\sigma_\imath(x). \end{array} \right. \tag{1a}$$

Dans ce qui suit, la notation D^{-1} fait référence à l'inverse modulo les opérateurs lisses.

Nous établissons d'abord ([1], voir aussi [3, p. 322]) :

1. Théorème. *La valeur du résidu de Wodzicki [4,4a] sur le carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac, notamment :*

$$I = 4\ \mathrm{Tr}_\omega\{\sigma_{-4}(x,\xi)\} \ = \ 4(2\pi)^{-4} \int\limits_{\xi\in S^3} \mathrm{tr}\{\sigma_{-4}(x,\xi)\} d^3\xi dv, \tag{3}$$

*(*tr *la trace de Clifford normalisée) où :*

$$\sigma_{-4}(x,\xi) = \ \textit{partie d'ordre} - 4 \textit{ du symbole total } \sigma(x,\xi) \textit{ de } D^{-2}, \tag{4}$$

coïncide à une constante près avec l'action de Hilbert-Einstein action $\int \mathscr{L}_g\ dv$ *de la relativité générale où*

4. En effet σ_μ sort des commutateurs $[D,a], a \in C^\infty(\mathbf{M})$.

$$\mathscr{L}_g = R_{\mu\nu} \wedge *(dx^\mu \wedge dx^\nu) \tag{5}$$

- *spécifiquement*

$$\mathscr{L}_g = \frac{1}{2} R_{ikmn}(dx^m \wedge dx^n, dx^i \wedge dx^k) = (g^{\imath m} g^{nk} - g^{in} g^{mk}) R_{ikmn} = s, \tag{5a}$$

s la courbure scalaire). On a $I = -\dfrac{1}{24\pi^2} \int \mathscr{L}_g dv$.

Nous rappelons la formule de Lichnérowicz pour le carré de l'opérateur de Dirac :

$$\begin{aligned} D^2 &= -g^{\mu\nu}(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha) + \tfrac{1}{4} s \\ &= -g^{\mu\nu}[\partial^x_\mu \partial^x_\nu + 2\sigma_\mu \, . \, \partial^x_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \partial^x_\alpha + \partial^x_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \sigma_\alpha] + \tfrac{1}{4} s. \end{aligned} \tag{6}$$

Nos calculs sont basés sur l'algorithme fournissant le symbole principal d'un produit d'opérateurs pseudo-différentiels en fonction des symboles principaux des facteurs, notamment, avec le raccourci $\partial^\alpha_\xi = \partial^\alpha / \partial \xi_\alpha, \partial^x_\alpha = \partial_\alpha / \partial x^\alpha$:

$$\sigma^{PQ}(x, \xi) = \textstyle\sum_\alpha \dfrac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi \sigma^P(x, \xi) \, . \, \partial^x_\alpha \sigma^Q(x, \xi). \tag{7}$$

Nous avons besoin de calculer le symbole total $\sigma(x, \xi)$ de D^{-2} à l'ordre -4, avec D^2 la somme suivante de termes $(D^2)_k$ d'ordre k :

$$D^2 = (D^2)_2 + (D^2)_1 + (D^2)_0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D^2)_2 = -g^{\mu\nu} \partial^x_\mu \partial^x_\nu \\ (D^2)_1 = -g^{\mu\nu}(2\sigma_\mu \, . \, \partial^x_\nu \; - \; \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \partial^x_\alpha) \\ (D^2)_0 = -g^{\mu\nu}(\partial^x_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \sigma_\alpha) + \frac{1}{4} s \end{array} \right. \tag{6a}$$

avec les symboles respectifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2(x, \xi) = g^{\mu\nu}(x) \xi_\mu \xi_\nu \\ \sigma_1(x, \xi) = i g^{\mu\nu}(x)[\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x) \xi_\alpha - 2\sigma_\mu(x) \xi_\nu] \\ \sigma_0(x, \xi) = -g^{\mu\nu}(x)(\partial^x_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \sigma_\alpha)(x) + \frac{1}{4} s(x) \end{array} \right. \tag{8}$$

abrégés comme suit, en utilisant le raccourci $\Gamma^\mu = g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2(x, \xi) = \|\xi\|^2 \\ \sigma_1(x, \xi) = i(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)(x) \xi_\mu \\ \sigma_0(x, \xi) = -(\partial^{x\mu} \sigma_\mu + \sigma^\mu \sigma_\mu - \Gamma^\mu \sigma_\mu)(x) + \frac{1}{4} s(x) \end{array} \right. \tag{8a}$$

