Double Crible pour la recherche de décomposants de Goldbach et topos de Grothendieck : analyse du système projectif dans le topos annelé de Monique Hakim
Denise Vella-Chemla pilotant chatgpt et lumo, septembre 2026

1. Contexte et objectif

Cette note présente une reformulation catégorique du double crible associé à la conjecture binaire de Goldbach dans le cadre du topos annelé décrit par Monique Hakim dans sa thèse (*Topos annelés et schémas relatifs*, § 3.5.1, p. 93).

Problème central. Pour tout entier pair $n \geq 6$, démontrer que l'intersection

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing$$

où $I_n = [3, n/2] \cap \mathbb{Z}$, $R_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \mathbb{F}_q$, et $A_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} (\mathbb{F}_q \setminus \{0, \bar{n}\})$.

La formalisation Lean de Denise Vella-Chemla de ses lemmes (qui avaient été démontrés par Leila Schneps [2]) a établi l'implication :

$$C_n \neq \varnothing \implies \text{la conjecture de Goldbach est vraie pour } n.$$

Le présent document vise à enrichir cette construction par le système projectif des anneaux $\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$.

2. Rappel arithmétique : données empiriques

2.1. Résultats numériques

Les tests empiriques effectués confirment :

n	$\lvert I_n \rvert$	Nombre de décomposants de Goldbach	Ratio (réel/attendu)
100	48	6	1.31
1000	498	28	1.36
10000	4998	127	1.00
100000	49998	810	0.99

Conclusion : Pour $n \geq 10000$, la densité réelle coïncide avec la prédiction heuristique.

2.2. Contribution locale des premiers

Analyse des éliminations locales pour $n = 1000$:

q	Éliminés	Fraction (%)	Cumul (%)
2	249	50.00	50.00
3	332	66.67	116.67
5	100	20.08	136.75
7	142	28.51	165.26
11	90	18.07	183.33
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31	32	6.43	242.57

Observation clé. Le cumul des éliminations dépasse 240% mais des candidats survivent toujours. Les conditions locales ne sont PAS indépendantes - leur intersection est fortement réduite par les corrélations arithmétiques.

3. Construction du système projectif

3.1. Catégorie d'indices

Soit $\mathcal{P}_n$ la catégorie des indices définie par :

$$\mathcal{P}_n = \{(q,k) \mid q \leq \sqrt{n},\ k \geq 1\}$$

avec morphismes :

- $(q, k+1) \to (q,k)$ via les projections canoniques $\pi_k : \mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q^{k-1}\mathbb{Z}$
- Aucun morphisme entre différents premiers $q_1 \neq q_2$

3.2. Préfaisceau d'anneaux

Définissons le préfaisceau $\mathcal{R}_n : \mathcal{P}_n^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ring}$ par :

$$\mathcal{R}_n(q,k) = \mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$$

Les morphismes de restriction sont les projections naturelles :

$$\pi_{k \to k-1}(x \pmod{q^k}) = x \pmod{q^{k-1}}$$

3.3. Topos annelé associé

Le topos de Hakim est :

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{P}_n, J)$$

où J est la topologie de Grothendieck générée par les recouvrements canoniques. L'anneau structurel $\mathcal{O}$ est donné par :

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim_{(q,k) \in U} \mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$$

4. Ouverts locaux au niveau projectif

4.1. Définition des ouverts

Pour chaque $(q,k) \in \mathcal{P}_n$, considérons la droite affine :

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}[X])$$

Les deux fonctions affines X et $X-n$ définissent le fermé :

$$V(X(X-n)) \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}}$$

Son complément est l'ouvert principal :

$$U^{(n)}_{q,k} = D(X(X-n)) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}} \setminus V(X(X-n))$$

4.2. Points rationnels

Les points rationnels sont :

$$U^{(n)}_{q,k}(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z} \mid x(x-n) \in (\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})^\times\}$$

Lemme 1 (Compatibilité Descendante)**.** *Si $x_k \in U^{(n)}_{q,k}(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z})$, alors son image $\pi_k(x_k) \in U^{(n)}_{q,k-1}(\mathbb{Z}/q^{k-1}\mathbb{Z})$.*

