

# Fractales, symétrie et conjecture de Goldbach

Denise Vella

Février 2006

## 1 Introduction

Dans cette note, nous utilisons la théorie fractale de Mandelbrot pour étudier certaines propriétés des nombres entiers naturels. Nous mettons en évidence les symétries que l'on trouve dans certaines séquences fractales d'entiers. Ces symétries ont vraisemblablement pour conséquence que tout entier naturel supérieur à 4 est la moyenne de deux nombres premiers.

## 2 Séquences fractales de valuations p-adiques

### 2.1 Définitions

On appelle valuation p-adique ( $p$  premier) d'un entier  $n$  l'exposant de  $p$  dans la factorisation de  $n$ . On a l'habitude de noter cette valuation  $v_p(n)$ .

On peut définir  $v_p(n)$  de la façon suivante :

$$v_p(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{p} \\ v_p(n/p) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voici la séquence des valuations 2-adiques des nombres entiers de 1 à 100 :

```
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 4
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 5
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 4
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 6
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 4
0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 5
0 1 0 2 0
```

La séquence des valuations 3-adiques des mêmes nombres est <sup>1</sup> :

```

0 0 1 0 0 1 0 0 2
0 0 1 0 0 1 0 0 2
0 0 1 0 0 1 0 0 3
0 0 1 0 0 1 0 0 2
0 0 1 0 0 1 0 0 2
0 0 1 0 0 1 0 0 3
0 0 1 0 0 1 0 0 2
0 0 1 0 0 1 0 0 2
0 0 1 0 0 1 0 0 2
0 0 1 0 0 1 0 0 4
0 0 1 0 0 1 0 0 2
0 0 1 0 0 1 0 0 2
0

```

On appelle *séquence fractale d'entiers* une séquence d'entiers qui s'"auto-contient". Cette notion a été définie précisément par Mandelbrot [1]. On peut dire que d'un point de vue mathématique, les fractales sont des objets construits par récurrence d'une homothétie interne, ce que l'on appelle l'"auto-similarité". Avant Mandelbrot, Peano, Sierpinski, ou Hilbert avaient inventé des courbes fractales. Chaque partie de ces courbes a une structure identique à la structure du tout.

Cette notion de "fractale" est esthétique par sa "beauté naturelle" au sens où elle permet de représenter des objets naturels tels une courbe littorale accidentée, la structure d'un arbre, etc. Enfin, Kimberling [2] a introduit la notion de "séquence fractale d'entiers" qui sera utilisée ici.

D'abord, il faut constater que les séquences constituées des valuations p-adiques des entiers sont autant de séquences fractales d'entiers : si l'on supprime de l'une de ces séquences tous ses éléments nuls et que l'on retranche 1 aux éléments restant, on obtient la séquence initiale avant transformation.

Considérons maintenant la séquence obtenue en additionnant les éléments de la séquence p-adique et de la séquence q-adique (p et q premiers). On constate que cette séquence est également fractale. Si l'on ne conserve de cette séquence que les éléments d'indices multiples du produit  $pq$  et qu'on leur retranche 2, on trouve à nouveau la séquence initiale des sommes.

---

<sup>1</sup>Il est démontré que  $v_p(a + b) \geq v_p(a) + v_p(b)$ .

Considérons alors la séquence obtenue en additionnant les éléments de  $i$  séquences  $p_i$ -adiques différentes (les  $p_i$  étant premiers). Cette séquence est fractale. Si l'on ne conserve de cette séquence que les éléments d'indices multiples de  $\prod p_i$ <sup>2</sup> et qu'on leur retranche  $i$ , on obtient à nouveau la séquence initiale des sommes.

Considérons enfin la séquence obtenue en additionnant les éléments des séquences  $p$ -adiques associées à tous les nombres premiers inférieurs à un nombre donné  $n$ . D'une part, cette séquence est fractale. D'autre part, les  $\log(n)$  premiers éléments de cette séquence qui ont pour valeur 1 sont d'indices premiers. Cette séquence est représentée graphiquement dans l'annexe 6.

## 2.2 Représentation graphique

Dans le schéma suivant, les couleurs noir, rouge, vert, orange et cyan montrent les valuations  $p$ -adiques associées aux nombres premiers 2, 3, 5, 7 et 11 pour les entiers naturels de 1 à 80.

---

<sup>2</sup>Ce produit de nombres premiers est parfois appelé primorielle et sera à nouveau utilisé dans l'annexe 4.

