

RIEMANN-ROCH POUR L'ANNEAU \mathbb{Z}
ALAIN CONNES, CATERINA CONSANI

Résumé : On montre que le fait de travailler sur la base absolue \mathbb{S} (la version catégorique du spectre de la sphère) au lieu de $\mathbb{S}[\pm 1]$ améliore notre formule de Riemann-Roch précédente pour $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$. La formule rend égales la caractéristique d'Euler (de valeur entière) du diviseur d'Arakelov et la somme du degré du diviseur (en utilisant les logarithmes en base 2) et du nombre 1, confirmant ainsi notre compréhension de l'anneau \mathbb{Z} comme un anneau de polynômes en une variable sur la base absolue \mathbb{S} , notamment $\mathbb{S}[X], 1 + 1 = X + X^2$.

1. Introduction

Dans [3], on a prouvé une formule de Riemann-Roch pour $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$ s'appliquant à toute extension sphérique $\mathbb{S}[\pm 1] := \mathbb{S}[\mu_{2,+}]$ de la base absolue \mathbb{S} . La preuve de ce résultat est basée sur le fait de voir l'anneau \mathbb{Z} comme un anneau de polynômes¹ avec des coefficients dans $\mathbb{S}[\pm 1]$ et le générateur $3 \in \mathbb{Z}$. Dans le présent article, on montre qu'en travaillant sur la base absolue \mathbb{S} elle-même, on obtient la formule suivante de Riemann-Roch.

Théorème 1.1. *Soit D un diviseur d'Arakelov sur $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$. Alors²*

$$(1.1) \quad \dim_{\mathbb{S}} H^0(D) - \dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = \left[\deg_2 D \right]' + 1.$$

Ici $[x]'$ dénote la fonction continue à droite qui coïncide avec la fonction *plafond*(x) pour $x > 0$ non entier, et avec $-\text{plafond}(-x)$ pour $x < 0$ non entier (voir la Figure 1).

La preuve de (1.1) suit les mêmes lignes que celles de la preuve de la formule de Riemann-Roch dans [3], et voit \mathbb{Z} comme un anneau de polynômes³ sur \mathbb{S} de générateur -2 . Cela améliore considérablement ce résultat précédent comme suit :

1. Le terme $\mathbf{1}_L$ faisant intervenir l'ensemble exceptionnel L dans la formule précédente est maintenant éliminé.
2. La formule (1.1) présente une analogie parfaite avec la formule de Riemann-Roch vérifiée par les courbes de genre 0.
3. Le diviseur canonique $K = -2\{2\}$ est de degré entier $\deg_2(K) = -2$.

Quand on travaille sur la base absolue \mathbb{S} , on est amené à une notion très naturelle de \mathbb{S} -module associé à un diviseur d'Arakelov comme expliqué dans la Section 2.

Recherche financée par la Fondation Simons.

AC : Collège de France, Paris, France.

IHÉS, Bures-sur-Yvette, France

CC : Département de mathématiques, Université Johns Hopkins, Baltimore, USA

Référence : <https://arxiv.org/pdf/2306.00456.pdf> .

¹Plus précisément tout entier peut être mis sous la forme $P(X)$ où P est un polynôme à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et $X = 3$, la présentation est donnée par $1 + 1 = X - 1$

²On utilise la notation $\deg_2 := \deg / \log 2$

³Tout entier peut être mis de manière unique sous la forme $P(X)$ où P est un polynôme à coefficients dans $\{0, 1\}$ et $X = -2$, la présentation est $1 + 1 = X + X^2$

