$2x$ vérifie la conjecture de Goldbach $\iff$
$\exists\, p\ premier\ impair\ \leq\ x,\ \forall\, q\ premier\ impair\ \leq\ x,\ 2x\ \not\equiv\ p\ (mod\ q).$

$2x$ ne vérifie pas la conjecture de Goldbach $\iff$
$\forall\, p\ premier\ impair\ \leq\ x,\ \exists\, q\ premier\ impair\ \leq\ x,\ 2x\ \equiv\ p\ (mod\ q).$

Supposons qu'il existe $2ng$ tel que $2ng$ ne vérifie pas la conjecture de Goldbach. Il faudrait être capable de démontrer qu'alors $\exists\, 2ng',\ 2ng'\ <\ 2ng$ tel que $2ng'$ ne vérifie pas la conjecture de Goldbach non plus.
Que sait-on ?

- on sait que $2p_{max} < 2ng < 4p_{max}$ car par le postulat de Bertrand, l'écart entre deux nombres premiers successifs p_i et p_{i+1} est toujours inférieur strictement à p_i (i.e. $p_{i+1}\ <\ 2p_i$).
- on sait que
  $\forall\, p\ premier\ impair\ \leq\ x,\ \forall\, q\ premier\ impair\ \leq\ x,$
  $q\ premier\ impair\ >\ \frac{2x}{3}\ \Rightarrow\ 2x\ \not\equiv\ p\ (mod\ q)$[1].
- on sait que
  $\forall\, p\ premier\ impair\ divisant\ 2x,\ 2x\ \equiv\ p\ (mod\ p)$
  tandis que $\forall\, q\ premier\ impair\ ne\ divisant\ pas\ 2x,\ 2x\ \not\equiv\ q\ (mod\ q).$

$2ng$ ne vérifie pas la conjecture de Goldbach $\iff$
$\forall\, p\ premier\ impair\ \leq\ x,\ \exists\, q\ \leq\ \frac{2x}{3},\ 2x\ \equiv\ p\ (mod\ q).$

Appelons $C = \{a_1\ (mod\ p_1),\ ...,\ a_k\ (mod\ p_k)\}$ le système de congruences[2] que vérifie $2ng$. Il y a $2^k - 2$ ensembles de congruences strictement inclus dans C (sans compter l'ensemble vide).
Comment obtient-on les nombres qui vérifient les ensembles de congruences strictement inclus dans C à partir de $2ng$?
Si l'on soustrait à $2ng$ tous les multiples non nuls du double des produits de premiers impairs $\leq\ \frac{2x}{3}$ (remarque : de tels nombres premiers sont en nombre $\pi(\frac{2x}{3})$-1), on obtient des nombres strictement inférieurs à $2ng$ et qui partagent des colonnes de congruence avec $2ng$.

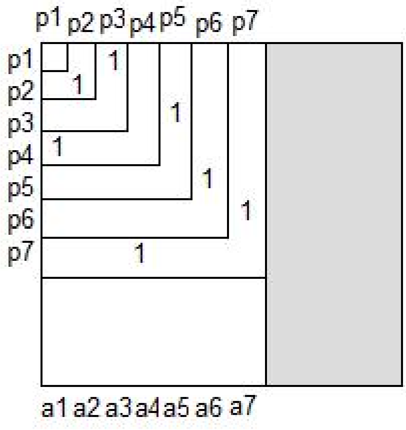
[1]Dans la matrice de 98 ci-après, les 4 dernières colonnes ne contiennent que des 0 de ce fait.
[2]la notion de système de congruences apparaît par exemple dans l'article d'Erdös à la page http ://archive.numdam.org/ARCHIVE/SDPP/SDPP$_1$972 $-$ $1973_{1}4_{2/SDPP_1972-1973_14_2A}8_{0/SDPP_1972-1973_14_2A}8_{0.pdf.}$

Fournissons l'exemple de la matrice de 98 pour montrer d'où proviennent certaines portions de ses colonnes :

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

98 partage avec 92 la portion bleue de la première colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 6k$).
98 partage avec 88 la portion rouge de la deuxième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 10k$).
98 partage avec 84 la portion verte de la troisième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 14k$).
98 partage avec 76 la portion yellow de la quatrièmee colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 22k$).
98 partage avec 72 la portion cyan de la cinquième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 26k$).
98 partage avec 64 la portion magenta de la sixième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 34k$).
98 partage avec 60 la portion orange de la septième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 38k$).
98 partage avec 52 la portion grise de la huitième colonne (il partage également des portions plus courtes de cette colonne avec tous les nombres inférieurs de la forme $98 - 46k$).
Pour les $p > \frac{x}{2}$, le partage n'a plus lieu.
On comprend que ce mécanisme du partage de portions de colonnes est tel que de très grands nombres partagent de tout petits morceaux haut-gauche de matrices (il faut soustraire 210 à $2ng$ pour obtenir à peine un petit partage de matrice 3×3.).
Ces partages de portions de colonnes découlent directement des propriétés de la relation de congruence telle que définie par Gauss.

La matrice suivante a un 1 au moins par ligne sans qu'aucune de ses sous-matrices carrées ne contienne un 1 par ligne :



La partie grisée à droite de la matrice correspond aux colonnes dans lesquelles il ne peut y avoir que des 0.
La matrice de taille $p_7 \times p_7$ contient un 1 par ligne alors que les matrices en haut à gauche de taille $p_6 \times p_6$, ou bien $p_5 \times p_5$, ou encore $p_4 \times p_4$, ou $p_3 \times p_3$, ou $p_2 \times p_2$ ou enfin $p_1 \times p_1$ contiennent toutes une de leurs lignes qui ne contient que des 0.
Cette matrice inventée est un peu spéciale : on a dû mettre des 1 dans la partie "nord-est" des lignes de la matrice, sans mettre de 1 à gauche de la diagonale dans ces mêmes lignes. Dans les faits, on constate sur les quelques matrices étudiées que quand il y a un 1 à droite de la diagonale dans une ligne, il y a également dans cette ligne un 1 à gauche de la diagonale.
En fait, les lignes de la matrice codent les factorisations des $2x - p$, avec p premier impair.
Voyons de ce fait (après avoir étudié comment se partagent les colonnes des matrices) comment se partagent les lignes des matrices.
La $9^{ème}$ ligne de la matrice de 98 qui code le nombre $98 - 29 = 69 = 2 \times 23$ a le même début que la ^{ème} ligne de la matrice de 92 qui code le même nombre 69.
Quand $2x - 2x' = p - p'$, les lignes des matrices correspondant aux nombres $2x-p$ et $2x'-p'$ correspondent au même nombre. Plus ces nombres sont proches, plus les lignes ont des longueurs proches, l'une étant préfixe de l'autre.
De la même façon que les colonnes "proviennent" d'extensions (au sens de la théorie des langages) de colonnes de différentes matrices de nombres plus petits, les lignes "proviennent" d'extensions de lignes de différentes matrices de nombres plus petits.
Tout cela illustre que par cette méthode, on ne peut aboutir à rien, comme beaucoup le disent...