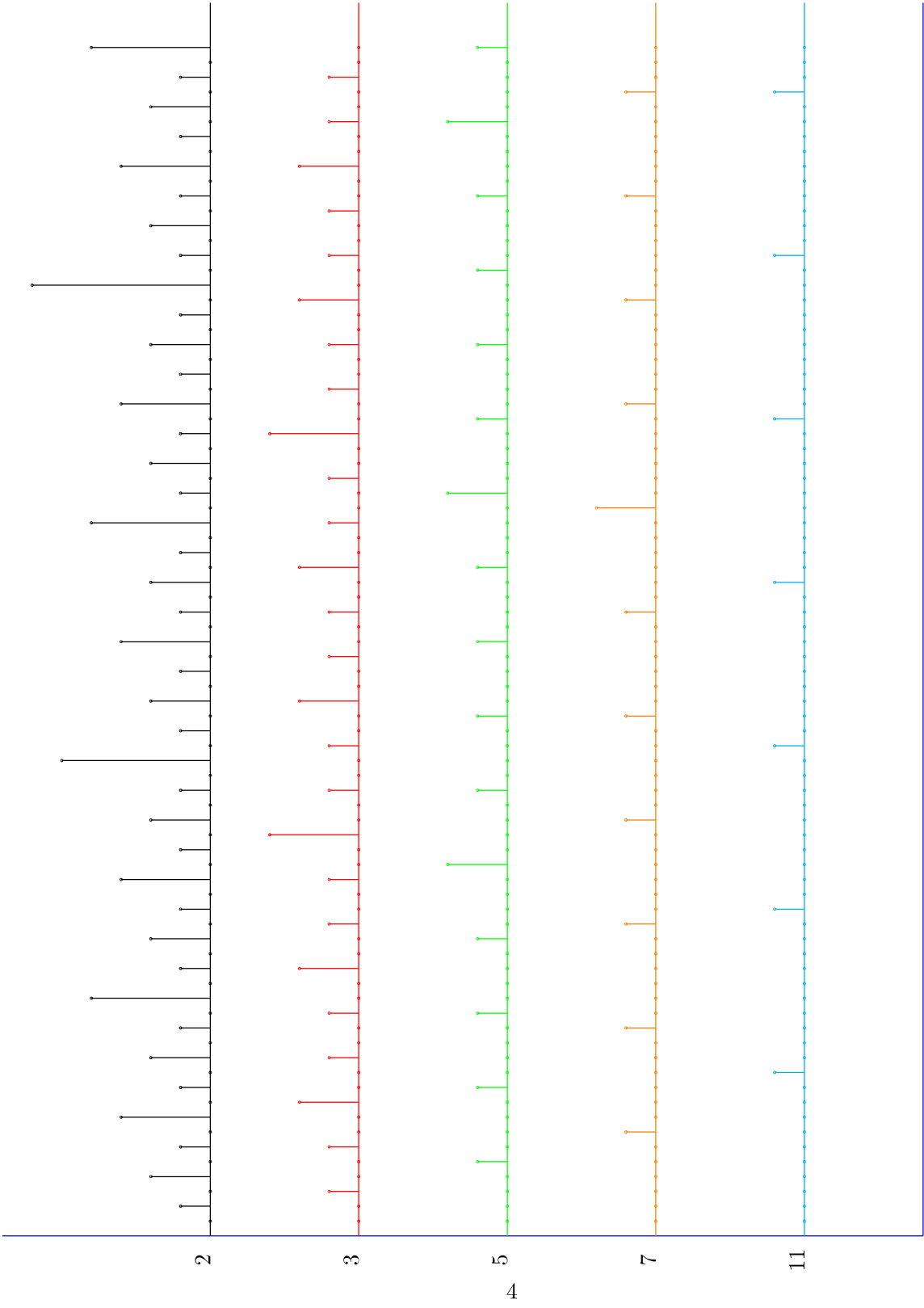


Figure 1 : Séquences fractales de valuations p-adiques

Nous fournissons en annexe l'extrait d'un article de Laisant qui présente la notion de valuation  $p$ -adique d'une manière très intuitive.

On peut représenter graphiquement l'"empilement" des factorisations des nombres entiers successifs. On construit ainsi une courbe constituée des points dont les coordonnées sont définies ainsi : l'abscisse d'un nombre premier est son "rang" (2 a pour rang 1, 3 a pour rang 2, 5 a pour rang 3, etc) ; et l'ordonnée d'un nombre premier  $p$  est la somme des valuations  $p$ -adiques des  $n$  premiers entiers. La courbe obtenue est une hyperbole d'équation  $xy = n \log(n)$ . Cette courbe est fournie en annexe.

### 2.3 Sous-séquences palindromes

En observant les différents graphiques présentés au paragraphe précédent, on constate que les séquences de valuations  $p$ -adiques contiennent des sous-séquences palindromes (identiques à elle-même, qu'on les lise de droite à gauche ou de gauche à droite).

Par exemple, considérons la séquence des valuations 2-adiques des nombres de 1 à 7. Cette séquence est  $[0, 1, 0, 2, 0, 1, 0]$ . Elle est palindrome. Au milieu de cette séquence, on trouve le nombre 4 de valuation 2-adique 2. Autour de lui, les nombres 3 et 5 tous deux de valuation 2-adique 0, ou bien les nombres 2 et 6 tous deux de valuation 2-adique 1, ou enfin, les nombres 1 et 7 tous deux de valuation 2-adique 0 également.

