Transcriptions et traductions (Denise Vella-Chemla, décembre 2020)

Ce document contient plusieurs transcriptions et traductions que j'ai effectuées ces dernières années.

Cependant, j'ai trouvé un certain nombre de coquilles à la relecture ; je les ai corrigées mais j'ai pu parfois oublier de les intégrer à cette version "compilation" des différents fichiers.

Il vaudra donc mieux se reporter à ce document :

http://denisevellachemla.eu/AC-bibliotex.pdf

qui donne accès à la dernière version de chaque fichier séparé.

Leçon inaugurale d'Alain Connes au Collège de France.

Traduction d'une nouvelle preuve du Théorème de Morley d'A. Connes.

Critique dans les AMS du livre Noncommutative geometry par Ingrid Segal.

Alain Connes : Formule de Trace en géométrie non-commutative et zéros de la fonction zêta de Riemann.

Jean-Benoît Bost, Alain Connes : Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec brisure spontanée de symétrie en théorie des nombres.

Paul Dirac : La théorie quantique de l'émission et de l'absorption de radiation.

Alain Connes : Cohomologie cyclique et géométrie différentielle non-commutative.

Alain Connes, Alain Prochiantz : L'imagination et l'infini.

Alain Connes : Les mathématiques et la pensée en mouvement.

Alain Connes : Un topo sur les topos.

Traduction de "Conseils au débutant, par Alain Connes" dans *Princeton companion to mathematics*, de Timothy Gowers.

Alain Connes, Jacques Dixmier : Mes rencontres avec Jacques.

La géométrie de l'incertitude (article de Dana Mackenzie), © La Recherche n° 307.

Alain Connes : La vérité est mathématique (© Tangente, août-septembre 2000.

Extrait de *Mathématiques, un dépaysement soudain* et du livre *Les déchiffreurs* (©).

Point de vue d'Alain Connes, Dossier Les mathématiciens d'un ancien magazine Pour la Science (©).

Article du magazine numérique Futura Sciences suite à l'obtention de la médaille d'or du CNRS en 2004 (©).

L'imagination joue un rôle crucial en mathématiques (article de Libération en 2001).

Une réalité archaïque précède les concepts (Les Dossiers de La Recherche n° 20, Mathématiques, nouveaux défis et vieux casse-têtes, août-octobre 2005).

Alain Connes interviewé en Iran par M. Khalkhali et G.B. Khosrovshahi.

Alain Connes interviewé par Catherine Goldstein et Georges Skandalis pour la Société mathématique européenne en 2008.

COLLÈGE DE FRANCE

CHAIRE D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE

LEÇON INAUGURALE

faite le Vendredi 11 janvier 1985

PAR

M. Alain CONNES

Professeur

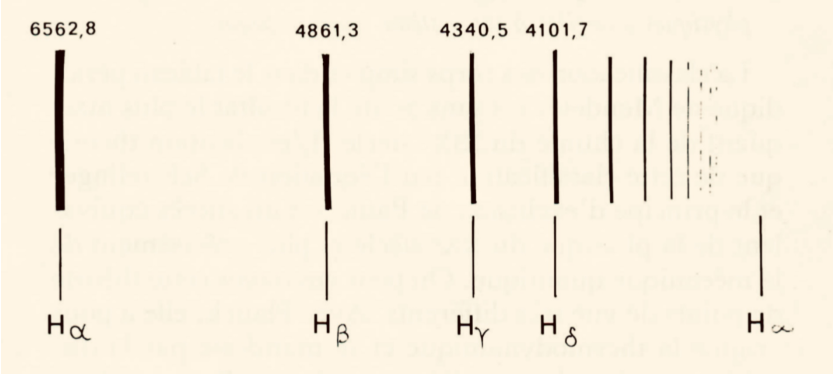
Monsieur l'Administrateur, mes chers Collègues, Mesdames et Messieurs, je m'efforcerai, dans l'exposé que je vais faire, d'abord de mettre en évidence grâce à la mécanique statistique quantique, l'interaction qui existe entre physique théorique et mathématiques pures dans le domaine spécialisé des algèbres d'opérateurs. J'essaierai ensuite de montrer le rôle en géométrie de ces mêmes algèbres d'opérateurs. J'aborderai, enfin, les problèmes attachés à la notion usuelle d'espace géométrique quand on essaie de réconcilier la théorie quantique et la relativité.

I. *Heisenberg et l'algèbre non commutative des quantités physiques associées à un système microscopique.*

La classification des corps simples dans le tableau périodique de Mendeleïev est sans doute le résultat le plus marquant de la chimie du XIXe siècle. L'explication théorique de cette classification par l'équation de Schrödinger et le principe d'exclusion de Pauli, est un succès équivalent de la physique du XXe siècle et plus précisément de la mécanique quantique. On peut envisager cette théorie de points de vue très différents. Avec Planck, elle a pour origine la thermodynamique et se manifeste par la discrétisation des niveaux d'énergie des oscillateurs. Avec Bohr, c'est la discrétisation du moment angulaire. Pour de Broglie et Schrödinger, c'est l'aspect ondulatoire de la matière. Ces divers points de vue sont tous des corollaires de celui de Heisenberg : *l'algèbre non commutative des quantité physiques*. Mon premier but sera de montrer combien ce dernier point de vue est proche de la réalité expérimentale.

Vers la fin du XIXe siècle, de nombreux travaux expérimentaux ont permis de déterminer avec précision les raies du spectre d'émission des atomes qui composent les corps simples. On considère un tube de Geissler rempli d'un gaz tel que l'hydrogène. La lumière émise par le tube est analysée à l'aide d'un spectromètre, le plus simple étant le prisme, et l'on obtient un certain nombre de raies, indexées par leurs longueurs d'onde. La configuration ainsi

obtenue est la source la plus directe d'information sur la structure atomique. Elle ne dépend que du corps simple considéré et le caractérise. Il est donc essentiel de trouver les régularités qui apparaissent dans ces configurations ou *spectres atomiques*. C'est l'hydrogène qui, conformément au tableau de Mendeleïev, a le spectre le plus simple.



L'expression numérique de la régularité des raies $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \ldots$ a été obtenue par Balmer en 1885 sous la forme :

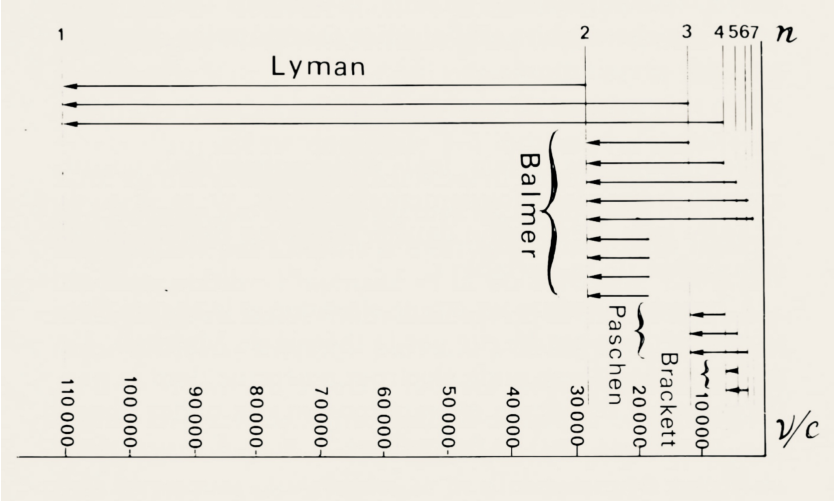
$$H_\alpha = 9/5L, H_\beta = 16/12L, H_\gamma = 25/21L, H_\delta = 36/32L$$

où la longueur L vaut approximativement $3645,6 \times 10^{-8}$ cm. Autrement dit, les longueurs d'onde ci-dessus sont de la forme $\lambda = \dfrac{n^2}{n^2-4}L$ où n est un entier égal à 3, 4, 5 ou 6.