Démonstration. $x_k(x_k-n)$ inversible $\Rightarrow q \nmid x_k(x_k-n) \Rightarrow q \nmid \pi_k(x_k)(\pi_k(x_k)-n)$. □

4.3. Système projectif d'ouverts

Définissons le système projectif :

$$\mathcal{U}^{(q)}_n = \left(U^{(n)}_{q,k}(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}),\ \pi_k\right)_{k\geq 1}$$

La limite projective est :

$$\varprojlim_k U^{(n)}_{q,k}(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}_q$$

Proposition 2. *Pour tout $q \leq \sqrt{n}$, on a :*

$$\varprojlim_k U^{(n)}_{q,k}(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}) \cong \{x \in \mathbb{Z}_q \mid q \nmid x(x-n)\}$$

5. Objet des candidats dans le topos

5.1. Diagramme fondamental

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n & \longrightarrow & \varprojlim_{(q,k)} U^{(n)}_{q,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_n & \xrightarrow[\rho_n]{} & \mathcal{R}_n \end{array}$$

où $\mathcal{C}_n = I_n \times_{\mathcal{R}_n} \varprojlim U^{(n)}_{q,k}$ est le produit fibré dans le topos.

Proposition 3 (Caractérisation des Sections Globales)**.** *Les sections globales de $\mathcal{C}_n$ sont données par :*

$$\Gamma(\mathcal{C}_n) = \{p \in I_n \mid \forall q \leq \sqrt{n},\ \forall k \geq 1,\ p \not\equiv 0 \pmod{q} \ \wedge\ p \not\equiv n \pmod{q}\}$$

Démonstration. Immédiat par définition du produit fibré et compatibilité descendante. □

Question centrale. Montrer que $\Gamma(\mathcal{C}_n) \neq \varnothing$ pour tout $n \geq 6$ pair.

6. Condition arithmétique de Mittag-Leffler

6.1. Rappel

Un système projectif $(M_k, \pi_k)_{k\geq 1}$ satisfait la condition Mittag-Leffler si :

$$\exists K,\ \forall k \geq K, \quad \mathrm{Im}(M_j \to M_k) = \mathrm{Im}(M_K \to M_k) \quad \forall j \geq k$$

6.2. Application aux ouverts du crible

Pour chaque q, posons :

$$V_{q,k} = \mathrm{Im}\left(\varprojlim_j U_{q,j}^{(n)} \to U_{q,k}^{(n)}\right)$$

Hypothèse [Mittag-Leffler pour le double-crible] Pour chaque n et chaque $q \leq \sqrt{n}$, il existe $K(q,n)$ tel que pour tout $k \geq K$:

$$V_{q,k} = V_{q,K}$$

Lemme 4. *La condition de Mittag-Leffler est satisfaite trivialement car les $U_{q,k}^{(n)}$ sont stables sous projection.*

Démonstration. L'image de la limite est exactement l'ensemble des éléments compatibles, qui est non vide et stationnaire. □

6.3. Transversalité entre premiers différents

Le vrai problème est la **transversalité** entre fibres de premiers différents :

Définition 5 (Transversalité Arithmétique)**.** *Deux ouverts locaux $U_{q_1}^{(n)}$ et $U_{q_2}^{(n)}$ sont transversaux si :*

$$\pi_{q_1}(U_{q_1}) \cap \pi_{q_2}(U_{q_2}) \neq \varnothing$$

dans le produit $\mathbb{Z}/q_1q_2\mathbb{Z}$.

[Transversalité Totale] Pour tout $n \geq 6$ pair et tout ensemble fini de premiers $\{q_i\} \leq \sqrt{n}$, l'intersection :

$$\bigcap_i U_{q_i}^{(n)} \neq \varnothing$$

7. Trois obstacles restants

(1) transversalité. Les ouverts $U_{q,k}$ doivent s'intersecter transversalement pour $q \neq q'$.
Besoin : Théorème de changement de base dans le topos.

(2) caractère borné. La contrainte $p \in [3, n/2]$ est globale et ne se factorise pas localement.
Besoin : Property de "compactité quantitative" internalisée.