Considérons alors la séquence des valuations 3-adiques des nombres de 1 à 17 ( $[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]$ ). De part et d'autre du nombre 9 de valuation 3-adique 2, on trouve systématiquement des couples de nombres de même valuation 3-adique.

Expliquons cela autrement : on peut centrer autour de tout nombre de valuation  $p$ -adique non-nulle une fenêtre contenant une sous-séquence palindrome. Cela n'est pas le cas pour les nombres de valuation  $p$ -adique nulle. Une fenêtre centrée autour d'eux ne contient jamais une sous-séquence palindrome.

Sur la figure 2 apparaissent 4 fenêtres colorées contenant des séquences palindromes de valuations 2 ou 3-adiques.

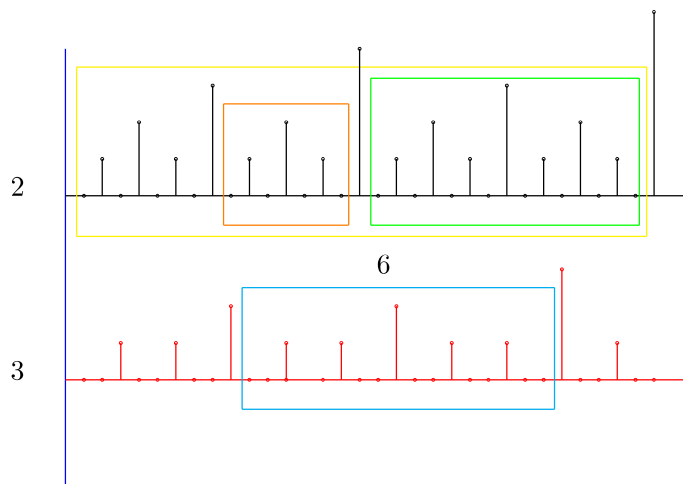
De façon plus générale, toute sous-séquence de longueur impaire centrée autour d'un élément de valuation p-adique non-nulle  $i$  et contenant à gauche et à droite de cet élément central  $i - 1$  éléments est palindrome selon  $p$ . Tout couple d'entiers de cette séquence dont ce nombre central est la moyenne est constitué de deux nombres de même valuation p-adique.

## 2.4 Conséquences

Cette propriété de "symétrie" (autour des nombres au centre des fenêtres) a des conséquences intéressantes. Tout nombre de valuation p-adique  $k$  non nulle est moyenne soit de deux nombres de valuations p-adique toutes deux non nulles, soit de valuations p-adiques toutes deux nulles. Tandis que tout nombre de valuation p-adique nulle ne peut jamais être moyenne de deux nombres qui seraient simultanément de valuations p-adiques non nulles.

On peut s'intéresser aussi à des fenêtres encadrant des sous-séquences palindromes mais qui ne sont pas centrées sur un nombre de valuation p-adique non nulle. Par exemple, les séquences palindromes des valuations 5-adiques des nombres de 11 à 24 (resp. de 11 à 14 ou de 6 à 14) sont  $[0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0]$  (resp.  $[0,0,0,0]$  ou  $[0,0,0,0,1,0,0,0,0]$ ). La position des nombres dans les fenêtres permet de faire certaines déductions : par exemple, si l'on ajoute les nombres 14 et 6 que l'on peut considérer comme étant situés aux deux extrémités d'une fenêtre centrée sur 10 dans la ligne de 5, on sait que l'on obtiendra un nombre de dimension 5-adique non nulle (en l'occurrence 20). De même pour 14 et 11 qui sont situés l'un avant une crête (14 est un  $5a - 1$ ), et l'autre après une crête (11 est un  $5b + 1$ ) dans la séquence des valuations 5-adiques.

Figure 2 : Exemples de fenêtres centrées sur des multiples



On peut résumer ce que l'on vient d'étudier concernant les symétries dans le tableau suivant, qui fournit la connaissance que l'on peut avoir des valuations p-adiques de  $x + y$  et  $x - y$  connaissant celles de  $x$  et  $y$ .

p	x	y	x+y	x-y
2	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
2	0	$\neq 0$	0	0
2	$\neq 0$	0	0	0
2	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
3	0	0	?	?
3	0	$\neq 0$	?	?
3	$\neq 0$	0	0	0
3	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
p	0	0	?	?
p	0	$\neq 0$	?	?
p	$\neq 0$	0	0	0
p	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

Ce tableau, bien que contenant quelques informations, ne nous sera pas d'une grande utilité par rapport à notre objectif initial et obsédant qui est de comprendre (voire démontrer !) la conjecture de Goldbach dont nous parlerons au paragraphe suivant.