Vers 1890, Rydberg montra que pour des atomes complexes, les raies du spectre peuvent se classifier en séries, chacune d'elles étant de la forme $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{R}{m^2} - \dfrac{R}{n^2}$ avec n et m entiers, m fixe.

Ici, $R = 4/L$ est la constante de Rydberg. De cette découverte expérimentale on déduira que, d'une part la fréquence $\nu = c/\lambda$ est un paramètre plus naturel que la longueur d'onde λ pour indexer les raies du spectre, et d'autre part que le spectre est un ensemble de différences, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble I de fréquences tel que le spectre soit l'ensemble des diffé-

rences $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$ entre des couples arbitraires ν_i, ν_j d'éléments de I. Cette propriété montre que l'on peut combiner les fréquences ν_{ij} et ν_{jk} pour en obtenir une troisième $\nu_{ij} + \nu_{jk} = \nu_{ik}$. Ce corollaire important est le principe de composition de Ritz Rydberg, le spectre est doté naturellement d'une loi de composition partiellement définie, la somme de certaines fréquences du spectre est encore une fréquence du spectre.



Or ces résultats expérimentaux ne pouvaient s'expliquer dans le cadre de la physique théorique du XIXe siècle, basée sur la mécanique de Newton et l'électromagnétisme de Maxwell. En effet si l'on applique la conception classique de la mécanique au niveau microscopique, un atome est alors décrit mathématiquement par l'espace des phases et l'Hamiltonien. L'espace des phases X est une variété symplectique dont les points sont les «états» du système. L'Hamiltonien H est une fonction sur X qui intervient pour spécifier l'évolution de toute quantité physique observable, i. e. de toute fonction f sur X, par l'équation

$$\frac{d}{dt} f = \{H, f\}$$

où $\{\ \}$ désigne le crochet de Poisson.

Dans les bons cas, comme par exemple pour le modèle planétaire de

l'atome d'hydrogène, le système dynamique obtenu est totalement intégrable. Cela signifie qu'il a suffisamment de «constantes du mouvement» pour qu'en les spécifiant on réduise le système à un mouvement presque périodique. La description d'un tel système se fait très simplement, en effet, d'une part l'algèbre des quantités observables est l'algèbre commutative des séries presque périodiques :

$$q(t) = \Sigma_{q_{n_1,\ldots,n_k}} \exp 2\pi i \langle n, \nu \rangle \; t$$

où les n_i sont des entiers, les ν_i des nombres récl positifs appelés fréquences fondamentales et $\langle n, \nu \rangle = \sum \; n_i \; \nu_i$. D'autre part, l'évolution dans le temps est donnée par la translation de la variable t.

L'interaction entre un atome classique et le champ électromagnétique est décrite par la théorie de Maxwell. Un tel atome émet une onde électromagnétique dont la partie radiative se calcule en superposant des ondes planes $W_n, n = (n_1, \ldots, n_k)$ de fréquences $\langle n, \nu \rangle = \sum \; n_i \; \nu_i$, et dont l'amplitude et la polarisation se calculent simplement à partir de l'observable fondamentale qui est le moment dipolaire.

Le moment dipolaire Q a trois composantes Q_x, Q_y et Q_z qui sont chacune des quantités observables :

$$Q_x(t) = \Sigma q_{x,n} \exp 2\pi i \; \langle n, \nu \rangle t$$

et qui donnent l'intensité de la radiation émise de fréquence $\langle n, \nu \rangle$ par l'égalité

$$I = \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3} \; |2\pi \langle n, \nu \rangle|^4 \; (|q_{x,n}|^2 \; + \; |q_{y,n}|^2 \; + \; |q_{z,n}|^2)$$

où c désigne la vitesse de la lumière.

Il en résulte en particulier que l'ensemble des fréquences des radiations émises est un sous-groupe additif $\Gamma \subset \mathbb{R}$ des nombres réels. Ainsi à chaque fréquence émise correspondent tous ses multiples entiers ou harmoniques.

En fait, la spectroscopie et ses nombreux résultats expérimentaux montre que ce dernier résultat théorique est contredit par l'expérience, l'ensemble des fréquences émises par un atome ne forme pas un groupe, il est faux que l'addition de deux fréquences arbitraires en soit encore une. Ce que dicte l'expérience c'est le principe de composition de Ritz Rydberg qui permet d'indexer les raies spectrales par l'ensemble Δ de tous les couples (i, j) d'éléments d'un même ensemble I d'indices. La théorie de Bohr en discrétisant artificiellement le moment angulaire de l'électron parvenait à prédire les fréquences des radiations émises par l'atome d'hydrogène mais était incapable d'en prédire l'intensité et la polarisation. C'est par une remise en cause fondamentale de la mécanique classique qu'Heisenberg est parvenu à ce but, et à aller bien au-delà de ce qu'avaient fait ses prédécesseurs. Cette remise en cause de la mécanique classique est à peu près la suivante : dans le modèle classique, l'algèbre des quantités physiques observables se lit directement à partir du *groupe* Γ des fréquences émises, c'est l'algèbre de convolution de ce groupe de fréquences. Comme Γ est un groupe commutatif, cette algèbre est commutative. Or dans la réalité on n'a pas affaire à un groupe de fréquences, mais à cause de la règle de composition de Ritz Rydberg, on a affaire au groupoïde $\Delta = \{(i, j); i, j \in I\}$ avec la règle de composition $(i, j).(j, k) = (i, k)$. L'algèbre de convolution garde encore un sens quand on passe d'un groupe à un groupoïde, et l'algèbre de convolution du groupoïde Δ n'est autre que *l'algèbre des matrices*, le produit de convolution s'écrit en effet

$$(a.b)_{(i,k)} = \sum_j a_{(i,j)} b_{(j,k)}$$

ce qui est identique à la règle de composition des matrices.

En remplaçant l'algèbre commutative de convolution du groupe Γ par l'algèbre non commutative de convolution du groupoïde Δ dicté par l'expérience, Heisenberg a remplacé la mécanique classique dans laquelle des quan-

tités observables commutent deux à deux par la *mécanique des matrices*, dans laquelle des quantités observables aussi importantes que la position et le moment ne commutent plus. Dans la mécanique des matrices de Heisenberg, une quantité physique observable est donnée par ses coefficients $q_{(i,j)}$ indexés par le groupoïde Δ et l'évolution dans le temps d'une observable est donnée par l'homomorphisme $(i,j) \in \Delta \to \nu_{ij} \in \mathbb{R}$ de Δ dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque raie spectrale sa fréquence, on a :

$$(*) \qquad q_{(i,j)}(t) = q_{(i,j)} \exp 2\pi i(\nu_{ij})\, t$$

Cette formule est l'analogue de la formule classique

$$q_{n_1,\ldots,n_k}(t) = q_{n_1,\ldots,n_k} \exp 2\pi i\langle n, \nu\rangle\, t$$

Pour obtenir l'analogue de la loi d'évolution de Hamilton,

$$\frac{d}{dt}q = \{H, q\}$$

on définit une quantité physique particulière, H, qui joue le rôle de l'énergie classique et est donnée par ses coefficients $H_{(i,j)}$, avec :

$$H_{(i,j)} = 0 \text{ si } i \neq j, H_{(i,i)} = h\nu_i \text{ où } \nu_i - \nu_j = \nu_{ij} \forall i, j \in I$$

où h est la constante de Planck qui permet de convertir fréquences en énergies. On voit que H est définie uniquement à addition près d'un multiple de la matrice identité et de plus la formule (*) ci-dessus est équivalente à

$$(**) \qquad \frac{d}{dt}q = \frac{2\pi i}{h}(Hq - qH).$$

Cette équation est semblable à celle de Hamilton qui utilisait les crochets de Poisson. Elle est en fait encore plus simple puisqu'elle n'utilise que le

produit des observables, et plus spécifiquement le commutateur, $[A, B] = AB - BA$ qui joue le rôle que jouait le crochet de Poisson en mécanique Hamiltonienne. Par analogie avec la mécanique classique, on impose aux observables q de position et p de moment de vérifier $[p, q] = i\hbar$ où $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$. La forme algébrique simple de l'énergie classique comme fonction de p et q donne alors l'équation de Schrödinger pour déterminer l'ensemble $\{\nu_i, i \in I\}$ ou spectre de H.