Nous voulons calculer une paramétrique D^{-2} de D^2 jusqu'à l'ordre -4 en utilisant la recette suivante : cela revient à calculer les parties $\sigma_k, k = 2, 3, 4$, dans le développement du symbole complet σ de D^{-2} en termes d'ordre décroissant :

$$\sigma^{D^{-2}} = \sigma = \sigma_{-2} + \sigma_{-3} + \sigma_{-4} + \text{ termes d'ordre } \leqslant -5. \tag{9}$$

L'application de (7) avec $P = D^2$ et $Q = D^{-2}$ amène aux ordre respectifs 0, -1, -2 les relations de récurrence :

$$\sigma_2\sigma_{-2} = 1 \tag{10}$$

$$\sigma_2\sigma_{-3} + \sigma_1\sigma_{-2} - i\partial_\xi^\mu\sigma_2 \,.\, \partial_\mu^x\sigma_{-2} = 0 \tag{11}$$

$$\sigma_2\sigma_{-4} + \sigma_1\sigma_{-3} + \sigma_0\sigma_{-2} - i\partial_\xi^\mu\sigma_2 \,.\, \partial_\mu^x\sigma_{-3} - i\partial_\xi^\mu\sigma_1 \,.\, \partial_\mu^x\sigma_{-2} - \tfrac{1}{2}\partial_\xi^{\mu\nu}\sigma_2 \,.\, \partial_{\mu\nu}^x\sigma_{-2} = 0 \tag{12}$$

ici les termes pertinents sont lus dans les tableaux de produits ci-dessous $\partial_\xi^\alpha\sigma_p(x,\xi) \,.\, \partial_\alpha^x\sigma_q(x,\xi)$:

$|\alpha| = 0$

	σ_2	σ_1	σ_0
σ_{-2}	0	-1	-2
σ_{-3}	-1	-2	-3
σ_{-4}	-2	-3	-4

$|\alpha| = 1$

	σ_2	σ_1	σ_0
σ_{-2}	-1	-2	-3
σ_{-3}	-2	-3	-4
σ_{-4}	-3	-4	-5

$|\alpha| = 2$

	σ_2	σ_1	σ_0
σ_{-2}	-2	-3	-4
σ_{-3}	-3	-4	-5
σ_{-4}	-4	-5	-6

Avec les σ_k comme en (8a), on obtient :

$$\sigma_{-2} = \|\xi\|^{-2}, \qquad (10a)$$

$$\|\xi\|^2\sigma_{-3} + i\|\xi\|^2(\Gamma^\mu - 2\sigma^>\mu)\xi_\mu - i\partial_\xi^\mu\|\xi\|^2 \,.\, \partial_\mu^x\|\xi\|^2 = 0, \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}
&\|\xi\|^2\sigma_{-4} + i(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)\xi_\mu\sigma_{-3} - \|\xi\|^2[(\partial^{x\mu}\sigma_\mu + \sigma^\mu\sigma_\mu - \Gamma^\mu\sigma_\mu) \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}\|\xi\|^2 s(x) - i\partial_\xi^\mu\|\xi\|^2 \,.\, \partial_\mu^x\sigma_{-3} + (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu)\delta_\nu^\mu \,.\, \partial_\mu^x\|\xi\|^{-2} \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}\partial_\xi^{\mu\nu}\|\xi\|^2 \,.\, \partial_{\mu\nu}^x\|\xi\|^{-2}] = 0.
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^\mu\|\xi\|^2 \quad &= 2\xi^\mu, \partial_\xi^\mu\|\xi\|^{-2} = -2\|\xi\|^{-4}\xi^\mu, \partial_\xi^\mu\|\xi\|^{-4} = -4\|\xi\|^{-6}\xi^\mu, \partial_\xi^\mu\|\xi\|^{-6} = -6\|\xi\|^{-8}\xi^\mu, \\
\partial_\mu^x\|\xi\|^2 \quad &= \xi^\alpha\xi^\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \partial_\mu^x\|\xi\|^{-2} = -\|\xi\|^{-4}\xi_\alpha\xi_\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \partial_\mu^x\|\xi\|^{-6} = -3\|\xi\|^{-8}\xi_\alpha\xi_\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \\
\partial_\xi^{\mu\nu}\|\xi\|^2 \quad &= 2g^{\mu\nu}, \qquad (13) \\
\partial_{\mu\nu}^x\|\xi\|^{-2} \quad &= -\|\xi\|^{-4}\xi_\alpha\xi_\beta\partial_{\mu\nu}^x g^{\alpha\beta} + 2\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}\xi_\gamma\xi_\delta\partial_\nu^x g^{\gamma\delta},
\end{aligned}$$