Pour revenir aux symétries, on peut surtout constater qu'elles existent entre les nombres premiers eux-mêmes qui sont à des positions déterminées autour des puissances des nombres premiers inférieurs.

Montrons quelques exemples pour illustrer cela : intéressons-nous d'abord aux puissances de 2 et observons les symétries. Dans le tableau de nombres ci-après, les puissances de 2 sont écrites en bleu, chaque ligne traitant de l'intervalle entre une puissance de 2 et la puissance de 2 suivante. Les flèches entre les nombres - avec des petits nombres au-dessus fournissant les écarts - montrent les symétries (l'écart entre un nombre premier et la puissance de 2 inférieure est le même que l'écart entre la puissance de 2 supérieure et son nombre premier symétrique). Enfin, les nombres entre parenthèses sont ceux qui ont "échappé" aux symétries.

2	$\xrightarrow{1}$	3		$\xleftarrow{1}$	4										
4	$\xrightarrow{1}$	5		7	$\xleftarrow{1}$	8									
8	$\xrightarrow{3}$	11		13	$\xleftarrow{3}$	16									
16	$\xrightarrow{1}$	17		$\xrightarrow{3}$	19	(23)	29	$\xleftarrow{3}$	31	$\xleftarrow{1}$	32				
32	$\xrightarrow{5}$	37	(41)	$\xrightarrow{11}$	43	(47)	53	$\xleftarrow{11}$	59	$\xleftarrow{5}$	(61)	64			
64	(67)	(71)	(73)	$\xrightarrow{15}$	79	$\xrightarrow{19}$	83	(87)	$\xrightarrow{25}$	89	(97)				
		(101)	103	$\xleftarrow{25}$	(107)	109	$\xleftarrow{19}$	113	$\xleftarrow{15}$	(127)	128	...			

Procédons de la même façon pour les puissances de 3 (mais en rouge!).

3	$\xrightarrow{2}$	5	7	$\xleftarrow{2}$	9										
9	(11)	$\xrightarrow{4}$	13	$\xrightarrow{8}$	17	19	$\xleftarrow{8}$	23	$\xleftarrow{4}$	27					
27	$\xrightarrow{2}$	29	(31)	$\xrightarrow{10}$	37	$\xrightarrow{14}$	41	(43)	$\xrightarrow{20}$	47	(53)				
			(59)	61	$\xleftarrow{20}$	67	$\xleftarrow{14}$	71	$\xleftarrow{10}$	(73)	79	$\xleftarrow{2}$	81	...	

On voit que les nombres premiers jumeaux<sup>3</sup> [3, 5] sont symétriques des jumeaux [5, 7] dans les puissances de 3. De même, les jumeaux [29, 31] sont symétriques des jumeaux [5, 7] dans les puissances de 3 (même si cela n'est pas apparu ci-dessus car on ne se préoccupait simplement à chaque fois que des puissances successives) : (29 = 27 + 2, 31 = 27 + 4 tandis que 7 = 9 - 2 et 5 = 9 - 4). L'infinitude des nombres premiers jumeaux est peut-être à chercher par là.

La maîtrise de la notion de *dimension fractale* permettrait sûrement d'avoir une compréhension précise des interactions qui existent entre les différentes structures fractales mises en évidence ci-dessus et des symétries qui en découlent.

De façon totalement anecdotique, j'ai été très surprise par la chose suivante : j'ai programmé la tortue Logo (langage de programmation graphique) de façon à ce qu'elle dessine les éléments de la séquence fractale générale, en avançant de leur valeur, et qu'elle tourne entre chaque valeur d'un angle de un degré. La tortue a dessiné... une spirale! Si on fait de même avec les valeurs d'une seule des séquences p-adiques, on obtient... un cercle. Tout cela est troublant.

---

<sup>3</sup>Des nombres premiers sont dits *jumeaux* si une différence de 2 les sépare.



## 3 Conjecture de Goldbach

### 3.1 Rappel de son énoncé

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce “*il semble que tout nombre entier supérieur à 2 soit la somme de trois nombres premiers*”. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente “*tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers*”.

### 3.2 Justification

Dès que l’on “s’attaque” à la conjecture de Goldbach, on est frappé par l’aspect symétrique du problème. Pourquoi y-a-t-il toujours deux nombres premiers, en symétrie-miroir (à égale distance de part et d’autre) d’un nombre (supérieur ou égal à 3) ?<sup>4</sup> Au début, j’avais en tête l’image d’un papier que l’on plierait autour du nombre  $x$ , à la recherche de la décomposition Goldbach de  $2x$ , un peu comme un éventail, mais irrégulièrement, chaque pliure coïncidant avec un nombre premier. C’est la lecture du fait que la courbe fractale du dragon correspondait au dessin que ferait la tranche d’un papier plié en se dépliant qui m’a amenée à faire ce lien entre les valuations  $p$ -adiques et les séquences fractales d’entiers. Laisant parler de cet aspect “symétrique” de la conjecture de Goldbach dans une communication de 1897 dont le texte est fourni en annexe.

