Facteurs de zeta locaux et géométries sous $\mathbf{Z}$

Yuri I. Manin

Institut Max–Planck pour les mathématiques, Bonn, Allemagne

Résumé. La première partie de cette note montre que le polynôme de période impaire de chaque forme propre cuspide de Hecke pour le groupe modulaire complet produit via la transformation de Rodriguez–Villegas ([Ro–V]) un polynôme satisfaisant l'équation fonctionnelle de type zeta et ayant des zéros non triviaux seulement sur la ligne médiane de la bande critique. La seconde partie discute de la lambda–structure de Chebyshev de l'anneau de polynômes comme donnée de descente de Borger vers $\mathbf{F}_1$ et suggère ainsi son rôle dans la relation possible du $\Gamma_{\mathbf{R}}$–facteur à la "géométrie réelle sur $\mathbf{F}_1$" (cf. également [CoCons2]).

Introduction

Dans son influent exposé [Se], Jean–Pierre Serre a énoncé des conjectures précises à propos de la structure des facteurs locaux des fonctions zeta des variétés algébriques sur les anneaux arithmétiques. En particulier, il a défini les facteurs locaux aux complétions complexe, resp. réelle, archimédienne de la base comme des combinaisons multiplicatives de fonctions gamma faisant intervenir les nombres de Hodge. (Bien sûr, les facteurs locaux aux nombres premiers finis depuis Weil et Grothendieck ont été traités en fonction des représentations de Galois sur la cohomologie comme des polynômes caractéristiques de Frobenii.)

Dans mes exposés de séminaire [Ma1] dédiés à la géométrie et à l'arithmétique sur le mythique "corps à un élément $\mathbf{F}_1$" de Jacques Tits, j'ai suggéré l'existence de fonctions zetas locales respectives "en caractéristique un" et remarqué que le gamma–facteur de Riemann au nombre premier infini ressemble à un facteur local en caractéristique un d'un espace projectif de dimension infinie $\mathbf{P}^{\infty}_{\mathbf{F}_1}$ adéquatement régularisé.

Plus précisément, dans [Ma1] j'ai défini la fonction zeta de $\mathbf{P}^{k}_{F_1}$ comme

$$(2\pi)^{-(k+1)}s(s-1)\dots(s-k). \tag{0.1}$$

D'un autre côté, Deninger ([De]) a representé le Γ–facteur de base à l'infini arithmétique (complexe) comme le déterminant infini de l'application de Frobenius complexe et un produit régularisé

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s)^{-1} := \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} = \prod_{n\geq 0} \frac{s+n}{2\pi}. \tag{0.2}$$

En comparant (0.1) à (0.2), j'ai suggéré que ce gamma–facteur, avec changement de signe de s, pourrait être imaginé comme la fonction zeta d'un espace projectif de dimension infinie sur $\mathbf{F}_1$. Je ne discuterai pas du problème d'une interprétation similaire du gamma–facteur réel.

Après 1992, il y a eu un corpus croissant de définitions et d'études sur les $\mathbf{F}_1$–géométries, cf. des survols et une bibliographie complète dans [Lo2], [Ma2]. En particulier, Ch. Soulé dans [So] a posé sur des bases solides mes heuristiques à propos des facteurs zeta locaux sur $\mathbf{F}_1$. En particulier, les facteurs naturels des fonctions zeta des $\mathbf{F}_1$–schémas se sont avérés être des polynômes en s, satisfaisant une équation fonctionnelle exprimant leur symétrie par rapport à une application $s \mapsto c - s$. Dans le texte principal, j'utiliserai pour de tels polynômes le terme générique "zeta polynômes", en complétant leur description par la contrainte que les zéros non triviaux doivent être sur une droite verticale au milieu de la bande critique, cf. Théorème 1.3 ci-dessous.

Pour d'autres connaissances à propos de $\mathbf{F}_1$, voir [KaS], [CoCons1] et la description du travail de A. Smirnov dans [LeBr], et à propos du programme de Deninger, voir [CoCons2].

Pourtant, les ponts entre les caractéristiques zéro et un, et en particulier les $\mathbf{P}^{\infty}_{\mathbf{F}_1}$–heuristiques à propos de (0.2) restent encore insaisissables à un degré considérable.

Dans cette courte note, je contribue à porter de nouveaux coups à ce mystère.