on obtient

$$i\sigma_{-3} = \|\xi\|^{-4}\xi_\mu(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) + 2\|\xi\|^{-6}\xi^\mu\xi_\alpha\xi_\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \tag{11b}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma_{-4} \quad &= -i\|\xi\|^{-2}(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)\xi_\mu\sigma_{-3} + \|\xi\|^{-4}(\partial^{x\mu}\sigma_\mu + \sigma^\mu\sigma_\mu - \Gamma^\mu\sigma_\mu) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\|\xi\|^{-4}s(x) + 2i\|\xi\|^{-2}\xi^\mu \,.\, \partial_\mu^x\sigma_{-3} + \|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)\partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\|\xi\|^{-2}\partial_\xi^{\mu\nu}\|\xi\|^2 \,.\, \partial_{\mu\nu}^x\|\xi\|^{-2} \\
&= -\|\xi\|^{-6}\xi_\mu\xi_\nu(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)(\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu) \\
&\quad -2\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi_\nu\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu)\partial_\mu^x g^{\alpha\beta} + \|\xi\|^{-4}(\partial^{x\mu}\sigma_\mu + \sigma^\mu\sigma_\mu - \Gamma^\mu\sigma_\mu) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\|\xi\|^{-4}s(x) - 2i\|\xi\|^{-2}\xi^\mu \,.\, \partial_\mu^x\sigma_{-3} + \|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)\partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \\
&\quad -\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}^x g^{\alpha\beta} + 2\|\xi\|^{-8}\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}\partial_\nu^x g^{\gamma\delta}.
\end{aligned} \tag{12b}$$

En regroupant les termes et en insérant

$$\begin{aligned}i\partial^x_\mu\sigma_{-3} \ &= -2\|\xi\|^{-6}\xi_\nu\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\nu-2\sigma^\nu)\partial^x_\mu g^{\alpha\beta}+\|\xi\|^{-4}\xi_\nu\partial^x_\mu(\Gamma^\nu-2\sigma^\nu)\\ &\quad -6\|\xi\|^{-8}\xi^\nu\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_\mu g^{\alpha\beta}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta}+2\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_\mu g^{\nu\alpha}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta}\\ &\quad +2\|\xi\|^{-6}\xi^\nu\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_{\mu\nu}g^{\gamma\delta},\end{aligned} \tag{14}$$

nous obtenons pour σ_{-4} la somme de termes :

$$\begin{aligned}
A \ &= -\|\xi\|^{-6}\xi_\mu\xi_\nu\Gamma^\mu\Gamma^\nu+\|\xi\|^{-4}[g_{\mu\nu}-4\|\xi\|^{-2}\xi_\mu\xi_\nu][\sigma^\mu\sigma^\nu-\Gamma^\nu\sigma^\nu],\\
B \ &= \|\xi\|^{-4}\partial^{x\mu}\sigma_\mu-\tfrac{1}{4}\|\xi\|^{-4}s,\\
C \ &= -6\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi_\nu\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\nu-2\sigma^\nu)\partial^x_\mu g^{\alpha\beta},\\
D \ &= 2\|\xi\|^{-6}\xi^\mu\xi_\nu\partial^x_\mu(\Gamma^\nu-2\sigma^\nu),\\
E \ &= -12\|\xi\|^{-10}\xi^\mu\xi^\nu\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_\mu g^{\alpha\beta}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta},\\
F \ &= 4\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi_\alpha\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_\mu g^{\nu\alpha}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta},\\
G \ &= \|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\mu-2\sigma^\mu)\partial^x_\mu g^{\alpha\beta},\\
H \ &= 4\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi^\nu\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_{\mu\nu}g^{\gamma\delta},\\
K \ &= -\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta g^{\mu\nu}\partial^x_{\mu\nu}g^{\alpha\beta},\\
L \ &= 2\|\xi\|^{-8}\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\delta g^{\mu\nu}\partial^x_\mu g^{\alpha\beta}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Nous devons prendre la trace de Clifford et intégrer sur la sphère S^3 (procédures de commutation). Grâce à (1a), tous les termes linéaires en σ_μ s'évanouissent sous la trace de Clifford. Nous procédons à l'intégration sur S^3, en utilisant les faits suivants : nous avons, en utilisant le raccourci $\displaystyle\int=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\xi\in S^3}d^3v$:

$$\left\{\begin{aligned}&\textstyle\int\xi^\mu\xi^\nu=\dfrac{1}{4}[^{\mu\nu}]\\ &\textstyle\int\xi^\mu\xi^\nu\xi^\alpha\xi^\beta=\dfrac{1}{3\,.\,2^3}[^{\mu\nu\alpha\beta}]\\ &\textstyle\int\xi^\mu\xi^\nu\xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma\xi^\delta=\dfrac{1}{3\,.\,2^6}[^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta}]\end{aligned}\right. \tag{16}$$

où $[^{\mu\nu\cdots\gamma\delta}]$ représente la somme des produits des $g^{\alpha\beta}$ déterminés par tous les "appariements" de $\mu\nu\ldots\gamma\delta$. En faisant la moyenne sur S^3, les termes qui subsistent dans (15) amènent à (nous écrivons maintenant ∂_μ à la place de ∂^x_μ sans risque de confusion, et nous utilisons le fait qu'on a, $\cong$ indiquant l'équivalence quand on multiplie par l'expression symétrique en $\alpha\beta$, et γ, δ) :

$$[^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}]\cong g^{\mu\nu}[_{\alpha\beta\gamma\delta}]+2\delta^\mu_\alpha[^\nu{}_{\beta\gamma\delta}]+2\delta^\mu_\gamma[^\nu{}_{\alpha\beta\delta}], \tag{17}$$

nous obtenons les termes [5] :

$$
\begin{aligned}
A &\to -\frac{1}{4}[_{\mu\nu}]\Gamma^\mu\Gamma^\nu = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\Gamma^\mu\Gamma^\nu, \\
B &\to -\frac{1}{4}s, \\
C &\to -6\frac{1}{3.2^3}[^\mu{}_{\nu\alpha\beta}]\Gamma^\nu\partial_\mu g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\Gamma^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Gamma^\nu g_{\nu\beta}\partial_\mu g^{\mu\beta}, \\
D &\to 2\frac{1}{4}[^\mu{}_\nu]\partial_\mu\Gamma^\nu = \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\partial_\mu\Gamma^\nu = \frac{1}{2}\partial_\mu\Gamma^\mu, \\
E &\to -12\frac{1}{3\ .\ 2^6}[^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta} \\
&\quad = -\frac{1}{16}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta} - \frac{1}{8}g^{\mu\nu}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}\partial_\nu g^{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\gamma\delta} \\
&\qquad -\frac{1}{8}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu g^{\gamma\delta} - \frac{1}{4}g_{\beta\delta}\partial_\mu g^{\mu\beta}\partial_\nu g^{\nu\delta} \\
&\qquad -\frac{1}{4}g_{\beta\delta}\partial_\mu g^{\nu\beta}\partial_\nu g^{\mu\delta} - \frac{1}{8}g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\mu\nu}, \\
F &\to 4\frac{1}{3\ .\ 2^3}[^\mu{}_{\alpha\gamma\delta}]\partial_\mu g^{\nu\alpha}\partial_\nu g^{\gamma\delta} \\
&\quad = \frac{1}{6}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu g^{\gamma\delta} + \frac{1}{3}g_{\alpha\delta}\partial_\mu g^{\nu\alpha}\partial_\nu g^{\mu\delta}, \\
G &\to \frac{1}{4}[_{\alpha\beta}]\Gamma^\mu\partial_\mu g^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\Gamma^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}, \\
H &\to 4\frac{1}{3\ .\ 2^3}[^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta}]\partial_{\mu\nu}g^{\gamma\delta} = \frac{1}{6}[g^{\mu\nu}g_{\gamma\delta} + 2\delta^\mu_\gamma\delta^\nu_\delta]\partial_{\mu\nu}g^{\gamma\delta}, \\
K &\to -\frac{1}{4}[_{\alpha\beta}]g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}, \\
L &\to 2\frac{1}{3\ .\ 2^3}g^{\mu\nu}[_{\alpha\beta\gamma\delta}]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta} \\
&\quad = \frac{1}{12}g^{\mu\nu}[g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + 2g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Nous convertissons maintenant en les expressions suivantes dans lesquelles les dérivées partielles