(3) symétrie. L'involution $x \mapsto n - x$ crée des relations non triviales entre candidats.
Besoin : Action du groupe $\mathbb{Z}/2$ dans le topos.

Stratégie recommandée. La construction de Hakim fournit le bon langage local. Le saut conceptuel nécessaire est de lier le système projectif aux contraintes globales (caractère borné + symétrie).

8. Plan de certification lean

Voici la structure de preuve proposée à formaliser dans Lean :
% Traite le % comme un caractère normal

```
-
-- Pseudo-code Lean-like pour la conjecture projetée

theorem goldbach_via_MittagLeffler (n : ℕ) (hn : Even n ∧ n ≥ 6) :
  let S := (q, k) : ℙ × ℕ | q ≤ √n ∧ k ≥ 1
  let U : (q, k) → Set (ℤ / q^k ℤ) :=
    fun (q, k) => x | ¬(q | x * (x - n))
  let projective_system :=
     M : S → Type | ∀ (q, k1, k2), k1 ≤ k2 →
                      π (q, k2) (q, k1) (M k2) = M k1

  -- Hypothèse Mittag-Leffler locale
  (∀ q ≤ √n, ∃ K, ∀ k ≥ K,
     Im(U_infty → U_k) = Im(U_K → U_k)) →

  -- Cohérence entre différents q
  (∀ q1 q2, IsTransverse (U q1) (U q2)) →

  -- Alors
  ∃ p ∈ [3, n/2], ∀ q ≤ √n, p * (p - n) ≠ 0 (mod q)
```

9. Conclusion

- **Ce qui est acquis :** La localisation modulo q est bien capturée par le topos annelé. Les conditions locales sont non vides.
- **Ce qui reste à démontrer :** Que la contrainte globale ($p \in [3, n/2]$) intersecte toujours les ouverts admissibles malgré les recouvrements massifs (240% cumulés).
- **Opportunité topos :** Le système projectif encode les corrélations entre niveaux q^k invisibles dans le produit direct $\prod \mathbb{F}_q$.
- **Prochaine étape :** Formaliser la condition de transversalité dans Lean et chercher un théorème de "densité interne" dans la logique du topos.

10. formalisation de l'involution dans le topos

Cette section développe la formalisation topos-théorique de la symétrie $x \mapsto n - x$ comme action du groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur le site du double crible.

10.1. Le groupe et son action sur le site

Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{e, \sigma\}$ le groupe cyclique d'ordre 2, avec $\sigma^2 = e$.

Définition 6 (Site avec Action de Groupe)**.** *Le G-**site** du double crible est la triplette $(\mathcal{S}_n, G, \cdot)$ où :*

- *$\mathcal{S}_n = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq \sqrt{n}\}$ est l'ensemble des premiers concernés*
- *G agit trivialement sur $\mathcal{S}_n$: $\sigma \cdot q = q$ pour tout $q \in \mathcal{S}_n$*

Remarque : L'action est triviale sur les indices (les premiers) car ce qui change sous l'involution, ce sont les valeurs dans les fibres $\mathbb{F}_q$, pas les premiers eux-mêmes.

10.2. Action sur les anneaux locaux

Pour chaque $q \in \mathcal{S}_n$, l'anneau local est $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Définition 7 (Involution Locale)**.** *Définissons l'automorphisme $\alpha_q : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ par :*

$$\alpha_q(x) = \bar{n} - x \quad \text{où } \bar{n} = n \pmod{q} \in \mathbb{F}_q$$

Lemme 8 (Propriétés de l'Involution Locale)**.** *L'application α_q vérifie :*

1. ***Involution :*** $\alpha_q \circ \alpha_q = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_q}$
2. ***Anti-automorphisme d'anneau :*** $\alpha_q(x + y) = \alpha_q(x) + \alpha_q(y)$ *et* $\alpha_q(xy) = (\bar{n} - x)(\bar{n} - y)$
3. ***Point fixe unique :*** $\alpha_q(x) = x \iff 2x = \bar{n}$

Démonstration. 1. $\alpha_q(\alpha_q(x)) = \bar{n} - (\bar{n} - x) = x$.