2. Travailler sur la base absolue \mathbb{S}

On dénote par Γ^{op} l'opposée de la catégorie de Segal (voir [4] chap. 2 et [1]), elle a un objet k_+ pour chaque entier $k > 0$, l'ensemble pointé $\{*, 1, \dots, k\}$, et les morphismes sont des morphismes d'ensembles pointés. Les foncteurs covariants $\Gamma^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Sets}_*$ et leurs transformations naturelles déterminent la catégorie $\Gamma\mathfrak{Sets}_*$ des Γ -sets (aussi appelés \mathbb{S} -modules). Quand on travaille sur l'algèbre monoïdale sphérique $\mathbb{S}[\pm 1]$ du monoïde multiplicatif (pointé) $\{\pm 1\}$, le $\mathbb{S}[\pm 1]$ -module naturel associé à une norme sur un groupe abélien A est ($k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$(2.1) \quad \|HA\|_{\lambda}(k_+) := \{a \in A^k \mid \sum |a_j| \leq \lambda\}.$$

La formule ci-dessus s'applique en la place archimédienne, pour les sous-groupes $A \subset \mathbb{R}$ et avec $|\cdot|$ dénotant la valeur absolue euclidienne. Si $\mathbb{S}[\pm 1]$ est remplacé par la base \mathbb{S} , il y a une définition plus basique d'un \mathbb{S} -module associé à un sous-ensemble arbitraire $X \subset A$ contenant $0 \in A$.

Lemme 2.1. *Soit A un monoïde abélien avec $0 \in A$. Soit $X \subset A$ un sous-ensemble de A contenant 0 . La condition suivante définit un sous-foncteur du \mathbb{S} -module HA*

$$(2.2) \quad (HA)_X(k_+) := \{a \in A^k \mid \sum_Z a_j \in X, \forall Z \subset k_+\} \subset X^k.$$

Preuve : Par construction $(HA)_X(k_+)$ est un sous-ensemble de $HA(k_+)$ contenant le point de $a_j = 0, \forall j$. Soit $\phi : k_+ \rightarrow m_+$ une application préservant le point de base $*$, on montrera que $\phi_*((HA)_X(k_+)) \subset (HA)_X(m_+)$. Soit $a \in (HA)_X(k_+)$. Pour tout $\ell \in m_+, \ell \neq *$, on a

$$\phi_*(a)(\ell) = \sum_{\phi^{-1}(\ell)} a_j = \sum_{Z_{\ell}} a_j, \quad Z_{\ell} := \phi^{-1}(\ell).$$

Il découle de (2.2) que $\phi_*(a)(\ell) \in X$ pour tout ℓ et ceci pour tout sous-ensemble pointé $Z' \subset m_+$

$$\sum_{\ell \in Z'} \phi_*(a)(\ell) = \sum_Z a_j \in X, \quad Z = \cup_{\ell \in Z'} Z_{\ell}.$$

Cela prouve que $\phi_*((HA)_X(k_+)) \subset (HA)_X(m_+)$. □

La proposition suivante montre que pour $X = [-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$ un intervalle symétrique, le \mathbb{S} -module $(H\mathbb{R})_X$ est un module sur la \mathbb{S} -algèbre $\|H\mathbb{R}\|_1$.

Proposition 2.2. *Soit $\lambda > 0$, $X = [-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$ un intervalle symétrique et $(H\mathbb{R})_X$ comme dans (2.2). Alors*

$$(2.3) \quad (H\mathbb{R})_X(k_+) = \{a \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{a_j > 0} a_j \leq \lambda, \sum_{a_j < 0} (-a_j) \leq \lambda\}$$

De plus, l'action de modules de la \mathbb{S} -algèbre $H\mathbb{R}$ sur elle-même par multiplication induit une action de la \mathbb{S} -algèbre $\|H\mathbb{R}\|_1$ sur le module $(H\mathbb{R})_X$.

Preuve : La condition (2.3) est remplie par tous les éléments de $(H\mathbb{R})_X(k_+)$ puisqu'elle fait intervenir des sommes sur les sous-ensembles de k_+ . Inversement si $a \in \mathbb{R}^k$ vérifie (2.3), soit $Z \subset k_+$, appelons

$$Z_+ := \{j \in Z \mid a_j > 0\}, \quad Z_- := \{j \in Z \mid a_j < 0\}$$

On a $0 \leq \sum_{Z_+} a_j \leq \lambda$, $0 \geq \sum_{Z_-} a_j \geq -\lambda$ et par conséquent $-\lambda \leq \sum_Z a_j \leq \lambda$.