Dans la section 1, je montre que toute forme cuspide f pour $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{Z})$ qui est forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, au-delà des habituels p–facteurs de sa transformation de Mellin, produit un polynôme de plus qui ressemble à un "facteur zeta local en caractéristique un". Ce polynôme est obtenu à partir du polynôme de période impaire de f de la même manière formelle que le polynôme de Hilbert d'une algèbre graduée est produit à partir de sa série de Poincaré, voir [Ro–V]. Les formules (1.7) et (1.8) ci-dessous suggèrent que ce formalisme peut aussi bien être considéré comme la version discrète de la transformation de Mellin.

Pour des analogies avec les fonctions zetas et l'interprétation géométrique de cette dernière, voir aussi [Go].

Dans la section 2, je suggère comment un gamma–pont souhaité entre les caractéristiques zéro et un pourrait prendre en compte le fait que dans l'image de Serre, les gamma–facteurs correspondant aux nombres premiers arithmétiques infinis réel et complexe sont différents. À cette fin, je fais appel à l'identification de J. Borger des lambda–structures sur les schémas avec données de descente vers $\mathbf{F}_1$ ([Bo], [LeBr]), et à l'idée que les anneaux de Habiro sont des ascenseurs vers $\mathbf{Z}$ des "anneaux de fonctions analytiques" en caractéristique un suggérés dans [Ma2]. Alors il s'avère que deux lambda–structures différentes sur l'anneau polynomial, la structure torique et la structure de Chebyshev, reflètent fidèlement la différence entre les géométries analytiques complexe et réelle en caractéristique un.

Notons que les lambda–structures apparaissent naturellement dans différents contextes, reliés aux fonctions zeta : voir par exemple [CoCons2], [Na] et [Ra]. Il serait intéressant d'inclure la philosophie de Borger dans ces contextes également.

1. Zeta polynômes des formes cuspides

1.1. Polynômes périodes et fonctions périodes. Ici on considère des formes modulaires par rapport à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$, k est un poids positif pair ; $w := k-2$; S_k dénote l'espace des formes cuspides, M_k est l'espace des formes modulaires de poids k.

Les polynômes périodes pour les formes cuspides sont définis par :

$$r_f(z) := \int_0^{i\infty} f(\tau)(\tau - z)^{k-2} d\tau, \quad r_f^{\pm}(z) := \frac{r_f(z) \pm r_f(-z)}{2}.$$

La formule suivante plus générale est valide également pour les séries de Eisenstein : si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi ins} \in M_k$, définissons son *intégrale de Eichler* par

$$E_f(z) := \int_z^{i\infty} (f(\tau) - a_0)(\tau - z)^{k-2} d\tau = -\frac{(k-2)!}{(2\pi i)^{k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k-1}} e^{2\pi nz}$$

et alors définissons sa *fonction période* par

$$r_f(z) := E_f(z) - z^{k-2} E_f(-1/z)), \quad r_f^{\pm}(z) := \frac{r_f(z) \pm r_f(-z)}{2}.$$

Si f n'est pas de forme cuspide, alors $r_f(z) \in z^{-1}\mathbf{C}[z]$.

1.2. Espaces de fonction périodes. Si $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$, $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, l'action à droite $|_w$ de g sur l'espace V_w des polynômes r de degré $\le w$ est définie par

$$(r|_w g)(z) := (cz+d)^w r(g(z)).$$

Soit $S(z) = -1/z$, $U(z) = 1 - 1/z$ et

$$Y_w := \{\, r \in V_w \mid \quad r|_w(1+S) = r|_w(1+U+U^2) = 0 \,\}. \tag{1.1}$$

Pour $f \in S_k$, on a $r_f(z) \in Y_w$. $Y_w^{\pm}$ représente les sous-espaces respectifs des polynômes pairs/impairs. Il est bien connu (Eichler–Shimura) que l'application $r^- \, : \, f \mapsto r_f^-(z)$ définit un isomorphisme $S_k \to Y_w^-$, alors que r^+ définit un plongement de codimension un $S_k \to Y_w^+$.
Récemment, il a été démontré ([ConFaIm]) que si $f \in S_k$ est une forme propre de Hecke, alors

$$U_f(z) := \frac{r_f^-(z)}{z(z^2-4)(z^2-1/4)(z^2-1)^2} \tag{1.2}$$

est un polynôme sans zéro réel dont les zéros complexes sont tous sur le cercle unité.

Clairement, son degré est $e := w - 10$.