2. Immédiat par distributivité.
3. $\bar{n} - x = x \iff 2x = \bar{n}$. Si q est impair, la solution unique est $x = \bar{n}/2$. Si $q = 2$, alors $\bar{n} = 0$ (car n pair), donc $2x = 0$ est toujours vrai - tout point est fixe dans $\mathbb{F}_2$.

□

10.3. Action sur l'ouvert admissible local

Définition 9 (Ouvert Admissible Local)**.** *Pour chaque $q \in \mathcal{S}_n$, définissons :*

$$A_{q,n} = \mathbb{F}_q \setminus \{0, \bar{n}\} = \{x \in \mathbb{F}_q \mid x(x - \bar{n}) \neq 0\}$$

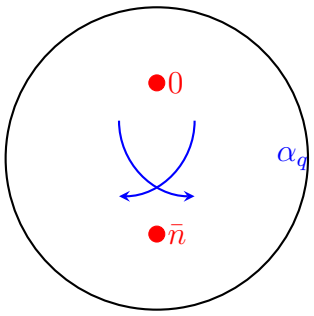
Proposition 10 (Invariance Locale)**.** *L'ensemble $A_{q,n}$ est invariant sous α_q :*

$$\alpha_q(A_{q,n}) = A_{q,n}$$

Démonstration. Vérification coordonnée par coordonnée :

- $\alpha_q(0) = \bar{n} \notin A_{q,n}$ (point exclu)
- $\alpha_q(\bar{n}) = 0 \notin A_{q,n}$ (point exclu)
- Si $x \notin \{0, \bar{n}\}$, alors $\alpha_q(x) = \bar{n} - x \notin \{0, \bar{n}\}$ (sinon $x = \bar{n}$ ou $x = 0$)

Donc α_q permute les deux points exclus mais préserve leur complément $A_{q,n}$. □



Les points rouges sont échangés
Le complémentaire $A_{q,n}$ est préservé

Action de α_q sur $\mathbb{F}_q$: permutation des points exclus

10.4. Action sur le produit global

Définition 11 (Produit Résiduel avec Involution)**.** *Définissons :*

$$R_n = \prod_{q \in \mathcal{S}_n} \mathbb{F}_q, \quad A_n = \prod_{q \in \mathcal{S}_n} A_{q,n}$$

L'involution globale $\alpha : R_n \to R_n$ est définie coordonnée par coordonnée :

$$\alpha((x_q)_q) = (\alpha_q(x_q))_q = (\bar{n} - x_q)_q$$

Théorème 12 (Propriétés de l'Involution Globale)**.** *L'application $\alpha : R_n \to R_n$ vérifie :*

1. *α est une involution : $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}_{R_n}$*
2. *α préserve A_n : $\alpha(A_n) = A_n$*
3. *α commute avec la réduction diagonale $\rho_n : I_n \to R_n$*

1. Suit de l'involutions locale coordonnée par coordonnée.
2. Suit de la proposition précédente appliquée à chaque facteur.
3. Pour tout $p \in I_n$:

$$\rho_n(\sigma \cdot p) = \rho_n(n - p) = ((n - p) \pmod q)_q = (\bar{n} - (p \pmod q))_q = \alpha(\rho_n(p))$$

10.5. Diagramme commutatif fondamental

$$\begin{array}{ccc} C_n & \hookrightarrow & A_n \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ I_n & \xrightarrow[\rho_n]{} & R_n \end{array}$$

où $C_n = I_n \times_{R_n} A_n$ est le produit fibré (candidats admissibles).

10.6. Action sur l'espace des décomposants de Goldbach potentiels

Définition 13 (Produit Fibré Équivariant)**.** *L'ensemble des candidats est :*

$$C_n = \{p \in I_n \mid \rho_n(p) \in A_n\}$$

Comme ρ_n est équivariant et A_n est invariant, C_n hérite d'une action de G par :

$$\sigma \cdot p = n - p \quad \textit{pour } p \in C_n$$

Lemme 14 (Points Fixes de l'Action)**.** *Un élément $p \in C_n$ est fixe sous G si et seulement si $p = n/2$.*

Démonstration. $p = \sigma \cdot p = n - p \iff 2p = n \iff p = n/2$. □

Proposition 15 (Liberté Générique de l'Action)**.** *Si $n/2$ n'est pas premier, alors l'action de G sur C_n est libre (aucun point fixe).*