Pour prouver la seconde assertion, soit $Y = k_+, Y' = k'_+$ des ensembles finiment pointés et considérons l'application donnée par le produit

$$m : \|H\mathbb{R}\|_1(Y) \wedge (H\mathbb{R})_X(Y') \rightarrow (H\mathbb{R})(Y \wedge Y')$$

Elle associe à $(\alpha_i) \in \|\mathbb{H}\mathbb{R}\|_1(Y)$, $\sum |\alpha_i| \leq 1$ et $(a_j) \in (\mathbb{H}\mathbb{R})_X(Y')$ la double indexation $b := (b_{i,j})$, $b_{i,j} = \alpha_i a_j$ et on a besoin de montrer que $b \in (\mathbb{H}\mathbb{R})_X(Y \wedge Y')$. Soit

$$Y_+ = \{i \in Y \mid \alpha_i > 0\}, Y_- = \{i \in Y \mid \alpha_i < 0\}, Y'_+ = \{j \in Y' \mid a_j > 0\}, Y'_- = \{j \in Y' \mid a_j < 0\}$$

Par la règle des signes, les couples (i, j) pour lesquels $b_{i,j} > 0$ forment l'union $Y_+ \times Y'_+ \cup Y_- \times Y'_-$ de telle façon qu'on obtient

$$\sum_{b_{i,j} > 0} b_{i,j} = \sum_{Y_+ \times Y'_+} \alpha_i a_j + \sum_{Y_- \times Y'_-} (-\alpha_i)(-a_j) = \sum_{Y_+} \alpha_i \sum_{Y'_+} a_j + \sum_{Y_-} (-\alpha_i) \sum_{Y'_-} (-a_j) \leq \lambda$$

en utilisant (2.3) pour les sommes sur les a_j ainsi que l'inégalité $\sum_{Y_+} \alpha_i + \sum_{Y_-} (-\alpha_i) \leq 1$ (puisque $\sum |\alpha_i| \leq 1$). On traite de manière similaire la somme sur les $b_{i,j}$ négatifs. \square

En général, soit $\sigma \in \text{Hom}_{\Gamma^{\text{op}}}(k_+, 1_+)$ avec $\sigma(\ell) = 1 \forall \ell \neq *$ et $\delta(j, k) \in \text{Hom}_{\Gamma^{\text{op}}}(k_+, 1_+)$, $\delta(j, k)(\ell) := 1$ si $\ell = j$, $\delta(j, k)(\ell) := *$ if $\ell \neq j$.

Étant donné un \mathbb{S} -module \mathcal{F} et des éléments $x, x_j \in (1_+)$, $j = 1, \dots, k$, on écrit

$$(2.4) \quad x = \sum_j x_j \iff \exists z \in (k_+) \text{ s.t. } (\sigma)(z) = x, (\delta(j, k))(z) = x_j, \forall j.$$

Une relation de tolérance \mathcal{R} sur un ensemble X est une relation réflexive et symétrique sur X . De façon équivalente, \mathcal{R} est un sous-ensemble $\mathcal{R} \subset X \times X$ qui est symétrique et qui contient la diagonale. On dénotera par \mathcal{T} la catégorie des relations de tolérance (X, \mathcal{R}) . Les morphismes dans \mathcal{T} sont définis par

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}((X, \mathcal{R}), (X', \mathcal{R}')) := \{\phi : X \rightarrow X', \phi(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}'\}.$$

On dénote par \mathcal{T}_* la catégorie pointée sous l'objet $\{*\}$ munie de la relation triviale. Un \mathbb{S} -module tolérant est un foncteur covariant pointé $\Gamma^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{T}_*$ ([3]). On rappelle ci-dessous la définition de leur dimension.