5. Un compte-rendu ligne par ligne de ces calculs est disponible dans le rapport de recherche marseillais CPT-93/P.2970.

agissent sur les $g^{\alpha\beta}$ avec exposants[6]) :

$$\begin{cases} U & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} \\ X & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} \\ hhG & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\sigma\tau}\partial_{\alpha}g_{\beta\sigma}\partial_{\gamma}g_{\delta\tau} \\ ghH & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\sigma\tau}\partial_{\alpha}g_{\beta\sigma}\partial_{\tau}g_{\gamma\delta} \\ gg\Delta & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\sigma\tau}\partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}\partial_{\tau}g_{\gamma\delta} \\ GHH & = g^{\mu\sigma}g^{\alpha\eta}g^{\xi\beta}\partial_{\mu}g_{\eta\xi}\partial_{\alpha}g_{\beta\sigma} \\ \Delta GG & = g^{\mu\sigma}g^{\alpha\eta}g^{\xi\beta}\partial_{\mu}g_{\eta\xi}\partial_{\sigma}g_{\alpha\beta} \end{cases} , \tag{19}$$

où g, G, h, H, Δ, dénotent les contractions entre les paires d'indices suivantes : indices des lettres g (identiques ou différentes), indices des lettres g et ∂ (proche ou éloigné), indices des lettres ∂ et ∂.

En utilisant les faits :

$$\Gamma^{\mu} = g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\sigma}\Gamma_{\alpha\beta,\sigma} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\sigma}[\partial_{\alpha}g_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}\partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}], \tag{20}$$

et

$$\partial_{\mu}g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}\partial_{\mu}g_{\sigma\tau} \quad , \qquad g_{\alpha\gamma}\partial_{\mu}g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}\partial_{\mu}g_{\alpha\gamma} \quad , \tag{21}$$

nous obtenons :

$$A \;\to -\frac{1}{4}hhG + \frac{1}{4}ghH - \frac{1}{16}gg\Delta, \tag{22}$$

$$C \;\to \frac{1}{2}hhG - \frac{1}{8}gg\Delta, \tag{23}$$

$$D \;\to \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}U - \frac{1}{2}hhG + \frac{1}{4}ghH - \frac{1}{2}GHH + \frac{1}{4}\Delta GG, \tag{24}$$

$$E \;\to -\frac{1}{4}ghH - \frac{1}{4}hhG - \frac{1}{16}gg\Delta - \frac{1}{8}\Delta GG - \frac{1}{4}GHH, \tag{25}$$

$$F \;\to \frac{1}{6}ghH + \frac{1}{3}GHH, \tag{26}$$

$$G \;\to -\frac{1}{4}ghH + \frac{1}{8}gg\Delta, \tag{27}$$

$$H \;\to -\frac{1}{6}U - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\Delta GG + \frac{1}{3}GHH + \frac{1}{3}hhG, \tag{28}$$

$$K \;\to \frac{1}{4}U - \frac{1}{2}\Delta GG, \tag{29}$$

$$L \;\to \frac{1}{12}gg\Delta + \frac{1}{6}\Delta GG. \tag{30}$$

La somme de ces termes est égale à :

$$-\frac{1}{6}\left[U - X + hhG - ghH + \frac{1}{4}gg\Delta + \frac{1}{2}GHH + \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{6}s, \tag{31}$$

6. indices en haut

qui, ajouté à la contribution $-\dfrac{1}{4}s$ du terme B, amène au Théorème [1].

Nous étudions maintenant le cas des opérateurs de Dirac [5]. Soit $\mathbf{M}$ une variété riemannienne compacte, en dénotant par $\mathbb{C}l_M$ l'ensemble des sections lisses du fibré vectoriel avec la fibre sur $x \in \mathbf{M}$ l'algèbre de Clifford sur l'espace cotangent de x (une algèbre complexe $\mathbb{Z}/2$-échelonnée et $C^\infty(\mathbf{M})$-module), nous considérons maintenant un fibré vectoriel lisse additionnel $\mathscr{V}$ sur $\mathbf{M}$ (avec $C^\infty(\mathbf{M})$-module de sections lisses W), équipé d'une connexion $\nabla^{\mathscr{V}}$, avec tenseur de courbure correspondant $R^{\mathscr{V}}$. Nous considérons le fibré vectoriel produit tensoriel $S \otimes \mathscr{V}$ [avec $C^\infty(\mathbf{M})$-module de sections lisses $\mathbb{S}_{\mathbf{M}} \otimes w$] qui devient un *fibré de Clifford* à travers la définition :

et que nous équipons avec la *connexion composée* :

$$\overline{\nabla}_\xi = \widetilde{\nabla}_\xi \otimes \mathrm{id}_w + \mathrm{id}_{\mathbb{S}_M} \otimes \nabla^{\mathscr{V}}_\xi, \qquad \xi, \eta \in \chi(\mathbf{M}), \tag{33}$$