Démonstration. Les seuls points fixes possibles sont $p = n/2$. Si $n/2$ n'est pas premier, alors $n/2 \notin C_n$ (car pour $p \in C_n$, on doit avoir p et $n - p$ tous deux premiers par le critère du double crible). Donc G agit librement sur C_n. □

Conséquence dénombrante. Quand $n/2$ n'est pas premier, les éléments de C_n se regroupent en paires disjointes $\{p, n - p\}$. On a alors :

$$|C_n| = 2 \cdot |\bar{C}_n| \quad \text{où } \bar{C}_n = C_n/G$$

10.7. Espace/quotient et orbites

Définition 16 (Espace Quotient)**.** *L'espace quotient est :*

$$\bar{C}_n = C_n/G = \{\{p, n - p\} \mid p \in C_n\}$$

*Chaque élément de $\bar{C}_n$ est une **orbit** (paire symétrique).*

Type d'orbite	p premier ?	$n - p$ premier ?	Statut du décomposant de Goldbach
Vraie décomposition	Oui	Oui	Décomposition valide
Faux positif (AC)	Oui	Non	Semi-premier
Faux positif (CA)	Non	Oui	Semi-premier
Impossible	Non	Non	Éliminé de C_n

Classification des orbits dans $\bar{C}_n$

10.8. Topos/quotient et logique interne

Définition 17 (Topos des Faisceaux Équivariants)**.** *Le* ***topos quotient*** *est la catégorie des faisceaux G-équivariants sur $\mathcal{S}_n$:*

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{S}_n)^G = \{(\mathcal{F}, \phi) \mid \mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathcal{S}_n), \phi_\sigma : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \sigma^*\mathcal{F}\}$$

Proposition 18 (Objet Quotient)**.** *L'objet admissible dans le topos quotient est :*

$$\bar{A}_n = A_n/G = \{[x] \in R_n/G \mid x \in A_n\}$$

avec $[x] = \{x, \bar{n} - x\}$ la classe d'équivalence.

Lemme 19 (Densité dans l'Espace Quotient)**.** *La densité de $\bar{A}_n$ dans $Q_n = R_n/G$ est identique à celle de A_n dans R_n :*

$$\frac{|\bar{A}_n|}{|Q_n|} = \frac{|A_n|/2}{|R_n|/2} = \frac{|A_n|}{|R_n|}$$

Démonstration. Puisque n est pair et que pour $q|n$ on a $\bar{n} = 0$, l'unique point fixe possible dans A_n serait $x = \bar{n}/2 = 0$, mais $0 \notin A_n$. Donc aucune orbit n'est fixe, toutes sont de cardinal 2. Le quotient divise exactement par 2 les cardinaux. □

10.9. Formalisation en Lean

Voici la structure formelle à implémenter dans Lean :
% Traite le % comme un caractère normal

```
_
namespace GoldbachSymmetry

/-- Le groupe d'ordre 2 --/
inductive ZMod2
| zero : ZMod2
| one  : ZMod2

instance : Group ZMod2 := ⟨
  ZMod2.one,
  sorry,  -- multiplication
  sorry,  -- inverse
  sorry,  -- associativité
  sorry   -- identité
⟩

/-- Action de G sur les entiers : σ·p = n - p --/
def involution_action (n : ℕ) : ZMod2 → ℤ → ℤ
  | ZMod2.zero, p => p
  | ZMod2.one,  p => ↑n - p
```