Définition 2.1 [3] Soit (E, \mathcal{R}) un \mathbb{S} -module tolérant. Un sous-ensemble $F \subset E(1_+)$ engendre $E(1_+)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites

1. $\forall x, y \in F, x \neq y \implies (x, y) \notin \mathcal{R}$
2. Pour tout $x \in E(1_+)$, il existe $\alpha_j \in \{0, 1\}$, $j \in F$ et $y \in E(1_+)$ tel que $y = \sum_F \alpha_j j \in E(1_+)$ au sens de (2.4), et $(x, y) \in \mathcal{R}$.

La dimension $\dim_{\mathbb{S}}(E, \mathcal{R})$ est définie comme la cardinalité minimale d'un ensemble générateur F .

3. Dimension de H^0 sur \mathbb{S}

Soit $m \in \mathbb{N}$, et $I_m = [-m, m] \cap \mathbb{Z}$. Le prochain lemme découle de (2.4) et de la définition 2.1.

Lemme 3.1. *La dimension $\dim_{\mathbb{S}}((\mathbb{Z})_{I_m})$ est la plus petite cardinalité d'un sous-ensemble $G \subset I_m$ tel que pour tout $j \in I_m$, il existe un sous-ensemble $Z \subset G$ avec $\sum_Z i = j$ et $\sum_{Z'} i \in I_m$ pour tout $Z' \subset Z$.*

Le nombre d'éléments de I_m est $2m+1$ et le nombre de sous-ensembles de G is $2^{\#G}$, par conséquent, on a les inégalités de base

$$(3.1) \quad \#G \geq \log_2(2m+1) > \log_2(2m), \quad \dim_{\mathbb{S}}((\mathbb{Z})_{I_m}) \geq \lceil \log_2(m) \rceil + 1.$$

Ici $x \mapsto \lceil x \rceil$ dénote la fonction plafond qui associe à x le plus petit entier $> x$. Pour $m = 1$ on a besoin de deux éléments générateurs $\{-1, 1\}$, alors que pour $m = 2$ on choisit les trois éléments $\{-2, 1, 2\}$. Pour $m = 3$ on prend les trois éléments $\{-3, 1, 2\}$ alors que pour $m = 4$, on prend les 4 éléments $\{-3, -1, 1, 3\}$.

En général, on utilise le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I := [-a, a] \subset \mathbb{Z}$, où $2^{n-1} \leq a < 2^n$.*

- (i) *Si $n > 4$, il existe n éléments distincts $\alpha_j \in (0, a)$ tels que $\sum \alpha_j = a$ et tels que tout élément $z \in [0, a]$ peut s'écrire comme une somme partielle $z = \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_j$.*
- (ii) *Le nombre minimal de \mathbb{S} -générateurs de $(H\mathbb{Z})_I$ est $n + 1$.*

Preuve :

- (i) On a $\sum_0^{n-1} 2^j = 2^n - 1 \geq a$ et $\sigma := \sum_0^{n-2} 2^j = 2^{n-1} - 1 < a$. L'idée est d'adjoindre à l'ensemble $T := \{2^j \mid 0 \leq j \leq n-2\}$, dont la cardinalité est $n-1$ et dont la somme est $\sigma < a$, un autre élément $a - \sigma$ de telle façon que la somme complète soit a . Le premier essai consiste à prendre $F = T \cup \{a - \sigma\}$. Supposons d'abord que $a - \sigma \notin T$. Les sommes partielles obtenues à partir de F sont l'union de l'intervalle $[0, \sigma]$ et de l'intervalle $[a - \sigma, a]$ et ces deux intervalles couvrent $[0, a]$, puisque $a - \sigma + \sigma = a$ alors que $a - \sigma \leq \sigma + 1$. Si $a - \sigma \in T$, on a pour un certain $k \geq 0$ que $a = \sigma + 2^k$. Pour éviter la répétition, on adopte les règles suivantes pour $2^{n-1} \leq a < 2^n$