Sur le schéma de la figure 1, trouver une décomposition Goldbach d’un nombre consiste à trouver deux droites à égale distance de part et d’autre d’un même point d’abscisse  $x$  telles que ces droites croisent les différents graphiques colorés correspondant à chaque nombre premier en des points tous d’ordonnée nulle sauf un d’ordonnée 1. Si la conjecture de Goldbach est vraie, on peut toujours trouver deux telles droites.

La conjecture est trivialement vérifiée pour les doubles de nombres premiers. Les deux droites sont confondues.

Quant aux nombres pairs qui ne sont pas double d’un premier, comment se fait-il qu’ils aient toujours au moins une décomposition Goldbach ?

---

<sup>4</sup>Est fournie en annexe 5 une représentation graphique d’une sorte de crible qui fournit les décompositions Goldbach des premiers entiers.

Pour l'expliquer, il faut découvrir d'où provient la "symétrie". Et pour cela, il faut faire un détour par les modulus.

Les séquences constituées des nombres qui sont les restes des entiers modulo un nombre premier ne sont pas fractales mais périodiques. La période est toujours la suite des nombres de 0 à  $p - 1$  qui se répète indéfiniment.

Cherchons par exemple les décompositions Goldbach de 28, constituées de deux nombres de part et d'autre de 14. Les nombres symétriques autour de 14 ont leurs restes modulo 5 (par exemple) qui obéissent au petit schéma symétrique suivant :

$$\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ | & | \\ 0 & 1 \end{array} 4\bigcirc$$

Modulo 11 (toujours pour 28, ou plus exactement 14), le schéma "symétrique" est :

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 5 & 4 & 9 & 10 \\ | & | & | & | & | \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{array} 3\bigcirc$$

Observons maintenant un tableau des modulus, dans lequel on a mis entre parenthèses les décompositions non Goldbach <sup>5</sup>. On a également coloré en vert les 0 qui sont des décompositions impossibles (tout facteur premier de  $x$  ne peut permettre d'obtenir une décomposition Goldbach de  $2x$ ).

mod	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	(2)	0	1	2	0	(1)	2	0	1	2	0	1	(2)	0	1
5			0	1	(2)	3	4	0	1	2	(3)	4	0	(1)	2	3	(4)	0	1	(2)	3	4	0	1	(2)	(3)
7				0	(1)	2	3	(4)	5	6	0	1	(2)	(3)	4	5	(6)	0	1	(2)	3	4	(5)	6	0	(3)
11									0	1	2	3	4	(5)	6	(7)	(8)	9	10	0	(1)	2	(3)	4	5	(6)
13										0	(1)	2	3	(4)	5	(6)	(7)	8	9	(10)	(11)	12	0	1	2	(3)
17													0	1	(2)	3	(4)	(5)	6	7	(8)	(9)	10	(11)	12	(13)
19														0	1	(2)	3	(4)	(5)	6	7	(8)	(9)	10	(11)	(12)
23															0	(1)	2	(3)	(4)	5	6	(7)	(8)	9	(10)	(11)
29																	0	(1)	(2)	3	4	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
31																										

<sup>5</sup>Ce tableau est le pendant de la représentation graphique fournie en annexe 5.

On voit que les décompositions non-Goldbach proviennent de la présence “en face” d’un nombre premier d’un nombre composé. Le nombre  $\Pi(x)$  peut être calculé par la formule de Legendre (cf. Annexe 5). On cherchera selon le même principe une formule qui fournit le nombre de décompositions Goldbach. Elle doit mesurer la façon dont les nombres symétriques autour d’un nombre peuvent être simultanément premiers.

Au début de ces recherches, je cherchais une “généralisation” de l’énoncé de la conjecture “tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers”. Cet énoncé plus général aurait été de la forme “tout nombre multiple de  $k$  (au lieu de pair) est la somme de  $k$  (au lieu de 2) nombres premiers”. Les découvertes présentées ici m’amènent au contraire à la conclusion que c’est la conjecture qui est la généralisation d’énoncés plus contraints, chacun de ces énoncés traitant d’un nombre premier seulement.