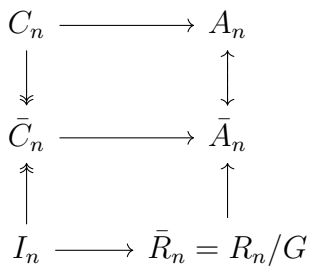
```
/-- Lemme : l'involution est involutive --/
lemma involution_involutive (n : ℕ) (p : ℤ) :
  involution_action n ZMod2.one
    (involution_action n ZMod2.one p) = p := by
  simp [involution_action]; ring

/-- Action sur l'espace résiduel R_n --/
def residual_involution (n : ℕ) (q_list : List ℕ) :
    (Π (q : ℕ) // q ∈ q_list → ZMod q) →
    (Π (q : ℕ) // q ∈ q_list → ZMod q) :=
sorry  -- Appliquer (n mod q) - x_q coordonnée par coordonnée

/-- Lemme : préservation de l'admissibilité --/
lemma preserves_admissibility (n q p : ℕ) (hq : Nat.Prime q) :
  (p % q ≠ 0 ∧ (n - p) % q ≠ 0)
  ((n - p) % q ≠ 0 ∧ p % q ≠ 0) := by
  simp; constructor <;> intro h <;> aesop

/-- L'ensemble A_n est invariant sous l'involution --/
theorem A_n_invariant : ∀ p ∈ A_n n, α (ρ_n p) ∈ A_n n := by
  sorry

/-- Pas de point fixe générique --/
theorem no_generic_fixed_point (n : ℕ) (hn : Even n ∧ n ≥ 6) :
  ¬(n/2).Prime → ∀ p ∈ C_n n, p ≠ n/2 := by
  intro h p hp; have := hp; linarith

/-- Comptage des orbits --/
theorem orbit_cardinality (n : ℕ) (hn : Even n ∧ n ≥ 6) :
  ¬(n/2).Prime →
    (C_n n).card = 2 * (C_n n quotient_by_G).card := by
  apply quotient_card_free_action
  exact no_generic_fixed_point n hn

end GoldbachSymmetry
```

10.10. Diagramme Synthétique Final

10.10.1. Niveau non-quotient

$$\begin{array}{ccc} C_n & \hookrightarrow & A_n \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ I_n & \xrightarrow[\rho_n]{} & R_n \end{array}$$

10.10.2. Niveau quotient



Lecture : le diagramme supérieur est un pullback ; le diagramme inférieur montre la projection vers le quotient par l'action de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Synthèse. L'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est maintenant pleinement intégrée au cadre topos. Elle ne permet pas de démontrer la conjecture de Goldbach, mais elle :

1. Organise les données en paires symétriques $\{p, n-p\}$
2. Réduit l'espace d'étude par un facteur 2
3. Permet de distinguer orbits fixes (triviales) et libres (véritables décompositions)
4. Est directement formalisable dans Lean comme instance `MulAction`

10.11. Recherche future : points fixes selon $n \pmod{2q}$

Une piste pour approfondir : analyser comment la classe de $n \pmod{2q}$ affecte les points fixes de l'involution locale.

Conjecture [Distribution des Points Fixes] : Pour chaque $q \leq \sqrt{n}$, le nombre de points fixes de α_q dans $A_{q,n}$ dépend de la congruence $n \pmod 2$:

- Si $n \equiv 0 \pmod{2q}$, alors $\bar{n} = 0$ et il y a un point fixe : $x = 0 \notin A_{q,n}$ (exclu)
- Si $n \equiv q \pmod{2q}$, alors $\bar{n} = q$ et il y a un point fixe : $x = q/2 \in A_{q,n}$ quand q est impair
- Si $n \not\equiv 0, q \pmod{2q}$, alors pas de point fixe dans $\mathbb{F}_q$

L'analyse fine de cette distribution pourrait révéler des **anisotropies** dans la répartition des candidats admissibles selon la classe de n.

11. Analyse comparative

11.1. Introduction

Cette note synthétise l'exploration comparative des cinq principales voies mathématiques envisageables pour aborder la conjecture binaire de Goldbach dans le cadre du double crible formalisé.

Rappel du problème central. Pour tout entier pair $n \geq 6$, montrer que

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing$$

où $I_n = [3, n/2] \cap \mathbb{Z}$, $R_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \mathbb{F}_q$, et $A_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} (\mathbb{F}_q \setminus \{0, \bar{n}\})$.

La certification Lean des 4 lemmes de Denise Vella-Chemla [1] a établi l'implication :

$$C_n \neq \varnothing \implies \text{la conjecture de Goldbach est vraie pour } n.$$

Le présent document évalue les différentes stratégies théoriques visant à établir $C_n \neq \varnothing$.