la dernière devenant une *connexion de Clifford* au sens où :

où ∇ est la connexion de $\mathbb{C}l_{\mathbf{M}}$ induite par la connexion de Levi-Civita de $\mathbf{M}$. L'*opérateur de Dirac twisté* correspondant $\mathbb{D}$, et *le laplacien de connexion twisté* Δ sont alors respectivement localement spécifiés comme suit

$$\mathbb{D} = ic(dx^\mu)\overline{\nabla}_\mu, \tag{35}$$

et

$$\underline{\Delta} = -g^{\mu\nu}(\overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\overline{\nabla}_\alpha). \tag{36}$$

Nous avons les formules suivantes de Lichnérowicz pour le carré de l'opérateur de Dirac twisté :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2 &= \underline{\Delta} - \frac{1}{2}\mathbf{R}^{\mathscr{V}}(\partial_\mu, \partial_\nu)c(dx^\mu)c(dx^\nu) + \frac{1}{4}s \\ &= \underline{\Delta} - \frac{1}{2}\gamma(dx^\mu)\gamma(dx^\nu) \otimes \mathbb{R}^{\mathscr{V}}(\partial_\mu, \partial_\nu) + \frac{1}{4}s \otimes \mathrm{id}_w. \end{aligned} \tag{31}$$

2. Proposition. *Le résidu de Wodzicki de $\mathbb{D}^{-2}$ coïncide avec celui de D^{-2}, et amène ainsi à un multiple de l'action d'Einstein-Hilbert.*

Preuve. Dénotons par $a_\mu dx^\mu$ la connexion une-forme de la connexion $\nabla^{\mathscr{V}}$: la connexion une-forme de la connexion composée (33) se lit alors :

$$\overline{\sigma}_\mu = \sigma_\mu \otimes \mathrm{id}_w + id_{\mathbb{S}_M} \otimes a_\mu = \, ''\sigma_\mu + a_\mu'', \tag{33a}$$

le calcul du résidu de Wodzicki residue de $\mathbb{D}^{-2}$ est alors obtenu de celui de D^{-2} à travers les changements suivants :

$$\begin{cases} \sigma_\mu & \to \overline{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + a_\mu \\ s & \to \mathbb{S} = s - 2R^{\mathscr{V}}_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu, \end{cases} \tag{38}$$

avec les remplacements correspondant $A \to \mathbb{A}$ à $L \to \mathbb{L}$ que nous calculons maintenant. Le terme $\mathbb{A}$, obtenu de A à travers le changement $\sigma_\mu \to \overline{\sigma}_\mu$, s'évanouit comme le dernier dans l'intégration sur

S^3. Comme pour les autres termes, nous avons les changements suivants, qui amènent aux résultats indiqués après avoir pris la trace de Clifford et avoir intégré sur S^3 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} - B &= \|\xi\|^{-4}\partial^{x\mu}a_\mu + \frac{1}{2}\|\xi\|^{-4}R^{\mathscr{V}}_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \to \partial^\mu a_\mu, \\
\mathbb{C} - C &= 12\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi_\nu\xi_\alpha\xi_\beta a^\nu\partial^x_\mu g^{\alpha\beta} \to 12\frac{1}{3\,.\,2^3}[^\mu{}_{\nu\alpha\beta}]a^\nu\partial_\mu g^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}a^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta} + a^\nu g_{\nu\beta}\partial_\alpha g^{\alpha\beta}, \\
\mathbb{D} - D &= -4\|\xi\|^{-6}\xi^\mu\xi_\nu\partial^x_\mu a^\nu \to -\delta^\mu_\nu\partial_\mu a^\nu = -\partial_\mu a^\mu = -\partial_\mu(g^{\mu\nu}a_\nu) \\
&= -g^{\mu\nu}\partial_\mu a_\nu - a_\nu\partial_\mu g^{\mu\nu} = -\partial^\mu a_\mu - a_\nu\partial_\mu g^{\mu\nu}, \\
\mathbb{E} - E &= 0 \\
\mathbb{F} - F &= 0 \\
\mathbb{G} - G &= -2\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta a^\mu\partial^x_\mu g^{\alpha\beta} \to -\frac{1}{2}a^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}, \\
\mathbb{H} - H &= 0 \\
\mathbb{K} - K &= 0 \\
\mathbb{L} - L &= 0
\end{aligned} \tag{39}$$

qui s'additionnent en donnant zero.