II. *État statistique d'un système macroscopique et mécanique statistique quantique.*

Un centimètre cube d'eau contient un nombre considérable, de l'ordre de $N = 10^{23}$, de molécules d'eau agitées d'un mouvement incessant. La description détaillée du mouvement de chaque molécule, de même que la connaissance précise de l'état microscopique du système, n'est pas nécessaire pour déterminer les résultats des observations macroscopiques. En mécanique statistique classique, un état microscopique du système est représenté par un point de l'espace des phases qui est de dimension $6N$ pour N molécules ponctuelles. Un état statistique est décrit non par un point de l'espace des phases mais par une mesure μ sur cet espace qui à chaque obervable f associe sa valeur moyenne

$$\int f \, d\mu$$

Pour un système maintenu à température fixe en le plongeant dans un thermostat, la mesure μ est appelée ensemble canonique de Gibbs et est donnée par une formule qui invoque l'Hamiltomien H du système et la mesure de Liouville qui provient de la structure symplectique de l'espace des phases. On pose

$$d\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \times \text{ Mesure de Liouville}$$

où $\beta = 1/kT$, T étant la température absolue et k la constante de Boltzmann

qui vaut environ $1,38 \times 10^{-23}$ joules par degré Kelvin.

Les grandeurs thermodynamiques telles que l'entropie ou l'énergie libre se calculent en fonction de β et d'un petit nombre de paramètres macroscopiques introduits dans la formule qui donne l'Hamiltomien H. Pour un système fini l'énergie libre est une fonction analytique de ces paramètres. Pour un système infini des discontinuités apparaissent, ce qui correspond au phénomène de transition de phase. La démonstration rigoureuse, à partir de la formule mathématique qui spécifie H, de l'absence ou de l'existence de ces discontinuités est une branche difficile de l'analyse mathématique.

Mais, comme nous l'avons vu, la description microscopique de la matière ne peut se faire sans la mécanique quantique. Considérons, pour fixer les idées, un solide ayant un atome en chaque maille d'un réseau cristallin $\mathbb{Z}^3$. L'algèbre des grandeurs physiques observables associées à chaque atome $x = (x_1, x_2, x_3)$ est une algèbre de matrices Q_x et si l'on suppose pour simplifier que ces atomes sont de même nature et ne peuvent occuper qu'un nombre fini n d'états quantiques, on a alors $Q_x = M_n(\mathbb{C})$ pour tout x. Soit alors Λ une partie finie du réseau, l'algèbre Q_Λ des grandeurs physiques observables pour le système formé par les atomes contenus dans Λ, est donnée par le produit tensoriel

$$Q_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} Q_x$$

L'Hamiltonien H_Λ de ce système fini est une matrice autoadjointe $H_\Lambda \in Q_\Lambda$ Q_n qui est typiquement de la forme :

$$H_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} H_x + \lambda H_{\text{int}}$$

où le premier terme correspond à l'absence d'interactions entre atomes distincts et où λ est une constante de couplage qui gouverne l'intensité de l'interaction. Un état statistique du système fini Λ est donné par une forme linéaire Φ qui associe à toute observable $A \in Q_\Lambda$ sa valeur moyenne $\Phi(A)$ et

qui a les mêmes propriétés de positivité et de normalisation qu'une mesure de probabilité μ, à savoir

$\alpha)$ *Positivité* : $\Phi(A^*A) > 0 \quad \forall A \in Q_\Lambda$

$\beta)$ *Normalisation* : $\Phi(1) = 1$

Si l'on maintient le système à température fixe égale à T, l'état d'équilibre est donné par l'analogue quantique de la formule ci-dessus

$$\Phi_\Lambda(A) = \frac{1}{Z}\text{trace}(e^{-\beta H_\Lambda}A) \quad \forall A \in Q_\Lambda$$

où l'unique trace sur l'algèbre Q_Λ remplace la mesure de Liouville. Comme en mécanique statistique classique, les phénomènes intéressants se manifestent quand on passe à la limite thermodynamique, c'est-à-dire quand $\Lambda \to \mathbb{Z}^3$. Un état du système infini est donné par la famille (Φ_Λ) de ses restrictions aux systèmes finis indexés par Λ, on obtient ainsi toutes les familles (Φ_Λ) telles que :

a) Pour tout Λ, Φ_Λ est un état sur Q_Λ

b) Pour $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, la restriction de Φ_{Λ_2} à Q_{Λ_1} est égale à Φ_{Λ_1}.

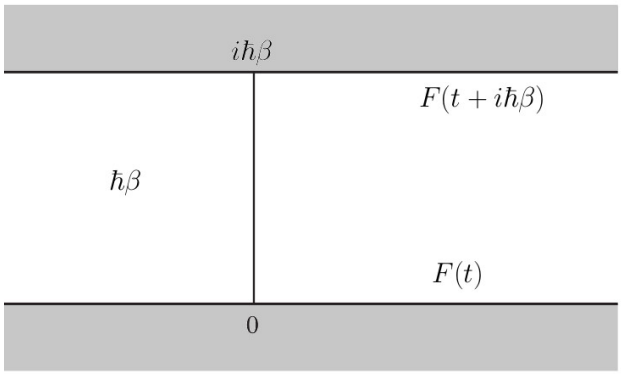
En général la famille Φ_Λ définie ci-dessus à partir de $\exp(-\beta H_\Lambda)$ ne vérifie pas la condition b) et il est nécessaire de mieux comprendre la notion d'état d'un système infini. C'est ici que les C^* algèbres font leur apparition : En effet, si l'on prend la limite inductive Q des C^* algèbres de dimension finie Q_Λ on obtient une C^* algèbre qui a la propriété suivante :

Un état arbitraire Φ sur Q est donné par une famille (Φ_Λ) vérifiant les conditions a) et b). Ainsi les familles (Φ_Λ) vérifiant a) et b), c'est-à-dire les états du système infini sont en correspondance bijective naturelle avec les états de la C^* algèbre Q. De plus, la famille H_Λ détermine de manière unique un groupe à un paramètre (α_t) d'automorphismes de la C^* algèbre Q par l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(A) = \text{Lim}_{\Lambda\to\mathbb{Z}^3}\frac{2\pi i}{h}[H_\Lambda, A] \qquad A \in \cup\, Q_\Lambda$$

Ce groupe à un paramètre donne l'évolution dans le temps des observables du système infini données par les éléments A de Q, et est calculé par passage à la limite à partir de la formule de Heisenberg. Pour un système fini, maintenu à température T, la formule donne l'état d'équilibre de manière unique en fonction de H_Λ, mais à la limite thermodynamique on ne peut avoir de correspondance trop simple entre l'Hamiltonien du système, ou si l'on préfère le groupe d'évolution dans le temps, et l'état d'équilibre de ce système. En effet, lors des transitions de phases, des états distincts peuvent coexister, ce qui exclut l'unicité de l'état d'équilibre en fonction du groupe (α_t). Il est impossible de donner une formule simple qui définirait de manière univoque l'état d'équilibre en fonction du groupe à un paramètre (α_t). Il existe par contre une relation entre un état Φ sur Q et le groupe à un paramètre (α_t) qui ne spécifie pas toujours uniquement Φ connaissant (α_t) mais qui est l'analogue de la formule. Cette relation est *la condition de Kubo-Martin-Schwinger* : étant donné T, un état Φ sur Q et le groupe à un paramètre (α_t) d'automorphismes de Q vérifient la condition KMS si et seulement si pour tout couple A, B d'éléments de Q il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans la bande $\{z \in \mathbb{C}\ ; \mathrm{Im}\ z \in [0, \hbar\beta]\}$ où $\beta = \dfrac{1}{kT}$, telle que

$$F(t) = \Phi(A\ \alpha_t(B)) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$F(t\ +\ i\ \hbar\beta) = \Phi(\alpha_t(B)A) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$



Ici t est un paramètre de temps, de même que $\hbar\beta$ qui pour $T = 1000°$ Kelvin vaut environ 10^{-8} secondes.