1. Si $a = 2^{n-1}$, on pose $F := \{2^j \mid 0 \leq j \leq n-3\} \cup \{2^{n-2} - 2\} \cup \{3\}$
2. Si $a \neq 2^{n-1}$ et $a - \sigma \in T$, on pose $F := \{2^j \mid 0 \leq j \leq n-3\} \cup \{2^{n-2} - 1\} \cup \{a - \sigma + 1\}$
3. Si $a \neq 2^{n-1}$ et $a - \sigma \notin T$, on pose $F := T \cup \{a - \sigma\}$

Puisque par hypothèse $n > 4$, on a $2^{n-2} - 2 > 2^{n-3}$, donc dans le cas 1, on obtient $\#F = n$ et la somme des éléments de F est $a = 2^{n-1}$. Les sommes partielles des éléments de $\{2^j \mid 0 \leq j \leq n-3\}$ couvrent l'intervalle $J = [0, 2^{n-2} - 1]$. En ajoutant $2^{n-2} - 2$ aux éléments de J , on obtient l'intervalle $J + 2^{n-2} - 2 = [2^{n-2} - 2, 2^{n-1} - 3]$ dont l'union avec J est $[0, 2^{n-1} - 3]$, alors en mettant l'élément $3 \in F$, on voit que les sommes partielles couvrent $[0, a]$.

Dans le cas 2, on obtient de façon similaire $\#F = n$ puisque $a - \sigma + 1 \notin T$ et la somme des éléments de F est $\sigma + a - \sigma = a$. Les sommes partielles d'éléments de $\{2^j \mid 0 \leq j \leq n-3\}$ couvrent l'intervalle $J = [0, 2^{n-2} - 1]$ et en utilisant $2^{n-2} - 1$ ajouté aux éléments de J , on obtient l'intervalle $J + 2^{n-2} - 1 = [2^{n-2} - 1, 2^{n-1} - 2]$ dont l'union avec J est $J' = [0, 2^{n-1} - 2] = [0, \sigma - 1]$. En ajoutant $a - \sigma + 1$ à J' , on obtient l'intervalle $J'' = [a - \sigma + 1, a]$. Puisque $a - \sigma \in T$, on a $a - \sigma \leq 2^{n-2}$, par conséquent $a - \sigma + 1 \leq \sigma - 1$, de telle façon que le plus petit élément de J'' appartient à J' et $J' \cup J'' = [0, a]$.

Dans le cas 3, les sommes partielles d'éléments de F couvrent $[0, a]$ comme expliqué ci-dessus.

- (ii) Soit k le nombre minimal de \mathbb{S} -générateurs de $(H\mathbb{Z})_I$. Par (3.1), on a $k \geq n + 1$. Il reste à montrer qu'il existe un ensemble générateur de cardinalité $n + 1$. On suppose d'abord que $n > 4$ et par conséquent, par (i), appelons $\alpha_j \in (0, a)$ les n éléments distincts vérifiant (i). Soit $F = \{-a\} \cup \{\alpha_j\} \subset [-a, a]$. Par construction $\#F = n + 1$. Pour montrer que F est un ensemble \mathbb{S} -générateur de $(H\mathbb{Z})_I$, on a besoin de vérifier les conditions du lemme 3.1. Par construction, la somme des éléments positifs de F est a et la somme de ses éléments négatifs est $-a$ par conséquent, toute somme partielle d'éléments de F appartient à $I = [-a, a]$. De plus, les

sommes partielles des éléments positifs de F couvrent l'intervalle $[0, a]$ par (i) , et en utilisant l'élément $-a$, on couvre $I = [-a, a]$.