En fait, le résultat ci-dessus peut être généralisé plus avant aux opérateurs de Dirac (twistés généralisés) appartenant aux connexions de Clifford des fibrés généraux de Clifford [5]. Dénotons par $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel $\mathbb{Z}/2$-échelonné sur $\mathbf{M}$, de $C^\infty(\mathbf{M})$-module de sections lisses $\mathbf{E}$: $\mathscr{E}$ est appelé un *fibré de Clifford* à chaque fois qu'il y a un homomorphisme d'algèbres complexes $\mathbb{Z}/2$-échelonnées $c : \mathbb{C}l_M \to \mathrm{End}_{C^\infty(\mathbf{M})}\mathbf{E}$. De plus, une connexion $\overline{\nabla}$ de $\mathscr{E}$ est appelée une *connexion de Clifford* à chaque fois que tous les $\overline{\nabla}_\xi, \xi \in \chi(\mathbf{M})$, sont pairs, et on a

$$[\overline{\nabla}_\xi, c(a)] = c(\nabla_\xi, c(a)] = c(\nabla_\xi a), \qquad a \in \mathbb{C}l_{\mathbf{M}}, \xi \in \chi(\mathbf{M}) \tag{34a}$$

(généralisant (34)). Ces éléments spécifient alors de la façon suivante un opérateur de Dirac généralisé $\mathbb{D}_{\overline{\nabla}}$:

$$\mathbb{D}^2_{\overline{\nabla}} = ic(dx^\mu)\overline{\nabla}_\mu \tag{35a}$$

(généralisant (35)) donnant naissance à la formule généralisée de Lichnérowicz

$$\mathbb{D}^2_{\overline{\nabla}} = \underline{\Delta} - \frac{1}{2}F^{\mathscr{E}/S}(\partial_\mu, \partial_\nu)c(dx^\mu)c(dx^\nu) + \frac{1}{4}s, \tag{37a}$$

où $F^{\mathscr{E}/S}$ est ce qu'on appelle la *courbure twistée* du fibré $\mathscr{E}$ [5, Proposition 3.43].

Le remplacement $R^{\mathscr{V}} \to F^{E/S}$ laisse alors le calcul ci-dessus inchangé, ce qui fait qu'on a :

3. Proposition. *Le résidu de Wodzicki de $\mathbb{D}^{-2}_{\overline{\nabla}}$ amène encore un multiple de l'action d'Einstein-Hilbert.*

Appendice. L'action d'Einstein-Hilbert. La courbure scalaire

Soit $\mathbf{M}$ une variété riemannienne 4-dimensionnelle de métrique g (induisant l'élément de volume dv et le produit scalaire $(.,.)$ sur les tenseurs), la connexion de Levi-Civita ∇ est définie comme suit par rapport aux coordonnées locales :

$$\nabla\partial_\imath = \Gamma^k_{\imath\jmath}\partial_k dx^\jmath \qquad \text{avec} \begin{cases} \Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{ij,m} \\ \Gamma_{\imath\jmath,m} = \frac{1}{2}[\partial_\imath g_{\jmath m} + \partial_\jmath g_{\imath m} - \partial_m g_{\imath\jmath}] \end{cases} \tag{A.1}$$

La courbure correspondante ∇^2 est la deux-forme avec les endomorphismes de valeurs du fibré tangent de $\mathbf{M}$ donnée localement par la matrice :

$$R^{\jmath}_{k} = d\omega^{j}_{k} + \omega^{j}_{s} \wedge \omega^{s}_{k} = \frac{1}{2} R^{j}_{kmn} dx^m \wedge dx^n, \tag{A.2}$$

explicitement donnée par :

$$R^{\imath}_{kmn} = \partial_m \Gamma^{i}{}_{nk} - \partial_n \Gamma^{i}{}_{mk} \Gamma^{i}{}_{ms} \Gamma^{s}{}_{nk} - \Gamma^{\imath}{}_{ns} \Gamma^{s}{}_{mk}, \tag{A.3}$$

et alternativement par :

$$\begin{aligned} R_{jkmn} = g_{\imath\jmath} R^{j}_{kmn} &= \frac{1}{2}\partial_m(\partial_k g_{nj} - \partial_j g_{nk}) - \frac{1}{2}\partial_n(\partial_k g_{mj} - \partial_j g_{mk}) \\ &\qquad + g_{st}\Gamma^{s}{}_{nj}\Gamma_{mk} - g_{st}\Gamma^{s}{}_{mj}\Gamma^{t}{}_{nk} \\ &= \frac{1}{2}\partial_m(\partial_k g_{nj} - \partial_j g_{nk}) - g_{st}\Gamma^{s}{}_{mj}\Gamma^{t}{}_{nk} - (m \leftrightarrow n). \end{aligned} \tag{A.4}$$