Cette condition permet de formuler mathématiquement en mécanique statistique quantique le problème de la coexistence de phases distinctes à température T donnée, c'est-à-dire le problème de l'unicité de Φ, étant donné (α_t) et β. Cette même condition a joué un rôle essentiel dans la théorie modulaire des algèbres d'opérateurs et est ainsi devenue un point d'interaction indiscutable entre physique théorique et mathématiques pures.

III. *Théorie de Tomita et classification des facteurs hyperfinis.*

Entre 1957 et 1967, un mathématicien japonais Minoru Tomita, motivé en particulier par l'analyse harmonique des groupes localement compacts non unimodulaires a démontré un théorème d'une importance considérable pour la théorie des algèbres de von Neumann. Une telle algèbre est une sous-algèbre involutive de l'algèbre des opérateurs dans un espace de Hilbert h, qui a la propriété d'être le commutant de son commutant $(M')' = M$.
Théorème de Tomita. Soient M une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert h et $\xi \in h$ un vecteur tel que $M\xi$ et $M'\xi$ soient denses dans h. Soit S l'opérateur $x\xi \to x^*\xi \quad \forall x \in M$ alors,

1) *S est fermable et $S^{-1} = S$.*
2) *La phase J de S vérifie $JMJ = M'$.*
3) *Le module Δ de S vérifie $\Delta^{it}\ M\ \Delta^{-it} = M \quad \forall t \in \mathbb{R}$.*

Ainsi à tout état φ sur M on associe un groupe à un paramètre σ_t^{φ} d'automorphismes de M, le groupe *d'automorphismes modulaires* de φ. C'est exactement en ce point que se produit l'interaction entre physique théorique et mathématiques pures, en effet, M. Takesaki et M. Winnink ont montré simultanément que le lien entre l'état φ et le groupe à un paramètre σ_{-t}^{φ} du théorème de Tomita est exactement la condition KMS pour $\hbar\beta = 1$.

Le théorème de Tomita s'est montré d'une importance considérable pour

démarrer la classification des facteurs, ainsi que les travaux de R. Powers, d'Araki et Woods sur les facteurs produits tensoriels infinis, i. e. ceux qui proviennent de systèmes statistiques quantiques sans interaction.

Une algèbre de von Neumann M est loin d'avoir un seul état φ, ce qui fait que seules les propriétés de σ_t^φ qui ne dépendent pas du choix de φ ont une véritable signification pour M. Le second résultat important est le suivant *Théorème.* $\forall \varphi, \psi$ *états sur* M. *Il existe un 1-cocycle canonique* $t \to U_t \in M$ *avec*

$$\sigma_t^\psi(x) = U_t \sigma_t^\varphi(x)\, U_t^* \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, $\left(\dfrac{d}{dt} U_t\right)_{t=0}$ coïncide :

1) Dans le cas commutatif avec la dérivée de Radon Nikodym $\log d\psi/d\varphi$.
2) Dans le cas de la mécanique statistique avec la différence des Hamiltoniens correspondants à deux états d'équilibre.

Corollaire.

a) *Étant donnée une algèbre de von Neumann* M *il existe un homomorphisme* δ *canonique de* $\mathbb{R}$ *dans* Out $M =$ Aut $M/$Int M
b) $Ker\ \delta = T(M)$ *est un invariant de* M.
c) $Sp\ \delta = S(M) = \cap\ Sp\ \Delta_\varphi$.

Ainsi les algèbres de von Neumann sont des objets *dynamiques*, une telle algèbre a automatiquement un groupe de classe d'automorphismes, paramétré par $\mathbb{R}$, et qui est trivial si et seulement si l'algèbre n'est pas de type III. Dix-sept ans après le théorème de Tomita, nous disposons d'une classification complète de toutes les algèbres de von Neumann hyperfinies. Au lieu de donner une définition de cette classe notons simplement que

1) Si G est un groupe de Lie connexe et $\pi \in$ Rep G une représentation unitaire de G alors $\pi(G)'$ est hyperfinie.
2) Si Γ est un groupe discret moyennable, et $\pi \in$ Rep Γ alors $\pi(\Gamma)'$ est hyperfinie.

3) Si A est une C^* algèbre limite inductive d'algèbres de dimension finie et $\pi \in \text{Rep } A$ alors $\pi(A)''$ est hyperfinie.

De plus, toute algèbre de von Neumann hyperfinie apparaît déjà dans chacune des listes 1) 2) et 3). La classification des algèbres de von Neumann hyperfinies est d'abord ramenée en écrivant $M = \int_{\oplus} M_t d\mu(t)$ à celle des facteurs, i.e. Centre $M = \mathbb{C}$. Elle est alors la suivante,

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I_n} & M = M_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{I}_\infty & M = L(h) \\
\mathrm{II}_1 & R = \text{Cliff(E)}, \text{E espace Euclidien} \\
\mathrm{II}_\infty & R_{0,1} = R \otimes \mathrm{I}_\infty \\
\mathrm{III}_\lambda & R_\lambda = \otimes_{\lambda=1}^{\infty}(M_2(\mathbb{C}), \varphi_\lambda) \\
\mathrm{III}_1 & R_\infty = R_{\lambda_1} \otimes R_{\lambda_2} \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1/\lambda_2 \notin Q \\
\mathrm{III}_0 & R_W W \text{ flot ergodique}
\end{array}
$$

Le cas III_1 était le seul qui restait à élucider. U. Haagerup a montré récemment que tous les facteurs hyperfinis de type III_1 sont isomorphes.

IV. *Rôle des algèbres d'opérateurs en géométrie.*

Quand on spécialise la théorie des algèbres de von Neumann au cas très simple des *algèbres commutatives* on obtient la théorie de la mesure au sens de Lebesgue. Plus précisément, toute algèbre de von Neumann commutative M dans l'espace de Hilbert (séparable) h est engendrée par un opérateur autoadjoint H et M est le bicommutant de H.

$$
\begin{aligned}
& M = \{H\}'' = \{T \in L(h), UTU^{-1} = T \qquad \forall U, U \in L(h)\} \\
& U^*U = UU^* = 1, UHU^{-1} = H
\end{aligned}
$$

De plus, pour toute fonction borélienne bornée f sur $X = \text{Sp } H \subset \mathbb{R}$, l'opérateur $f(H)$ a un sens, comme limite faible de polynômes $P(H)$, et

s'annule si et seulement si f est nulle presque partout pour la *mesure spectrale* de H. On obtient de cette manière un isomorphisme entre M et l'algèbre des fonctions mesurables essentiellement bornées sur le spectre de H. La théorie générale des algèbres de von Neumann apparaît ainsi comme un analogue non commutatif de la théorie de Lebesgue. L'importance mathématique de la théorie générale des algèbres de von Neumann résulte de l'existence d'espaces naturels pour lesquels la théorie de Lebesgue est inadaptée, et conduit à considérer de tels espaces comme pathologiques. La théorie des algèbres de von Neumann permet par contre de traiter la théorie de la mesure de ces espaces de manière très satisfaisante. Le prototype d'un tel espace est l'espace X des solutions d'une équation différentielle ou feuilles d'un feuilletage. Pour fixer les idées, considérons un exemple, le feuilletage de Kronecker $dy = \theta dx$ sur le tore T^2. Si l'on essaye d'analyser cet espace, du point de vue de la théorie de la mesure, comme un espace ordinaire, on obtient un résultat pathologique : toute fonction mesurable f de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est presque partout égale à une constante. Ainsi $L^\infty(X,\mu)$ ou $L^p(X,\mu)$ sont réduits à $\mathbb{C}$ et ne distinguent en rien l'espace X d'un point. En fait, à X correspond une algèbre de von Neumann non triviale dont le *centre* est réduit à $\mathbb{C}$. Alors qu'il n'est pas possible de construire une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ qui soit mesurable et non presque partout constante, il est très facile de construire une application q qui à chaque $x \in X$ associe un opérateur q_x das l'espace L^2 de la feuille indexée par x et qui soit :

a) Mesurable.

b) Non presque partout constante.