Pour $n \leq 4$, on a $a \leq 15$ et on peut faire la liste des ensembles générateurs de cardinalité $n + 1$ comme suit

$$\begin{aligned} & \{-1, 1\}, \{-3, 1, 2\}, \{-6, 1, 2, 3\}, \{-7, 1, 2, 4\}, \{-10, 1, 2, 3, 4\}, \{-11, 1, 2, 3, 5\} \\ & \{-12, 1, 2, 3, 6\}, \{-13, 1, 2, 3, 7\}, \{-14, 1, 2, 4, 7\}, \{-15, 1, 2, 4, 8\} \end{aligned}$$

Ces ensembles sont du même type que ceux construits pour $n > 4$; pour les autres valeurs, on a

$$\{-3, -1, 1, 3\}, \{-4, -1, 2, 3\}, \{-7, -1, 1, 2, 5\}, \{-8, -1, 1, 3, 5\}.$$

La valeur $a = 2$ nécessite 3 générateurs $\{-2, 1, 2\}$ et c'est la seule pour laquelle l'ensemble F des générateurs ne peut pas être choisi de telle façon que la somme de ses éléments positifs soit a et que la somme de ses éléments négatifs soit $-a$. On vérifie néanmoins que tous les éléments peuvent être obtenus comme une somme admissible. \square

Théorème 3.3. *Soit D un diviseur d'Arakelov sur $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$. Si $\deg(D) \geq 0$, on a*

$$(3.2) \quad \dim_{\mathbb{S}} H^0(D) = \left\lceil \deg_2 D \right\rceil + 1.$$

Preuve : On peut supposer que $D = \delta\{\infty\}$ où $\delta = \deg(D) > 0$. On a $H^0(D) = (H\mathbb{Z})_I$ où $I = [-e^\delta, e^\delta]$, en utilisant la relation classique entre le degré du diviseur et le sous-ensemble compact associé dans les adèles⁴. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tel que $2^{n-1} \leq e^\delta < 2^n$. La partie entière a de e^δ vérifie $2^{n-1} \leq a < 2^n$ et on a $H^0(D) = (H\mathbb{Z})_{[-a, a]}$. Par conséquent, par le lemme 3.2, on obtient $\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) = n + 1$. Par définition $\deg_2 D := \deg D / \log 2$. Les conditions $2^{n-1} \leq e^\delta < 2^n$ signifient que $n - 1 \leq \deg_2 D < n$ et montrent que le plus petit entier $> \deg_2 D$ est égal à n , ce qui prouve (3.2). \square

4. Dimension de H^1 sur \mathbb{S}

On définit la suite d'entiers suivante :

$$(4.1) \quad j(n) := \frac{1}{3}(-2)^n - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{6} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les premières valeurs de $j(n)$ sont alors : 0, 1, -2, 5, -10, 21, -42, 85, -170, 341, -682, 1365, -2730, ...

Lemme 4.1. *Soit $G(n) = \{(-2)^j \mid 0 \leq j < n\}$. L'application σ de l'ensemble des sous-ensembles de $G(n)$ vers \mathbb{Z} définie par $\sigma(Z) := \sum_Z j$ est en bijection avec l'intervalle $\Delta(n) := [j(k), j(k) + 2^n - 1]$ où $k = k(n) := 2E(n/2) + 1$, ($E(x) =$ la partie entière de x).*

Preuve : L'application σ est injective et couvre un intervalle $[a, b]$. La borne inférieure a est la somme des puissances $a = \sum_{0 \leq \ell < \frac{n-1}{2}} (-2)^{2\ell+1}$ et la borne supérieure est la somme des puissances $b = \sum_{0 \leq \ell < \frac{n}{2}} (-2)^{2\ell}$. On liste des premiers intervalles comme suit

$$\Delta(1) = [0, 1], \quad \Delta(2) = [-2, 1], \quad \Delta(3) = [-2, 5], \quad \Delta(4) = [-10, 5], \quad \Delta(4) = [-10, 21], \dots \quad \square$$

On renvoie le lecteur à [3], Appendice A, B, pour l'interprétation de $H^1(D)$ en termes du \mathbb{S} -module tolérant $(U(1), d)_\lambda$, $\lambda = e^{\deg D}$. Au niveau 1, la relation de tolérance sur le groupe abélien \mathbb{R}/\mathbb{Z} est donnée par la condition $d(x, y) \leq \lambda$.