1.3. Théorème. *Fixons un entier $d > e = w - 10$ et posons*

$$P_f(z) := \frac{U_f(z)}{(1-z)^d.} \tag{1.3}$$

Il existe un polynôme $H_f(x) \in \mathbf{C}[x]$ de degré $d-1$ tel que

$$P_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_f(n) z^n$$

pour $|z| < 1$. Son polynôme satisfait l'équation fonctionnelle

$$H_f(x) = (-1)^{d-1} H(-d+e-x) \tag{1.4}$$

et il s'évanouit en $x = -1, \ldots, -d+e+1$. Tous ses zéros restant sont sur la droite verticale $Re\, x = -(d-e-1)/2$.

Preuve. Ceci est une application directe de la proposition dans la section 3 de [Ro–V] (due en forme plus générale à Popoviciu), et de ses corollaires. Une condition pour l'applicabilité de cette proposition est assurée par le théorème à propos des zéros de (1.2) dans [CoFaIm]. On a seulement à vérifier l'équation fonctionnelle (9) à partir de cette proposition, i. e. l'identité

$$P_f(1/z) = (-1)^d z^{d-e} P_f(z). \tag{1.5}$$

En réécrivant (1.5) comme

$$\frac{U_f(1/z)}{(1-1/z)^d} = (-1)^d z^{d-e} \frac{U_f(z)}{(1-z)^d}$$

on voit qu'elle est équivalente à

$$U_f(1/z) = z^{-e} U_f(z)$$

c'est-à-dire que, au vu de (1.2),

$$\frac{r_f^-(1/z)}{z^{-1}(z^{-2}-4)(z^{-2}-1/4)(z^{-2}-1)^2} = z^{10-w} \frac{r_f^-(z)}{z(z^2-4)(z^2-1/4)(z^2-1)^2}. \tag{1.6}$$

Maintenant, à partir de $r\,|_w(1+S)=0$ il s'ensuit que $r_f^-(1/z) = -r_f^-(-1/z) = z^{-w} r_f^-(z)$. En insérant cela dans (1.6), on obtient finalement (1.5).

1.4. Remarques. a) Dans [ER], il a été démontré que tous les zéros du polynôme de période complète d'une forme cuspide sont sur le cercle unité. Similairement, tous les zéros de $zr_f(z)$ pour les séries de Eisenstein Hecke sont sur le cercle unité.

Pourtant, j'ai été incapable d'adapter ces cas dans le cadre de la construction de Rodriguez–Villegas, parce que l'analogue de l'équation fonctionnelle (1.5) échoue apparemment pour le polynôme de période complète.

b) J'utilise les mots "polynômes zeta" pour les polynômes en une variable satisfaisant une version de l'équation fonctionnelle telle que (1.4) et "l'hypothèse de Riemann". Dans [Ro–V], il a été en particulier démontré que les polynômes de Hilbert de certains anneaux valués sont des polynômes zeta. Golyshev ([Go]) a considéré les anneaux de fonctions homogènes sur des variétés de Fano et de Calabi–Yau par rapport à des plongements anticanoniques ou projectifs relatifs et ils ont trouvé des corrélations géométriques intéressantes à ces résultats.

De plus, en comparant la formule

$$H_f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma P_f(z) z^{-(n+1)} dz \tag{1.7}$$

(où γ est un petit contour autour de zéro) avec la transformation de Mellin

$$Z_f(s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{i\infty} f(z) \left(\frac{z}{i}\right)^{s-1} d\left(\frac{z}{i}\right) \tag{1.8}$$

on voit une analogie formelle considérable : moralement, H_f est la "transformation de Mellin discrète de P_f".

En particulier, l'argument n de H_f correspond à l'argument classique $-s$: cela est consistant avec les observations dans [Ro–V] et [Go].

Pourtant, trouver un espace géométrique approprié dans lequel vivent les polynômes zeta H_f associés aux formes cuspides de Hecke nécessite apparemment le royaume des "géométries sous $\mathbf{Z}$". Le problème est que dans la plupart des versions des $\mathbf{F}_1$–géométries, ces zeta polynômes qui apparaissent comme des fonctions zeta de motifs sur $\mathbf{F}_{1^n}$ ont seulement des zéros entiers : cf. e. g. [Lo1]. Au contraire, notre H_f semble venir de certains motifs non–Tate et des objets géométriques au-dessous de $\mathbf{Z}$ mais non au-dessus de $\mathbf{F}_1$. J'attends que naissent des niveaux en-dessous de $\mathbf{Z}$ auxquels des piles modulaires comme $\overline{M}_{1,n}$ pourraient être descendues.

c) Notons finalement que les polynômes périodes apparaissent également dans les études de l'action de Galois sur le groupoïde de Grothendieck–Teichmüller : voir [Sch], [Hai] et [Po] et les références qui y sont fournies à propos de leur rôle dans les réalisations de Hodge. On peut deviner que le rôle particulier des polynômes périodes des formes propres de Hecke deviendra plus clair à la lumière du paradigme étale.