On obtient une algèbre de von Neumann en utilisant les règles algébriques évidentes,

$$(pq)_x = p_x q_x \qquad \forall x \in X$$
$$(p^*)_x = p_x^* \qquad \forall x \in X$$

et la norme : $\|p\| = \text{Sup essentiel}_{x\in X}\|p_x\|$. Dans l'exemple indiqué, l'algèbre

de von Neumann est le facteur hyperfini $R_{0,1}$ quand $\theta \notin \mathbb{Q}$. Le facteur R_∞ de type III_1 apparaît dans l'exemple du feuilletage d'Anosov associé à une surface de Riemann de genre > 1. La théorie de la dimension de Murray et von Neumann permet de mesurer (dans le cas où l'algèbre de von Neumann est de type II) par un nombre réel positif, la dimension de l'espace des solutions L^2 d'une équation aux dérivées partielles elliptique le long des feuilles du feuilletage. Des entiers tels le nombre de pôles moins le nombre de zéros pour des fonctions méromorphes sur des variétés compactes sont alors remplacés par des densités, qui sont des nombres réels. En particulier, la *dimension continue* de Murray et von Neumann acquiert sa vraie signification de *densité de dimension*, très éloignée par exemple des dimensions de Hausdorff.

Mais des espaces tels que l'espace des feuilles d'un feuilletage ci-dessus ont en fait une structure beaucoup plus riche et rigide que celle qui leur est donnée par la théorie de la mesure, Dans la hiérarchie des moyens qui sont à notre disposition pour analyser un espace classique, la théorie de la mesure occupe en effet la place la plus primitive. Un espace ordinaire n'acquiert de connexité, de linéarité infinitésimale, et de géométrie que grâce aux théories suivantes :

(2) Topologie algébrique.
(3) Variétés différentiables.
(4) Géométrie Riemannienne.

Pour pouvoir adapter valablement ces trois outils aux espaces qui nous intéressent, il était nécessaire de disposer d'exemples à la fois simples, non triviaux et suffisamment généraux, possédant manifestement l'analogue de (2) (3) et (4). Outre les espaces de feuilles de feuilletages de tels exemples proviennent de :

a) Groupes discrets.
b) Action d'un groupe de Lie (compact ou non) sur une variété.

Il n'est raisonnable de parler de l'espace, au sens classique, ensembliste, du

terme, des représentations irréductibles d'un groupe (discret) Γ que quand ce groupe est de type I. Or, cela n'arrive, en supposant que Γ est de type fini, que si Γ contient un sous-groupe normal commutatif d'indice fini. Quand le groupe Γ est commutatif, l'espace X dual de Γ est un espace compact dont la topologie est entièrement décrite grâce au théorème de Gel'fand par la C^* algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeur complexes sur X. Or, cette C^* algèbre est égale à la C^* algèbre de convolution $C^*(\Gamma)$. Quand Γ n'est pas de type I, l'espace X est pathologique si on lui applique les concepts classiques de la topologie, mais il est facile de voir pour le produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \times_\alpha \mathbb{Z}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ que l'on a bien une algèbre associée à un feuilletage. Le rôle de la K-théoric de la C^* algèbre $C^*(\Gamma)$ dans la théorie de l'homotopie des variétés non simplement connexes a été mis en évidence par les mathématiciens russes Miscenko et Kasparov. La signature Γ-équivariante est ainsi un élément de $K_0(C^*(\Gamma))$ qui est un invariant d'homotopie ($\Gamma = \pi_1(M)$). Ils ont aussi réussi à démontrer, quand Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie, la conjecture de Novikov : si M est un espace $K(\Gamma, 1)$ et $Y \xrightarrow{f} M$ une application continue, la signature

$$\sigma = \text{Signature } f^{-1}(N)$$

pour tout cycle $N \subset M$ est inchangée si l'on remplace (Y, f) par un couple (Y', f') homotope.

La K-théorie de la C^* algèbre associée à un feuilletage permet par exemple de distinguer entre eux les feuilletages de Kronecker pour différentes valeurs de θ (modulo $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et joue un rôle crucial dans le théorème de l'indice pour les opérateurs elliptiques le long des feuilles [1]. Dans des exemples simples, elle rend très bien compte de la structure topologique du feuilletage, on dispose d'une flèche μ de la K-homologie du quotient d'homotopie vers la

1. Résultat obtenu en collaboration avec G. Skandalis.

K-théorie de la C^* algèbre, et c'est un isomorphisme dans tous les exemples calculés jusqu'à présent. Ainsi, dans 2) c'est la K-théorie qui joue le rôle central, et en fait la K-théorie bivariante de Kasparov. En ce qui concerne 3), nous possédons maintenant l'analogue non commutatif des notions de *courants de de Rham et d'homologie*, grâce à la cohomologie cyclique. Cette notion permet en particulier de définir le cycle fondamental de l'espace des feuilles d'un feuilletage transversalement orienté. Les classes caractéristiques secondaires, tel que l'invariant de Godbillon-Vey, font alors leur apparition dans la cohomologie cyclique de l'algèbre du feuilletage : le cycle fondamental C de l'espace des feuilles n'est pas en général invariant par le groupe d'automorphismes modulaires (σ_t) de l'algèbre, mais en codimension 1 sa dérivée seconde est nulle

$$\frac{d}{dt}(\text{ Cycle fondamental}) \neq 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}\, C = 0.$$

L'invariant de Godbillon-Vey apparaît alors comme le cycle

$$GV = i_x \frac{d}{dt}\, C.$$

obtenu par contraction de la dérivée première $\dfrac{d}{dt}\, C$ par le générateur X du groupe d'automorphismes modulaires.

Comme application, on obtient immédiatement que si $GV \neq 0$, l'algèbre de von Neumann associée a une composante non-triviale de type III, résultat très technique de S. Hurder. De plus, l'aspect linéarisation infinitésimale qui était la caractéristique de 3) le reste encore mais à un autre niveau, en effet, les résultats de Loday et Quillen montrent que la cohomologie cyclique est la partie indécomposable de la cohomologie de *l'algébre de Lie* du groupe GL de l'algèbre en question. Si l'on veut mieux que la partie linéarisée du caractère de Chern d'un élément de K-homologie, on doit alors invoquer la K-théorie

algébrique. On obtient ainsi, pour tout module de Fredholm $(H, F) \in \ell^{\mathrm{n}}(A)$ une flèche de $K_{n+1}^{\mathrm{alg}}(A)$ vers C^*. Dans le cas très simple où $A = C^\infty(S^1)$ et (H, F) est l'extension de Toeplitz, on obient l'extension centrale du groupe de lacets qui apparaît, par exemple, dans les travaux de G. Segal et G. Wilson. Quand on cherche à expliciter cette flèche pour le module de Fredholm associé à l'opérateur de Dirac, on tombe exactement sur la deuxième quantification du champ des spineurs ; mais la dificulté de manipulation de la K-théorie algébrique au-delà de K_3 limite encore notre compréhension aux dimensions 1 et 2. C'est l'apparition de la théorie des champs dans ce problème et en particulier l'égalité entre le groupe de jauge : $C^\infty(X, U_N)$ et le groupe unitaire $U(M_N(C^\infty(X))$ qui conduisent à un certain nombre de réflexions sur la nature de l'algèbre A des fonctions de classe C^∞ sur l'espace X quand on aborde le problème de l'interaction entre la relativité générale et la mécanique quantique.

Je terminerai donc sur deux remarques simples :

1) L'espace X n'intervient que a) pour définir l'espace *linéaire* des données de Cauchy pour Les champs classiques en $t = 0$ et b) pour définir le groupe de jauge U. Cela n'utilise en rien la commutativité de A.