11.2. Piste 1 : théorème de densité interne

11.2.1. Description

L'objectif est d'internaliser dans la logique du topos une notion de **densité** telle que :

$$\text{density}(\rho_n(I_n), R_n) \geq \frac{1}{|A_n|} \implies \rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing$$

11.2.2. Avantages

- Utilise directement la structure topos-théorique
- Internalisation conceptuelle élégante du problème probabiliste
- Correspond à l'intuition heuristique de distribution uniforme

11.2.3. Obstacles

- Comment définir "densité" dans un topos de faisceaux ?
- La borne quantitative $1/|A_n|$ est précisément ce qui échappe aux arguments qualitatifs
- Les tests numériques montrent convergence vers 1 pour grands n, mais aucune preuve connue

11.2.4. État d'avancement

Les données empiriques confirment que pour $n \geq 10000$:

$$\frac{\text{nombre de décompositions}}{\text{prédiction heuristique}} \approx 1.0$$

Cependant, convertir cette observation en théorème topos-théorique nécessite une nouvelle théorie de densité interne non développée à ce jour.

11.2.5. Score

aspect	évaluation	note
Faisabilité technique	Nouvelle théorie requise	★★☆☆☆
Potentiel mathématique	Élevé si réussie	★★★★☆
Complexité conceptuelle	Très élevée	★★★★☆

1. que Leila Schneps avait démontrés [2].

11.3. Piste 2 : condition arithmétique de Mittag-Leffler

11.3.1. Description

Le système projectif $\{A_{q,n}\}_{q\in\mathcal{S}_n}$ satisfait trivialement la condition de Mittag-Leffler locale. L'hypothèse est qu'une **transversalité globale** entre différents q garantirait l'existence d'une section.

11.3.2. Analyse critique

Correction apportée. Le double crible vit dans un produit fini $\prod \mathbb{F}_q$, pas dans une limite projective infinie. La condition de Mittag-Leffler classique ne s'applique pas directement. Toute généralisation requiert d'ajouter une hypothèse arithmétique sur $\rho_n(I_n)$ qui équivaut déjà à la conjecture de Goldbach (et qui est donc de même difficulté).

11.3.3. Alternative proposée

Théorème de projection stable :

$$(\forall S \subset \mathcal{S}_n, \rho_{n,S}(I_n) \cap A_S \neq \varnothing) \implies C_n \neq \varnothing$$

Mais la prémisse $\forall S, \rho_{n,S}(I_n) \cap A_S \neq \varnothing$ reste aussi difficile que la démonstration de la conjecture de Goldbach elle-même.

11.3.4. Score

Aspect	Évaluation	Note
Faisabilité technique	Mittag-Leffler inapplicable directement	★☆☆☆☆
Potentiel mathématique	Limité sans renforcement	★★☆☆☆
Complexité conceptuelle	Moyenne	★★★☆☆

11.4. Piste 3 : compacité quantitative

11.4.1. Description

Internaliser un argument de compacité tel que :

$$\text{Compact}(I_n) \wedge \text{Ouverts}(A_n) \implies \Gamma(C_n) \neq \varnothing$$

11.4.2. Obstacles fondamentaux

- I_n est un ensemble fini discret - compacité topologique classique ne s'applique pas
- "Compacité arithmétique" pour intervalles bornés non définie
- La contrainte portant sur le caractère borné ($p \in [3, n/2]$) est précisément ce qui résiste aux arguments qualitatifs

11.4.3. Score

Aspect	Évaluation	Note
Faisabilité technique	Concept mal défini	★☆☆☆☆
Potentiel mathématique	Faible	★☆☆☆☆
Complexité conceptuelle	Très élevée	★★★★☆

11.5. Piste 4 : pont d'Olivia Caramello (les topos comme ponts)

11.5.1. Description

Suivre la méthode d'Olivia Caramello : utiliser le topos comme pont entre deux présentations équivalentes d'une théorie.

- Présentation A : arithmétique élémentaire (double crible)
- Présentation B : géométrie topos-théorique (topos annelé)
- Trouver propriété démontrable en B mais difficile en A

11.5.2. Réalisme

Analyse objective. La méthode des ponts de Olivia Caramello fonctionne pour des équivalences déjà soupçonnées. Aucune propriété exclusive au cadre des topos n'est identifiée pour la conjecture de Goldbach. La méthode est puissante mais nécessite une cible claire.