## 4 Conclusion

La répartition des nombres premiers au sein des entiers naturels semble chaotique. Pourtant, les différentes étapes (chacune correspondant à un nombre premier) de l’algorithme du crible d’Erathostène présentent chacune leur régularité propre. Il s’agirait donc d’un *chaos déterministe*. Cette régularité provient des différentes séquences fractales qui ont été mises ici en évidence. Nous avons également noté l’existence de séquences palindromes de valuations p-adiques, la structure symétrique de ces séquences les rend également régulières (même si non périodiques). On retrouve de telles fractales, de telles symétries, dans la nature. Pour illustrer cela, je citerai une anecdote : un jour, un enfant me proposa de me “montrer l’infini”... Il sortit un miroir de poche et le plaça face à un miroir accroché au mur. La suite de miroirs de plus en plus petits semblait ne jamais s’arrêter et l’enfant était émerveillé. La découverte de toutes ces symétries-miroir dans les séquences d’entiers est aussi fascinante. Les entiers *naturels* ont ainsi une structure aussi *naturelle* que peut l’être celle des structures fractales.

## Annexe 1 : extrait du texte de Laisant sur la figuration des nombres composés

A ces remarques sur les décompositions des nombres en facteurs, nous croyons devoir en ajouter une sur un mode de figuration fort simple et qui n'a cependant pas été signalé jusqu'ici, du moins à notre connaissance. Il y aurait peut-être lieu d'en tirer parti pour l'enseignement des premiers principes élémentaires relatifs à la décomposition des nombres en facteurs premiers, à la formation du plus grand commun diviseur et à celle du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.

Voici en quoi consiste cette figuration. Supposons que, un quadrillage indéfini étant tracé à la droite d'une ligne verticale, nous numérotions les bandes horizontales successives 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17..., en les affectant aux nombres premiers successifs. Si un nombre composé contient un facteur premier  $a$  à l'exposant  $i$ , on comptera  $i$  cases, à partir de la droite verticale, dans la bande qui représente le facteur  $a$ . L'ensemble des cases ainsi déterminées, et que l'on pourra limiter par le tracé du contour extérieur, figurera le nombre en question. Il est évident que ce tracé peut suivre parfois la ligne verticale origine, lorsque certains facteurs premiers font défaut, c'est à dire ont l'exposant zéro.

Nous nous bornons à donner comme exemple la figuration des nombres  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$  et  $16500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$  (fig. 1 et 2).

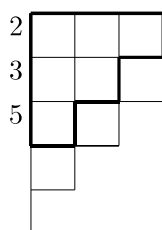


FIG. 1 –  $N = 360$

Ce mode de représentation met en relief d'une façon saisissante la formation des diviseurs, ou, ce qui revient au même, la décomposition en deux facteurs, dont nous avons parlé ci-dessus. Le nombre des diviseurs est

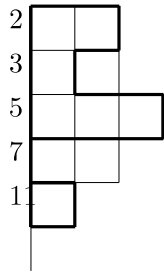


FIG. 2 –  $N = 16500$

évidemment égal au nombre des chemins différents qu'on peut suivre pour aller de la base inférieure à la base supérieure de la figure formée, en suivant toujours les lignes du quadrillage.

Le plus grand commun diviseur de deux nombres se trouve représenté par la partie commune des figures qui représentent ces deux nombres ; le plus petit commun multiple, par la figure limitée au contour extérieur dessinée par l'ensemble des deux figures. Nous donnons comme exemple (fig.3) le plus grand commun diviseur  $D$  des deux nombres  $N = 1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$  et  $N' = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ , leur plus grand commun diviseur  $D = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  et leur plus petit commun multiple  $p = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 41580$ , en figurant les deux nombres au moyen de carrés colorés.

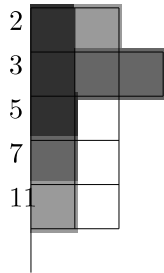


FIG. 3 – pgcd et ppcm

On comprend qu'en représentant par diverses valeurs plusieurs nombres, on peut ainsi figurer leurs diviseurs ou leurs multiples, soit d'ensemble, soit deux à deux. Par exemple, si trois nombres A, B, C sont figurés A en rouge, B en bleu et C en jaune, les plus grands communs diviseurs seront figurés celui de A et B par la partie violette, celui de B et C par la partie verte, celui de A et C par la partie orangée.

Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un caractère intuitif. Il suffit pour cela de remarquer que, lorsqu'un nombre  $A$  est multiple d'un autre nombre  $B$ , le contour de la figuration de  $A$  contient le contour de la figuration de  $B$ , et aussi que, lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux, les figurations des deux quelconques de ces nombres n'ont aucune partie commune.

Au fond, ce mode de figuration est en quelque sorte un système de numérotation dans lequel l'ordre d'un chiffre, à partir de la gauche par exemple, représenterait l'exposant. Ainsi, dans les exemples cités plus haut, les divers nombres s'écriraient comme suit : 360 s'écrirait 321, 16500 s'écrirait 21301, 1890 s'écrirait 1311, 660 s'écrirait 21101, 30 s'écrirait 111, 41580 s'écrirait 23111. Le produit de deux nombres, dans ce système, s'obtiendrait par l'addition des chiffres de même rang (et il est bien entendu qu'ici nous désignons par le mot *chiffres* des nombres qui peuvent devenir aussi grands qu'on voudra). La formation du plus petit commun multiple ou du plus grand commun diviseur est évidente ; et il apparaît non moins clairement, par exemple, que le produit de deux nombres est également le produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.