2) La relativité, la gravitation et la mécanique quantique spécifient une grandeur, de l'ordre de 10^{-33} cm, au-delà de laquelle la notion de *point* de l'espace devient illusoire. Quel modèle plus simple peut-on donner de ce phénomène que celui de supposer que l'algèbre A n'est pas strictement commutative, comme l'algèbre A_θ. Or, il existe une généralisation naturelle de la géométrie Riemannienne pour laquelle l'algèbre des fonctions n'est plus commutative. C'est en particulier cette généralisation et ses rapports avec la physique que j'ai l'intention d'explorer dans un avenir proche.

Une nouvelle preuve du théorème de Morley
Alain Connes

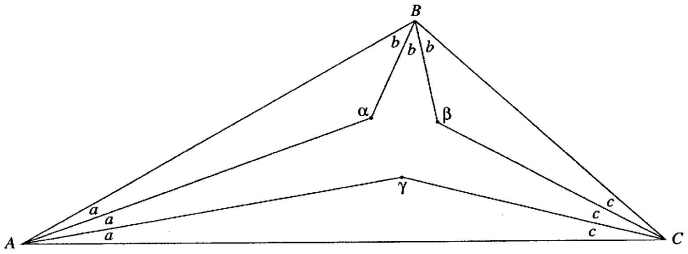
Cela fait maintenant 22 ans que l'IHÉS m'a offert l'hospitalité. J'ai appris ici la plupart des mathématiques que je connais, principalement grâce à des conversations impromptues au déjeuner avec des visiteurs ou des membres permanents.

Quand je suis arrivé, j'étais obnubilé par mon propre travail et j'ai éprouvé un sentiment d'humilité en réalisant à quel point je comprenais peu ce dont il était alors question dans les discussions habituelles. Dennis Sullivan prit soin de moi, et me donna un cours rapide en géométrie qui a influencé ma manière de penser pour le reste de ma vie.

C'est aussi à Bures, grâce aux physiciens, que j'ai compris la véracité d'une phrase de J. Hadamard sur la profondeur des concepts mathématiques venant de la physique :

"Non cette nouveauté à la vie courte qui trop souvent ne peut influencer que le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses."

Pour donner un peu l'esprit de l'atmosphère de compétition conviviale caractéristique de l'IHÉS, j'ai choisi l'exemple spécifique d'une conversation que nous avons eue lors d'un déjeuner au printemps dernier et qui m'a amené à un nouveau résultat amusant.



Vers 1899, F. Morley prouva un théorème remarquable sur la géométrie élémentaire des triangles Euclidiens :

"Etant donné un triangle A, B, C, les intersections 2 à 2, α, β, γ des trissectrices sont les sommets d'un triangle équilatéral" (*cf.* Fig. 1).

L'un de nous mentionna ce résultat pendant le déjeuner et l'attribua (par erreur) à Napoléon. Bonaparte avait effectivement étudié les mathématiques dans son jeune âge et, en plus d'apprendre l'anglais, il enseignait les mathématiques au fils de Las Cases pendant son exil de Sainte Hélène à Longwood.

C'était la première fois que j'entendais parler du résultat de Morley et quand je suis rentré chez moi, suivant l'un des conseils de Littlewood, j'ai commencé à chercher une preuve, non pas dans les livres mais dans ma tête. Ma seule motivation en plus de la curiosité était le challenge évident "c'est l'un des rares exploits de Bonaparte auquel je devrais pouvoir m'attaquer". Après quelques tentatives infructueuses, j'ai vite réalisé que les intersections de trissectrices consécutives sont les points fixes de produits

1. Ce texte provient de l'ouvrage fêtant les 40 ans de l'IHÉS intitulé Les relations entre les mathématiques et la physique théorique, IHÉS, 1998, p. 43-46

2. Collège de France, Paris, et IHÉS, 91440 Bures-sur-Yvette, France.

de 2 rotations g_i autour des sommets du triangle (rotations d'angles égaux à deux tiers des angles correspondant du triangle). Il était alors naturel de chercher la symétrie g du triangle équilatéral comme un élément du groupe Γ engendré par les trois rotations g_i. Maintenant, il était facile de construire un exemple (en géométrie sphérique) qui montre que le théorème de Morley ne peut s'appliquer en géométrie non-euclidienne, de telle façon que la preuve devait utiliser des propriétés euclidiennes particulières du groupe des isométries.

Du coup, je passais quelque temps à essayer de trouver une formule de g en fonction des g_i, en utilisant la construction simple (toute isométrie d'angle $2\pi/n, n \geq 2$ est automatiquement d'ordre n), de plein d'éléments d'ordre 3 dans le groupe Γ, comme $g_1g_2g_3$. Après beaucoup d'efforts, je réalisais que c'était en vain (*cf.* Rem. 2 ci-dessous) et que le groupe qui intervient est le groupe affine de la droite, plutôt que le groupe d'isométrie du plan.

Le but de cette courte note est de donner une preuve conceptuelle du théorème de Morley comme propriété théorique du groupe de l'action du groupe affine sur la droite. Il sera valide pour tout corps (commutatif) k (de caractéristique arbitraire, même si en caractéristique 3, l'hypothèse du théorème ne peut être remplie). Ainsi soit k un tel corps et G le groupe affine sur k, en d'autres termes, le groupe des matrices 2×2 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $a \in k, a \neq 0, b \in k$. Pour $g \in G$, posons

$$\delta(g) = a \in k^*. \tag{1}$$

Par construction, δ est un morphisme de G dans le groupe multiplicatif k^* des éléments non nuls de k, et le sous-groupe $T = \text{Ker } \delta$ est le groupe des translations, i.e. le groupe additif de k. Chaque $g \in G$ dans G définit une transformation,

$$g(x) = ax + b \qquad \forall x \in k, \tag{2}$$

et si $a \neq 1$, elle admet un et un seul point fixe,

$$fix(g) = \frac{b}{1-a}. \tag{3}$$

Prouvons le simple fait suivant :

Théorème. Soient $g_1, g_2, g_3 \in G$ tels que g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1 et $g_1g_2g_3$ ne sont pas des translations et posons $j = \delta(g_1g_2g_3)$. Les conditions suivantes sont équivalentes,

a) $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$.

b) $j^3 = 1$ et $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ où $\alpha = fix(g_1g_2), \beta = fix(g_2g_3), \gamma = fix(g_3g_1)$.

Preuve. Posons $g_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. L'égalité $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$ est équivalente à $\delta(g_1^3g_2^3g_3^3) = 1$, et $b = 0$, où b est la partie translationnelle de $g_1^3g_2^3g_3^3$. La première condition est exactement $j^3 = 1$. Notons que $j \neq 1$ par hypothèse. Alors on a

$$b = \left(a_1^2 + a_1 + 1\right) b_1 + a_1^3 \left(a_2^2 + a_2 + 1\right) b_2 + (a_1a_2)^3 \left(a_3^2 + a_3 + 1\right) b_3. \tag{4}$$

Un calcul évident, en utilisant le fait que $a_1a_2a_3 = j$ donne,

$$b = -ja_1^2a_2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(\alpha + j\beta + j^2\gamma), \tag{5}$$

où, α, β, γ sont les points fixes de

$$\alpha = \frac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}, \beta = \frac{a_2b_3 + b_2}{1 - a_2a_3}, \alpha = \frac{a_3b_1 + b_3}{1 - a_3a_1}. \tag{6}$$

Maintenant, $a_k - j \neq 0$ puisque par hypothèse, les produits deux à deux des g_j *ne sont pas* des translations. Ainsi, et quelque soit la caractéristique de k, nous obtenons que a) $\Leftrightarrow$ b).

Corollaire. Théorème de Morley.

Démonstration. Prenons $k = \mathbb{C}$ et définissons g_1 comme la rotation de centre A et d'angle $2a$, où $3a$ est l'angle BAC et de manière similaire pour g_2 et g_3. On a $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$ puisque chaque g_i^3 peut être exprimé comme le produit des symétries le long des côtés consécutifs. De plus, pour une raison similaire $\alpha = fix(g_1 g_2), \beta = fix(g_2 g_3), \gamma = fix(g_3 g_1)$ sont les intersections des trissectrices. Ainsi, de a) $\Rightarrow$ b), on obtient $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ qui est une caractérisation classique des triangles équilatéraux.