2. Lambda–anneaux de Habiro

2.1. Anneaux de Habiro. L'anneau de Habiro H d'une variable sur $\mathbf{Z}$ est défini comme la limite projective des anneaux quotient $\mathbf{Z}[q]/(f(q))$ où $f(q)$ parcourt l'ensemble multiplicatif des monômes dont les racines sont des racines de l'unité. Cet anneau a été introduit et étudié dans [Hab], et dans [Ma2] il a été suggéré de le considérer comme "*l'anneau des fonctions analytiques sur* $\mathbf{G}_m$ *remonté à partir de* $\mathbf{F}_1$." En fait, $\mathbf{Z}[q]$ est naturellement plongé dans la complétion de Habiro H, et q devient inversible, de telle façon que H peut aussi être défini comme une complétion de $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$. On peut étendre cette définition au cas de plusieurs variables inversisbles qui est celui des fonctions sur les tores.

2.2. Lambda–anneaux. J. Borger a développé dans [Bo] l'idée d'interpréter les lambda–structures de Grothendieck sur les schémas comme des données de descente générale vers $\mathbf{F}_1$. Il est donc naturel de s'attendre à ce que l'anneau de Habiro admette une lambda–structure naturelle.

Ici, on ne traitera que le cas des anneaux commutatifs A plats sur $\mathbf{Z}$ auquel cas une lambda–structure peut simplement être considérée comme un système d'ascenseurs de Frobenii commutants : les homomorphismes d'anneaux $\psi^p : A \to A$ pour tout nombre premier p tel que $\psi^p(x) \equiv x^p \pmod{pA}$ pour tout $x \in A$ et $\psi^{p_1}\psi^{p_2} = \psi^{p_2}\psi^{p_1}$. En particulier, on peut définir $\psi^k : A \to A$ pour tous les entiers positifs k par multiplicativité.

La lambda–structure la plus naturelle sur $\mathbf{Z}[q]$ et $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ est déterminée par $\psi^k(q) = q^k$, et puisqu'elle est compatible avec la limite projective sur le système de polynômes cyclotomiques dans q, elle est héritée par l'anneau de Habiro. On appellera cette structure *la structure torique*.

Pourtant, l'anneau polynomial $\mathbf{Z}[r]$ admet une lambda–structure de plus, découverte par Clauwens ([Cl]). Dans cette structure,

$$\psi^k(r) := T_k(r)$$

où T_k est le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Chebyshev. Notre prochain résultat décrit un sous-anneau $H_0 \subset H$ qui peut être muni d'une lambda–structure de Chebyshev.

2.3. Proposition. *(i) Considérons dans l'anneau de Habiro H le sous-anneau H_0 défini comme la complétion du sous-anneau polynomial $\mathbf{Z}[r]$, où*

$$r := 1 + q + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cdot (1-q)\dots(1-q^n). \tag{2.1}$$

Ce sous-anneau est invariant par rapport à la lambda–structure standard ψ^k, ce qui induit sur ce sous-anneau, par rapport à la coordonnée r, la lambda–structure de Chebyshev.

(ii) H_0 est strictement plus petit que H.

Preuve. (i) Dans H, on a une expression convergente pour q^{-1} (voir [Hab], Prop. 7.1):

$$q^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cdot (1-q)\dots(1-q^n)$$

Par conséquent $r = q + q^{-1}$. De plus, en utilisant une des définitions des polynômes de Chebyshev, on voit que

$$\psi^k(r) = q^k + q^{-k} = T_k(q + q^{-1}) = T_k(r).$$

(ii) Pour voir que H_0 est strictement plus petit que H, on peut utiliser le résultat suivant dû à Habiro. Tout élément de H détermine une fonction sur l'ensemble des racines de l'unité μ_∞ avec valeurs dans $\mathbf{Z}[\mu_\infty]$, et l'application résultante

$$H \to (\mu_\infty, \mathbf{Z}[\mu_\infty])$$

est un plongement (voir [Hab]). L'élément q correspond à l'application tautologique $\mu_\infty \to \mathbf{Z}[\mu_\infty]$. Alors tous les éléments de $\mathbf{Z}[r]$ deviennent des fonctions invariantes selon l'involution $\zeta \to \zeta^{-1}$ de μ_∞ et leurs valeurs sont également invariantes. Cette propriété reste vérifiée après complétion. Par conséquent $q \notin H_0$.