Tout nombre représenté par l'unité précédée d'un nombre quelconque de zéros est un nombre premier, et réciproquement.

Tout nombre dont les chiffres sont pairs est un carré.

Nous croyons devoir borner là ces observations, trop simples pour mériter d'être plus complètement développées.

## Annexe 2 : extrait de la communication de Laisant “Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach”

Ce fameux théorème empirique : *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l’objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d’établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l’a vérifiée numériquement jusqu’à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités.

Voici un procédé qui permettrait de faire sans calculs la vérification expérimentale dont il s’agit, et d’avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d’une figure, toutes les décompositions.

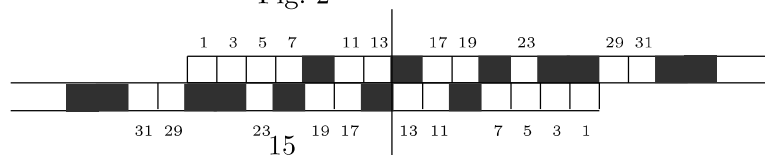
Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d’Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu’à une limite quelconque  $2n - 1$ .

Fig. 1



Si l’on a construit deux réglettes pareilles, et si l’on place la seconde au dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case 1 à  $2n - 1$ , il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour  $2n$ , il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre 28 donnera la figure 2 et montrera qu’on a les décompositions  $28 = 5 + 23 = 11 + 17$ .

Fig. 2



On comprend que les réglettes étant construites à l'avance, et un simple glissement permettant de passer d'un nombre à un autre, les vérifications sont très rapides.

### Annexe 3 : L''empilement'' des valuations p-adiques''

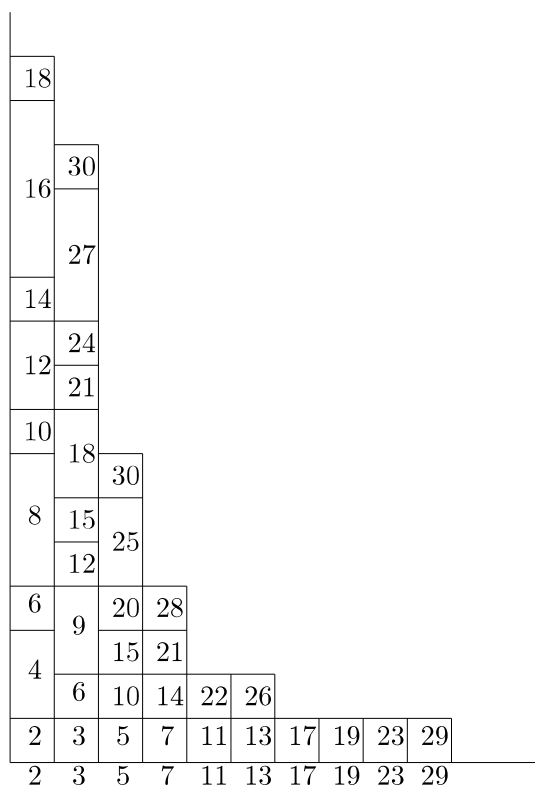


FIG. 4 – Courbe hyperbolique d'équation  $xy = n \log(n)$



## Annexe 4 : Calcul de $\Pi(x)$

Pour calculer  $\Pi(100)^6$ , connaissant les nombres premiers inférieurs à sa racine carrée 10, et qui sont 2, 3, 5, 7, on doit faire le calcul suivant :

$$\frac{100}{2} + \frac{100}{3} - \frac{100}{2 \times 3} + \frac{100}{5} - \frac{100}{2 \times 5} - \frac{100}{3 \times 5} + \frac{100}{7} - \frac{100}{2 \times 7} - \frac{100}{3 \times 7} - \frac{100}{5 \times 7} - 5$$

En ramenant au même dénominateur, on doit calculer :

$$100 \times \frac{3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 - 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 - 3 \times 7 - 2 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 - 3 \times 5 - 2 \times 5 - 2 \times 3}{2 \times 3 \times 5 \times 7} - 5 = 25$$