La courbure scalaire correspondante est

$$s = R^{mn}_{mn} = g^{m\jmath} g^{nk} R_{jkmn} = -(g^{mi} g^{nk} - g^{ni} g^{mk})[\partial_{mi} g_{nk} + g_{st}\Gamma^{s}{}_{mi}\Gamma^{t}{}_{nk}]. \tag{A.5}$$

En utilisant les raccourcis de (21), on a :

$$s = X - U - hhG + ghH - \frac{1}{4} gg\Delta - \frac{1}{2} GHH + \frac{3}{4}\Delta GG. \tag{A.6}$$

La *densité de l'action d'Einstein-Hilbert* est par définition :

$$L_g = R_{ik} \wedge *(dx^i \wedge dx^k) = \frac{1}{2} R_{ikmn}(dx^m \wedge dx^n) * (dx^i \wedge dx^k), \tag{A.7}$$

alternativement :

$$L_g = \mathscr{L}_g dv, \tag{A.8}$$

avec la densité lagrangienne

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{1}{2} R_{\imath kmn} g(dx^m \wedge dx^n, dx^\imath \wedge dx^k) = \frac{1}{2}(g^{\imath m} g^{nk} - g^{in} g^{mk}) R_{ikmn} \\ &= g^{\imath m} g^{nk} R_{\imath kmn} = R^{mn}_{mn} = s. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Note. Après avoir terminé ce travail, nous avions la visite à Marseille de Markus Walze et Wolfgang Kalau de Mayence (R.F.A.), qui nous ont rapporté un calcul analogue (en utilisant les coordonnées normales) amenant aux mêmes résultats.

Références

[1] Connes, A. : communication privée.

[2] Connes, A. : Non-commutative geometry and physics. Proceedings of the Les Houches School, 1992.

[3] Gilkey, P.B. : Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem. Mathematics Lecture Series 11. Publish or Perish 1984.

[4] Wodzicki, M. : Non-commutative residue, K-Theory, arithmetic and geometry. Yu. Manin (ed). Springer Lecture Notes in Mathematics 1289. Berlin, Heidelberg, New York : Springer 1987.

[4a] Kassel, C. : Le résidu non-commutatif (d'après M. Wodzicki. Séminaire Bourbaki, 41$^{\text{o}}$ année, 1988-89, n$^{\text{o}}$ 708.

[5] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M. : Heat kernels and Dirac operators. Grundlehren der'mathematischen Wissenschaften 298. Berlin, Heidelberg, New York : Springer 1991.

[6] Chamseddine, A.H., Felder, G., Fröhlich, J. : Gravity in non-commutative geometry., Commun. Math. Phys. 158, 205 (1993)

Communiqué par Alain Connes.

Erratum

Page 2
L.3 lire

$$I = 4\mathrm{Tr}_w\{s_{-4}(x,\xi)\} = (2p)^{-4}\int_{\xi\in\sum^3} \mathrm{tr}\{s_{-4}(x,\xi)\}\mathrm{d}^3\xi\ \mathrm{dv}, \tag{3}$$

L.9 lire

$$\mathscr{L}_g = R_{ikmn}(\mathbf{d}x^m\wedge\mathbf{d}x^n, \mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^k) = 2(g^{im}g^{nk} - g^{in}g^{mk})R_{ikmn} = 2\kappa, \tag{5a}$$

L.10 lire

$$I = \frac{1}{3\ .\ 2^5p^2}\kappa = \frac{1}{3\ .\ 2^6p^2}L_g$$

Page 3
L.-3

$$\text{à la place de } -\frac{1}{4}\|x\|^{-2}\kappa(x) \text{ lire } -\frac{1}{4}\|x\|^{-4}\kappa(x).$$

Page 11
L.-2

$$\text{à la place de } \frac{1}{4}\kappa \text{ lire } -\frac{1}{4}\kappa$$

Page 12
L.9 lire

$$= \Delta - \frac{1}{2}\underline{\gamma}(\mathrm{d}x^m)\underline{\gamma}(\mathrm{d}x^n)\otimes R^{\nu}(\partial_m,\partial_n) + \frac{1}{4}\kappa\otimes id_w.$$

L'erratum est téléchargeable ici https://cds.cern.ch/record/257106/files/P00019854.pdf.