Notons que pour tout plongement complexe de μ_∞ et tout $\eta \in \mu_\infty$, $\eta + \eta^{-1}$ est réel. C'est pour cette raison que nous faisons référence à cette géométrie comme à la "géométrie analytique réelle sur $\mathbf{F}_1$."

Références

[Bo] J. Borger. *Λ–rings and the field with one element.* arXiv:0906.3146.

[Cl] F. J. B. J. Clauwens. *Commuting polynomials and λ–ring structures on $\mathbf{Z}[x]$.* J. Pure Appl. Algebra, 95(3), 1994, 261–269.

[CoCons1] A. Connes, C. Consani. *Schemes over $\mathbf{F}_1$ and zeta functions.* Compos. Math. 146, no. 6, 2010, 1383–1415.

[CoCons2] A. Connes, C. Consani. *Cyclic homology, Serre's local factors and the λ–operations.* arXiv:1211.4239.

[ConFaIm] J. B. Conrey, D. W. Farmer, Ö. Imamoglu. *The nontrivial zeros of period polynomials lie on the unit circle.* Int. Math. Res. Not. , no. 20, 2013, 4758–4771. arXiv:1201.2322.

[De] C. Deninger. *On the Γ–factors attached to motives.* Inv. Math. 104, 1991, 245–261.

[ER] A. El–Guindy, W. Raji. *Unimodularity of zeros of period polynomials of Hecke eigenforms.* Bull. Lond. Math. Soc. 46, 2014, 528–536.

[Go] V. Golyshev. *The canonical strip, I.* arXiv:0903.2076

[Hab] K. Habiro. *Cyclotomic completions of polynomial rings.* Publ. RIMS, Kyoto Univ., 40, 2004, 1127–1146.

[Hai] R. Hain. *The Hodge–de Rham theory of modular groups.* arXiv:1403.6443

[KaS]. M. Kapranov, A. Smirnov. *Cohomology determinants and reciprocity laws: number field case.* Manuscrit non publié, 1996, 15 pp.

[LeBr] L. Le Bruyn. *Absolute geometry and Habiro topology.* arXiv:1304.6532

[Lo1] O. Lorscheid. *Functional equations for zeta functions of* $\mathbf{F}_1$*–schemes.* C. R. Ac Sci. Paris, 348 (21–22), 2010, 1143–1146. arXiv 1010.1754

[Lo2] O. Lorscheid. *A blueprinted view on* $\mathbf{F}_1$*–geometry.* arXiv:1301.0083

[Ma1] Yu. Manin. *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa).* In: Columbia University Number Theory Seminar (1992), Astérisque 228, 1995, 121–164.

[Ma2] Yu. Manin. *Cyclotomy and analytic geometry over* F_1. In: Quanta of Maths. Conférence en l'honneur de Alain Connes. Clay Math. Proceedings, vol. 11, 2010, 385–408. Preprint math.AG/0809.2716. 28 pp.

[Na] N. Naumann. *Algebraic independence in the Grothendieck ring of varieties.* Trans. AMS, 359(4): 1652–1683 (electronic), 2007.

[Po] A. Pollack. *Relations between derivations arising from modular forms.* http://dukespace.lib.duke.edu/dspace/handle/10161/1281

[Ra] N. Ramachandran. *Zeta functions, Grothendieck groups, and the Witt ring.* arXiv:1407.1813

[Ro–V] F. Rodriguez–Villegas. *On the zeros of certain polynomials.* Proc. AMS, Vol. 130, No 8, 2002, 2251–2254.

[Se] J.-P. Serre. *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures).* Séminaire Delange–Pisot–Poitou 11, 1969–1970, exp. 19, 1–15.

[Sch] L. Schneps. *On the Poisson bracket on the free Lie algebra in two generators.* J. Lie Theory 16, no. 1, 2006, 19–37.

[So] Ch. Soulé. *Les variétés sur le corps à un élément.* Mosc. Math. J., 4(1), 2004, 217–244.