Revenir au maillage (DV, 12/9/2015)

Le plus difficile est d'oublier les points, pour se concentrer sur les opérateurs : ça ne nous est pas naturel.

Pour comprendre ce qui se tramait pour que la conjecture de Goldbach soit vraie, on a mis tête-bêche deux lignes des booléens de primalité (en bleu dans les exemples) associés aux entiers successifs exactement de la façon dont cela était présenté dans un texte de Laisant "Sur un procédé de vérification expérimental de la conjecture de Goldbach" (on rappelle qu'on a choisi comme convention que 0 code "premier" tandis que 1 code "composé"). Le nombre entier que l'on souhaite décomposer en somme de deux nombres détermine le positionnement des deux lignes de booléens l'une par rapport à l'autre.

Par exemple, on montre dans les tableaux ci-dessous le positionnement des séquences booléennes tête-bêche correspondant aux décompositions de 16, 18 et 20.

décompositions de 16

...	13	11	9	...
...	0	0	1	...
...	0	0	0	...
...	3	5	7	...

décompositions de 18

...	15	13	11	9	...
...	1	0	0	1	...
...	0	0	0	1	...
...	3	5	7	9	...

décompositions de 20

...	17	15	13	11	...
...	0	1	0	0	...
...	0	0	0	1	...
...	3	5	7	9	...

Le passage d'un entier pair à l'entier pair suivant consiste, on l'a vu, à "faire glisser" la séquence de booléens du haut d'un cran vers la droite et c'est ceci qu'on a choisi de symboliser par 16 règles de réécriture qu'on réécrit ci-dessous :

$aa \to a$	$ba \to a$	$ca \to c$	$da \to c$
$ab \to b$	$bb \to b$	$cb \to d$	$db \to d$
$ac \to a$	$bc \to a$	$cc \to c$	$dc \to c$
$ad \to b$	$bd \to b$	$cd \to d$	$dd \to d$

Ces règles sont en fait autant d'instances différentes d'une seule et même règle qui associe à deux doublons de booléens un troisième doublon dont les coordonnées sont la première coordonnée du premier doublon et la seconde coordonnée du second doublon. On peut coder ces règles en utilisant des matrices 2×2 de la façon suivante :

- On code le premier doublon par une matrice $M1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$;
- On code le second doublon par une matrice $M2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$;
- On concatène (intègre) ces deux matrices verticalement dans une matrice : $\begin{pmatrix} M1 \\ M2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$;
- On multiplie ce résultat à gauche par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

- On obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ qui contient la première coordonnée du premier doublon et la seconde du second.

Ci-dessous le poème de Boileau, qui illustre ce sentiment que l'on a de revenir sans cesse en arrière, en tournant toujours en rond autour des mêmes idées.

Toile de Pénélope

Avant donc que d'écrire, apprenez à penser.

Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément.

Hâtez-vous lentement, et sans perdre courage,
Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage,
Polissez-le sans cesse, et le repolissez,
Ajoutez quelquefois, et souvent effacez.

Boileau, L'Art poétique