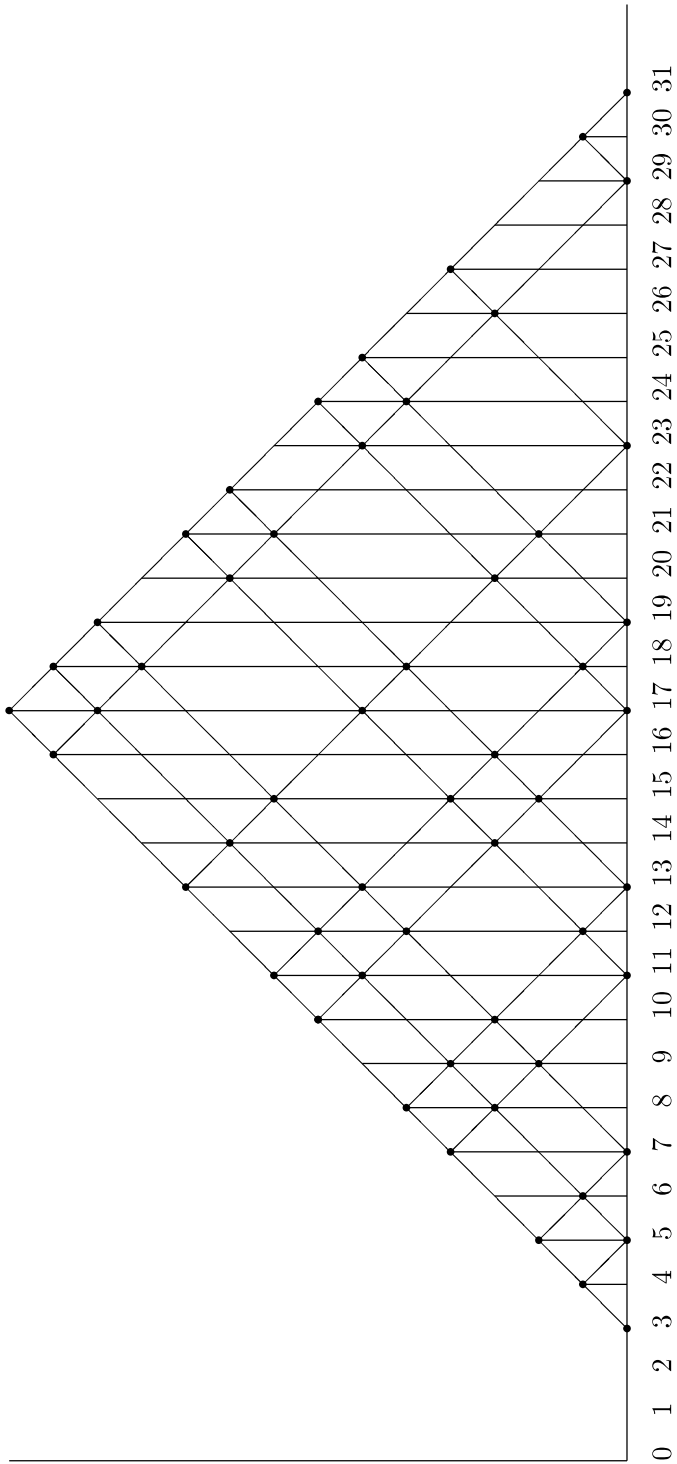
Cette méthode de calcul contenant au dénominateur une “primorielle” (sorte de factorielle dans laquelle n’interviennent que des nombres premiers) et au numérateur des produits combinatoires est rédhibitoire du fait de la taille des nombres à calculer.<sup>7</sup>

## Annexe 5 : le crible Goldbach

---

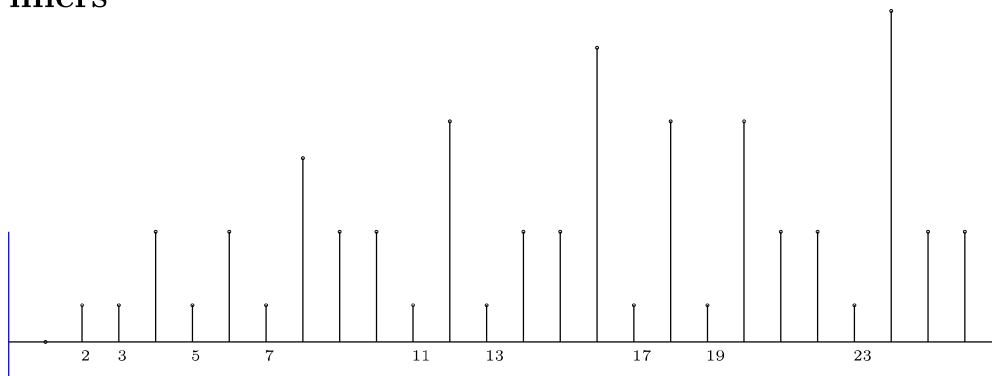
<sup>6</sup> $\Pi(x)$  est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à  $x$

<sup>7</sup>J’étais très fière d’avoir trouvé cette formule, mais je me suis rendue compte en fouillant la toile que Legendre l’avait trouvée aussi!!



*Décompositions Goldbach sous la forme  $x = \frac{p_1+p_2}{2}$*

## Annexe 6 : la séquence fractale des nombres premiers



La séquence fractale des nombres premiers (de dimension fonction de la primorielle?)