Probabilités disjointes ou application du crible de Poincaré quand on élimine au maximum 2 classes de congruence sur p selon tout p premier (Denise Vella-Chemla, 26.1.2019)

Il s'agit ici d'écrire correctement un calcul[1] qui utilise la formule du crible de Poincaré.

On a vu dans d'autres notes que trouver les décomposants de Goldbach d'un nombre pair n supérieurs à $\sqrt{n}$ consiste à cribler les nombres qui n'ont aucun reste de division nul dans des divisions euclidiennes par les nombres premiers inférieurs à la racine carrée de n et qui, de plus, ne partagent aucun reste de division avec n. C'est ce que l'on note "application du crible de Poincaré quand on élimine au maximum 2 classes de congruence sur p (pour tout p premier inférieur à $\sqrt{n}$)". On élimine *au maximum* 2 classes de congruence car selon tout diviseur p' de n (p' premier), seuls les nombres de la classe $\dot{0}$ sont éliminés.

Un nombre a une chance sur deux d'être divisible par 2, une chance sur 3 d'être divisible par 3, une chance sur n d'être divisible par n.

Combien de chances un nombre a-t-il d'être divisible soit par 2 soit par 3 ?

Les probabilités concernant la divisibilité par 2 ou par 3 sont indépendantes l'une de l'autre. On appellera "addition disjointe" l'opération définie par $x \oplus y = x + y - xy$ qui va nous permettre de calculer la possibilité pour un nombre d'être divisible soit par 2 soit par 3.

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Effectivement, de 1 à 6, il y a 4 nombres divisibles par 2 ou par 3 (2, 4 et 6 le sont par 2 et 3 et 6 le sont par 3).

L'intérêt de cette "addition disjointe" est qu'elle permet d'obtenir directement les résultats de fastidieux calculs faisant appel à la combinatoire (produit de 2 nombres parmi n, de 3 nombres parmi n, etc) à cause de la propriété d'associativité.

$$\begin{aligned}
((a \oplus b) \oplus c) \oplus d &= ((a + b - ab) \oplus c) \oplus d \\
&= ((a + b - ab) + c - (a + b - ab)c) \oplus d \\
&= (a + b - ab + c - ac - bc + abc) \oplus d \\
&= a + b + c + d - ab - ac - ad - bc - bd - cd + abc + abd + acd + bcd - abcd
\end{aligned}$$

1. du 9 janvier 2019.