Proposition 4.2. *Soit $U(1)$ le groupe abélien \mathbb{R}/\mathbb{Z} muni de la métrique canonique d de longueur 1.*

⁴Notons que $e^{\deg D} = 2^{\deg_2(D)}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $U(1)_\lambda$ le \mathbb{S} -module tolérant $(U(1), d)_\lambda$. Alors

$$(4.2) \quad \dim_{\mathbb{S}} U(1)_\lambda = \begin{cases} m & \text{if } 2^{-m-1} \leq \lambda < 2^{-m}, \\ 0 & \text{if } \lambda \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Preuve : Pour $\lambda \geq \frac{1}{2}$, tout élément de $U(1)_\lambda = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d)_\lambda$ est à distance $\leq \lambda$ de 0, par conséquent on peut prendre $F = \emptyset$ comme ensemble générateur puisque, par convention, $\sum_{\emptyset} = 0$. Ainsi $\dim_{\mathbb{S}} U(1)_\lambda = 0$. Ensuite, on suppose $\lambda < \frac{1}{2}$. Soit $F \subset U(1)$ un ensemble générateur et posons $k = \#F$. On voit facilement qu'il y a au plus 2^k éléments de la forme $\sum_F \alpha_j j$, $\alpha_j \in \{0, 1\}$. Les sous-ensembles $\{x \in U(1) \mid d(x, \sum_F \alpha_j j) \leq \lambda\}$ couvrent $U(1)$, et puisque chacun d'eux à comme mesure 2λ , on obtient l'inégalité $2\lambda \cdot 2^k \geq 1$. Ainsi $k \geq \frac{-\log \lambda - \log 2}{\log 2}$. Quand $\frac{-\log \lambda - \log 2}{\log 2} = m$ est un entier, on a $\lambda = 2^{-m-1}$. Posons $F(m) = \{(-2)^{-j} \mid 1 \leq j \leq m\}$. La distance minimale entre deux éléments de $F(m)$ est la distance entre 2^{-m+1} et -2^{-m} qui est égale à $3 \cdot 2^{-m} = 6\lambda$. Montrons que $F(m)$ est un ensemble générateur. Par le lemme 4.1, tout entier q dans l'intervalle $\Delta(m)$ peut s'écrire comme $q = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (-2)^i$, avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$. On obtient alors

$$q \cdot (-2)^{-m} = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (-2)^{i-m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{m-j} (-2)^{-j}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, faire monter y à un élément x de l'intervalle $(-2)^{-m}[j(k(m)), j(k(m)) + 2^m]$ qui est connexe de longueur 1 et est un domaine fondamental pour l'action de \mathbb{Z} par translation. Alors il existe un entier $q \in \Delta(m)$ tel que $|(-2)^m x - q| \leq \frac{1}{2}$. Par conséquent, $d(x, q \cdot (-2)^{-m}) \leq 2^{-m-1} = \lambda$. Cela prouve que $F(m)$ est un ensemble générateur (voir la définition 2.1) et on en déduit que $\dim_{\mathbb{S}} U(1)_\lambda = m$. Supposons maintenant que $\frac{-\log \lambda - \log 2}{\log 2} \in (m, m+1)$, où m est un entier, i.e. que $\lambda \in (2^{-m-2}, 2^{-m-1})$. Pour tout ensemble générateur F de cardinalité k , on a $k \geq \frac{-\log \lambda - \log 2}{\log 2} > m$ de telle façon que $k \geq m+1$. Le sous-ensemble $F(m+1) = \{(-2)^{-j} \mid 1 \leq j \leq m+1\}$ remplit la première condition de la définition 2.1 puisque la distance minimale entre deux éléments de $F(m+1)$ est $3 \cdot 2^{-m-1}$ qui est plus grand que $\lambda < 2^{-m-1}$. Comme montré ci-dessus, le sous-ensemble $F(m+1)$ est générateur pour $\lambda = 2^{-m-2}$ et a fortiori pour $\lambda > 2^{-m-2}$. Ainsi on obtient $\dim_{\mathbb{S}} U(1)_\lambda = m+1$ et (4.2) est démontré. \square