Remarque 1. Sans altérer les cubes g_1^3, g_2^3, g_3^3, on peut multiplier chaque g_i par une racine cubique de 1, on obtient de cette manière les 18 triangles équilatéraux non-dégénérés des variantes du théorème de Morley.

Remarque 2. Nous montrerons maintenant qu'en général, la rotation g qui permute cycliquement les points α, β, γ n'appartient pas au sous-groupe Γ de G engendré par g_1, g_2, g_3. Sous l'hypothèse du théorème, on peut supposer que le corps k contient une racine cubique de l'unité non triviale, $j \neq 1$, et que de ce fait, sa caractéristique n'est pas égale à 3. La rotation qui permute cycliquement les points α, β, γ est ainsi l'élément de G donné par,

$$g = \begin{bmatrix} j & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 3b = (1-j)(\alpha + \beta + \gamma). \tag{7}$$

Maintenant, pour tout élément $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ du groupe Γ engendré par g_1, g_2, g_3, on a les polynômes de Laurent P_i en les variables a_j tels que,

$$b = b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3. \tag{8}$$

Ainsi, en exprimant, avec les notations ci-dessus b_i en termes de α, β, γ,

$$\begin{array}{llll} b_1 = (1+j)^{-1}\big(a_3^{-1} & (a_3 - j)\alpha - & (a_1 - j)\beta + a_1 & (a_2 - j)\gamma\big) \\ b_2 = (1+j)^{-1}\big(a_2 & (a_3 - j)\alpha + a_1^{-1} & (a_1 - j)\beta - & (a_2 - j)\gamma\big) \\ b_1 = (1+j)^{-1}\big(- & (a_3 - j)\alpha + a_3 & (a_1 - j)\beta + a_2^{-1} & (a_2 - j)\gamma\big) \end{array} \tag{9}$$

nous obtenons les polynômes de Laurent Q_i tel que,

$$b = (a_3 - j)\alpha Q_1 + (a_1 - j)\beta Q_2 + (a_2 - j)\gamma Q_3. \tag{10}$$

On peut alors supposer qu'on a trouvé des polynômes de Laurent Q_i tel que pour tout $a_1, a_2, a_3 \in k^*$, avec $a_1 a_2 a_3 = j$, et tout $\alpha, \beta, \gamma \in k$ avec $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, l'identité suivante est vérifiée,

$$(1-j)(\alpha + \beta + \gamma) = 3((a_3 - j)Q_1 + (a_1 - j)\beta Q_2 + (a_2 - j)\gamma Q_3). \tag{11}$$

Nous choisissons alors $a_1 = j, a_2 = j, a_3 = j^2, \alpha = 0, \beta = -j, \gamma = 1$ et obtenons une contradiction. En passant au corps des fonctions sur k, cela suffit à démontrer que, en général, $g \notin \Gamma$.

CRITIQUES DE LIVRES

BULLETIN (Nouvelles séries)
de la Société américaine de Mathématiques
Volume 33, Numéro 4, Octobre 1996

Noncommutatine geometry, par Alain Connes, Academic Press, Paris, 1994, xiii+661 pp., ISBN 0-12-185860-X ; publié d'abord en français par les éditions InterEditions, Paris (Géométrie Non Commutative, 1990).

L'analyse abstraite est une des branches les plus jeunes des mathématiques, mais elle est maintenant assez envahissante. Pourtant, il n'y a pas si longtemps elle était considérée comme plutôt étrange. L'attitude générale des mathématiciens avant la seconde guerre mondiale peut être brièvement évoquée en racontant l'histoire suivante racontée par feu Norman Levinson. Pendant l'année post-doctorale de Levinson à Cambridge, alors qu'il étudiait avec Hardy, von Neumann est venu là donner une conférence. Hardy (représentant alors la quintessence de l'analyste classique) fit cette remarque après la conférence : "Bien sûr, ce jeune est très intelligent. Mais étaient-ce des *mathématiques* ?"

L'analyse abstraite est née dans les années 20 du défi que constituait la mécanique quantique et de la réponse apportée à ce défi par von Neumann et M. H. Stone. Le théorème de Stone-von Neumann (e.g., [1]), qui a spécifié la structure de la représentation unitaire générique des relations de Weyl, a établi l'équivalence des formalismes de la mécanique quantique de Heisenberg et de Schrödinger (il est intéressant que ces deux derniers ne l'aient jamais compris. La morale pourrait être que les physiciens rigoureux mathématiquement n'attendaient pas l'approbation des physiciens pratiques, aussi fondamental que soit leur travail). C'était le premier théorème non trivial de structure pour une représentation unitaire en dimension infinie d'un groupe non-commutatif et du coup, un prototype important de la théorie de la représentation des groupes de Lie en dimension infinie. Les écrits de Von Neumann montrent clairement qu'il avait compris l'importance de sa théorie pour la mécanique quantique, et il encouragea grandement son ami Wigner à développer la théorie dans le cas aisé du groupe de Poincaré. L'article de Wigner qui présente cela [2] vint après les travaux les plus référencés du vingtième siècle [1].

Von Neumann lui-même releva le défi plus grand encore de formaliser les mathématiques de la phénoménologie quantique. Avec Stone, il établit le théorème spectral dans un espace complexe de Hilbert et la théorie de l'extension des opérateurs hermitiens, qui fut largement un point culminant de la théorie des opérateurs hermitiens, et le fait qu'il ait eu la pré-science avec une vingtaine d'années d'avance, d'utiliser le terme "spectre", reste remarquable.

Peu de temps après, von Neumann prouva le théorème du double commutant [3], qui était à ce moment-là un problème frappant dans le contexte non-commutatif, et plus spécifiquement dans le champ de la mécanique quantique. L'article était hautement suggestif d'une théorie de dimension infinie comparable au théorème de structure de Wedderburn. Rétrospectivement, il marque le début de l'analyse abstraite et il a amené à la série classique des articles sur les *Anneaux d'opérateurs*, peut-être le travail majeur le plus original des mathématiques du vingtième siècle.

1. Une collection des travaux les plus référencés a été publiée par Springer des années après. Il est intéressant, et représentatif des relations entre les mathématiques et la physique, que l'article de Wigner ait été originellement soumis au journal de physique Springer. Il a été rejeté, et Wigner cherchait un journal de physique qui l'accepterait lorsque von Neumann lui dit de ne pas s'inquiéter, il réussit à le faire passer dans les Annales de mathématiques. Wigner fut content de cette offre (information verbale de Wigner).

Il y avait trois motivations principales pour la série des articles sur les "anneaux", comme von Neumann les a appelés. La première était, c'est sûr, le défi posé par la mécanique quantique. En particulier, le caractère divergent de la théorie quantique des champs, bizarrement en contraste avec sa base intuitive simple, et von Neumann espérait réconcilier ces deux caractéristiques contrastées en trouvant le formalisme adéquat. Une seconde application potentielle d'importance était de structurer les représentations infini-dimensionnelles des groupes non abéliens, problème qu'il avait déjà résolu dans le cas du groupe de Heisenberg. Une troisième motivation était la généralisation des théorèmes de structure de Wedderburn.

Aujourd'hui, les divergences en théorie quantique des champs apparaissent comme des conséquences probables d'une géométrie très simple de l'espace-temps. Dans l'univers d'Einstein $R^1 \times S^3$, qui n'est pas un modèle moins raisonnable que l'espace de Minkowski et qui l'approxime bien localement, les divergences sont absentes dans le cas crucial de l'électrodynamique quantique [4] et dans toutes les probabilités de la théorie électro-faible aussi. Les extensions et les applications du lemme de Poincaré au cas en dimension infinie servent à établir des intégrales relativement invariantes des champs quantiques d'opérateurs auto-adjoints dans l'espace de Hilbert [5, 6, 7].