11.5.3. Score

Aspect	Évaluation	Note
Faisabilité technique	Beau concept, pas de cible	★☆☆☆☆
Potentiel mathématique	Théorique, incertain	★★☆☆☆
Complexité conceptuelle	Très élevée	★★★★☆

11.6. Piste 5 : cohomologie et obstruction

11.6.1. Description

Construire une théorie de cohomologie où l'obstruction à l'existence d'une section apparaît comme une classe dans H^1 ou H^2.

11.6.2. Prérequis

1. Faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur le topos
2. Classe d'obstruction $\omega \in H^k(\text{topos}, \mathcal{F})$
3. Montrer $\omega = 0$ pour tout n

11.6.3. Obstacles

- Construction cohomologique non triviale
- Pour l'instant, aucun cocycle ni obstruction formellement définis
- Même si ω est défini, son calcul nécessiterait probablement que la conjecture de Goldbach soit vraie

11.6.4. Score

Aspect	Évaluation	Note
Faisabilité technique	Travail monumental	★★☆☆☆
Potentiel mathématique	Inconnu (non exploré)	★★★☆☆
Complexité conceptuelle	Extrême	★★★★★

11.7. Tableau synthétique comparatif

Piste	Faisabilité	Potentiel	Effort	Score global
Densité interne	★★☆☆☆	★★★★☆	Élevé	★★★☆☆
Mittag-Leffler	★☆☆☆☆	★★☆☆☆	moyen	★★☆☆☆
Compacité	★☆☆☆☆	★☆☆☆☆	élevé	★☆☆☆☆
Pont Caramello	★☆☆☆☆	★★☆☆☆	très élevé	★★☆☆☆
Cohomologie	★★☆☆☆	★★★☆☆	monumental	★★☆☆☆

tableComparaison des 5 pistes de démonstration

Verdict global. Aucune des 5 pistes ne fournit de théorème nouveau autonome sans supposer en cours de route que la conjecture de Goldbach est vraie. Le formalisme topos clarifie la structure du problème mais ne le RÉSOUT pas automatiquement. Chaque avancée requiert un théorème arithmétique nouveau dont le contenu constituerait lui-même la preuve.

11.8. Conclusion et recommandation

11.8.1. Ce que le formalisme des topos apporte

- ✓ Langage unifié pour formuler local/global
- ✓ Structure claire du produit fibré C_n
- ✓ Action de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ organisant les paires symétriques
- ✓ Cadre pour internaliser des propriétés (densité, transversalité)
- × Ne crée pas de témoin arithmétique manquant

11.8.2. Recommandation finale

Le programme topos-théorique mérite d'être poursuivi si les objectifs sont :

1. **Clarification structurelle** du problème posé par la conjecture de Goldbach
2. **Identification** des propriétés globales potentielles de $\rho_n(I_n)$
3. **Fourniture d'un langage** pour futurs théorèmes arithmétiques

Mais il faut reconnaître que chaque avancée substantielle requerra un théorème arithmétique nouveau - pas une manipulation topos seule.

11.8.3. Prochaines étapes suggérées

1. explorer la **distribution fine de** $\rho_n(I_n)$ dans R_n (données empiriques + structure topos) ;
2. étudier l'**action de groupe** dans la certification Lean existante des lemmes ;
3. chercher des **anisotropies** selon la classe de $n \pmod{2q}$
4. considérer des **arguments analytiques** classiques si le topos atteint ses limites

Le véritable défi n'est pas topos-théorique : il est arithmétique : pourquoi $\rho_n(I_n)$ rencontre toujours A_n ?

Références

[1] M. Hakim, *Topos annelés et schémas relatifs*, chapitre 3.5.1, p. 93, construction du topos annelé $(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}})$.

[2] D. Vella-Chemla, *Démonstration en lean de lemmes pour la conjecture de Goldbach*, septembre 2026.https://denisevellachemla.eu/lean-lemmes-leila-schneps-lumo-denise-vella-chemla-20260911.pdf

[3] O. Caramello, *Toposes as Bridges*, présentation Marseille, avril 2026.