5. Formule de Riemann-Roch

On peut maintenant formuler le résultat principal de cet article

Théorème 5.1. *Soit D un diviseur d'Arakelov sur $\overline{\text{Spec}} \mathbb{Z}$. Alors*

$$(5.1) \quad \dim_{\mathbb{S}} H^0(D) - \dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = \left[\deg_2 D \right]' + 1$$

où $[x]'$ est la fonction continue à droite qui coïncide avec $\text{plafond}(x)$ pour $x > 0$ non entier et avec $-\text{plafond}(-x)$ pour $x < 0$ non entier (voir Figure 1).

Preuve : Pour $\deg_2 D \geq 0$, on a $\lambda = e^{\deg D} \geq 1$ et par conséquent par (4.2), on obtient $\dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = 0$, de telle façon que (5.1) découle du théorème 3.3. Pour $\deg_2 D < 0$, on a $\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) = 0$ puisque l'ensemble vide est un ensemble générateur. Pour $\deg_2 D \in [-m-1, -m]$ où $m \in \mathbb{N}$, on a, par (4.2), $\dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = m$. Par conséquent, le côté gauche de (5.1) is $-m$ alors que le côté droit est égal à

$$\left[\deg_2 D \right]' + 1 = -m$$

par définition de la fonction $[x]'$ comme fonction continue à droite qui coïncide avec $\text{plafond}(x)$ pour $x > 0$ non entier et avec $-\text{plafond}(-x)$ pour $x < 0$ non entier. \square

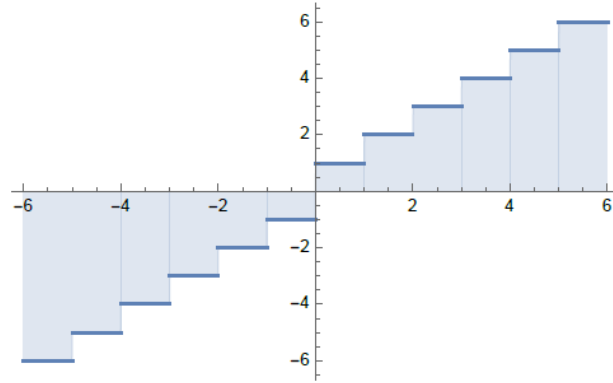


FIG 1 : Graphique de $\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) - \dim_{\mathbb{S}} H^1(D) - 1$ comme une fonction de $\deg_2 D$

Remerciements. La seconde auteure est en partie financée par la subvention de la fondation Simons n° 691493.

Bibliographie

- [1] A. Connes, C. Consani, *Absolute algebra and Segal's Gamma sets*, J. Number Theory 162 (2016), 518–551.
- [2] A. Connes, C. Consani, *On Absolute Algebraic Geometry, the affine case*, Advances in Mathematics, 390, Paper No. 107909 (2021), 44 pp.
- [3] A. Connes, C. Consani, *Riemann-Roch for $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$* . À paraître dans le Bulletin des Sciences Mathématiques.
- [4] B. Dundas, T. Goodwillie, R. McCarthy, *The local structure of algebraic K-theory*. Algebra and Applications, 18. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.
- [5] A. Weil *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, Oeuvres scientifiques/Collected papers I. 1926–1951. Springer, Heidelberg, 2014.