La théorie de l'intégration non-commutative, dans laquelle on intègre des opérateurs plutôt que des fonctions, relativement à des mesures additives calculables sur des projections plutôt que sur des ensembles [8], avec la théorie de l'intégrale directe de von Neumann (i.e., décomposition d'algèbres), comble adéquatement le besoin d'une base abstraite de théorie des groupes, e.g., l'établissement du théorème de Plancherel pour les groupes localement compacts [9]. La théorie de la structure de Wedderburn a été étendue aux anneaux arbitraires de "type Γ", i.e. les types que l'on trouve le plus communément en pratique. Les autres types sont à peine moins rebutants qu'ils n'en ont l'air après complétion de leur théorie globale il y a quelques dizaines d'années. La théorie locale dépendant de la classification des anneaux simples centraux, ou des "facteurs", a été étudiée attentivement avec énergie et ingéniosité, mais elle reste insaisissable et apparaît beaucoup plus réalisable qu'une classification complète des groupes discrets infinis, il n'y a d'ailleurs pas de besoin apparent d'une telle classification dans les autres parties de la science mathématique.

Ainsi, le programme de base de von Neumann a en grande partie été effectivement réalisé. Mais les algèbres d'opérateurs non-commutatifs constituent un paradigme naturel pour un certain nombre d'applications secondaires, de la théorie quantique à la topologie, l'algèbre, et la géométrie différentielle. Il y a un petit doute de l'auteur de ce livre merveilleux, et très bien imprimé, que ces applications puissent être surmontées par les analystes abstraits de sa génération. Le sujet de la "géométrie non-commutative" a son origine dans le programme de von Neumann pour les anneaux d'opérateurs ainsi que dans la théorie de la représentation pour les algèbres de Banach de Stone, Gelfand, et autres. Ce dernier travail a fourni une interprétation géométrique pour les algèbres commutatives sous la forme d'un idéal maximal ou d'un espace similaire. Ce travail d'avant-guerre a été rapidement suivi par l'extension non-commutative due à Gelfand et Neumark qui a amené la théorie des algèbres de Banach en relation proche à l'espace de Hilbert. Du point de vue de la mécanique quantique, l'idée avancée par ces travaux était que l'"espace-temps" était plus logiquement non pas un concept primaire mais plutôt un concept dérivé de l'algèbre des "observables" (ou opérateurs). Dans sa forme la plus simple, l'idée était que l'espace-temps pourrait être, à un niveau plus profond, le spectre d'une sous-algèbre commutative appropriée qui est invariante sous l'action du groupe de symétrie fondamental (e.g., [11]).

$H = L_2(M)$, consistant en une multiplication par f, agissant sur le domaine des fonctions g dans H tel que fg est aussi dans H. Inversement, tout opérateur normal dans l'espace de Hilbert (ou ensemble d'opérateurs normaux commutant) est unitairement équivalent à un

tel opérateur de multiplication (ou un ensemble de tels opérateurs). De plus, l'application $f \to M_f$ est de façon évidente un "isomorphisme" algébrique, qui est essentiellement applicable à des opérateurs aussi bien non-bornés ("mesurables") que bornés. Ainsi, à nouveau, il y a une base naturelle pour remplacer les espaces de fonctions par les opérateurs.

Pour donner un exemple simple, si f est une fonction dans l'espace euclidien, sa différentielle $df = \sum_j (\partial_j f) dx_j$ (où $\partial_j = \partial/\partial x_j$) est équivalente à la "differentielle" de l'opérateur de multiplication correspondant, "dM_f" $= \sum_j [\partial_j, M_f] dx_j$. Cela amène à la formulation de la différentielle dA d'un opérateur A sur un espace donné comme l'application linéaire $X \to [X, A]$ des espaces vectoriels dans les opérateurs. Une 1-forme "quantifiée" est de manière correspondante principalement une application linéaire convenable des espaces vectoriels vers les opérateurs. Avec les restrictions qui conviennent, ainsi qu'avec les notions de fermeture et d'exactitude, des formes de degré arbitraire. Ainsi, les formes quantifiées apparaissent comme naturelles dans un modèle purement mathématique, mais elles impliquent plus que le "non-sens abstrait généralisé" qu'elles semblent représenter. Elles émergent de considérations théoriques de la théorie quantique et forment un ingrédient essentiel, dans le cas infini-dimensionnel, d'un traitement systématique des "produits" des champs quantiques, qui sont au mieux des opérateurs de distributions valuées (e.g., [5, 6, 7]).

Comme indiqué ci-dessus, la différence entre C^*- et W^*-algèbres est non seulement technique mais aussi fonctionnelle. A cause de la caractérisation algébrique intrinsèque des C^*-algèbres, la notion naturelle d'équivalence est celle d'$*$-isomorphisme. L'équivalence unitaire implique bien sûr l'isomorphisme algébrique, mais les invariants correspondant sont trop compliqués pour être très utiles. Même selon la relation d'équivalence d'$*$-isomorphisme, les invariants ne sont pas simples. Il y a juste autant de classes d'équivalences de C^*-algèbres commutatives qu'il y a d'espaces compacts locaux, et les classes d'équivalence des C^*-algèbres non-commutatives sont beaucoup plus étendues.

Dans le cas des W^*-algèbres, l'équivalence unitaire (ou "spatiale") est une notion naturelle, et la classification est facilitée par le fait qu'un isomorphisme algébrique conjointement avec un manque adéquat de multiplicité non-triviale suffit à impliquer une équivalence unitaire. Le cas le plus simple est celui des algèbres maximales abéliennes auto-adjointes des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert, dont un isomorphisme $*$-algébrique implique l'équivalence unitaire. Mais en général, la théorie des W^*-algèbres est en relation avec les sous-espaces invariants et la réduction correspondante de l'algèbre.

Dans le cas des W^*-algèbres de "type I" dans le schéma Murray von Neumann, il y a un théorème de structure presque explicite [10] qui classe ces algèbres, selon l'équivalence unitaire. Les algèbres de type I incluent la plupart des algèbres auxquelles on a en général affaire "concrètement" en pratique, mais une exception notable est celle des algèbres de Clifford sur un espace de Hilbert. Ceci est le cas le plus simple des W^*-algèbres de type II, et leur découverte dans le début des années 30 par von Neumann (voir [13] dans une forme différente) a rendu très frappant le fait qu'il y avait des phénomènes qualitativement nouveaux dans les W^*-algèbres de dimension infinie. En particulier, les algèbres de Clifford sont des algèbres centrales simples qui sont radicalement différentes des algèbres de tous les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert. En même temps, cette sorte d' algèbre joue un rôle fondamental dans l'analyse des champs quantiques sans fermions. Selon une notation souvent utilisée, c'est une algèbre engendrée par les Q fermions canoniques, et ainsi l'analogue d'une algèbre commutative engendrée par les observables canoniques Q bosoniques. L'algèbre de Clifford est le plus simple des facteurs qui sont des limites directes d'algèbres de matrices, et pour l'instant seules les familles de facteurs relativement accessibles ont été totalement classifiées.

Les C^*- et W^*-algèbres ont en commun qu'elles admettent toutes des notions d'intégration. Un état E d'une C^*-algèbre est une fonctionnelle linéaire positive, qui dans le cas commutatif est équivalente à une mesure sur le spectre (ou espace idéal maximal) de l'algèbre. Dans le cas non-commutatif, il n'est en général pas central, i.e., $E(AB)$ et $E(BA)$ sont génériquement non égaux. Cela limite la portée de la théorie de l'intégration C^*-algébrique, mais leur multitude d'états rend leur théorie limitée assez utile néanmoins. Par exemple, les fonctions définies positives sur les groupes déterminent les états et peuvent effectivement être traitées en fonction d'eux. Ce sont des généralisations des théorèmes de Radon-Nikodym et d'autres théorèmes de base en théorie de la mesure appliquée au contexte des C^*-algèbres, à commencer par [12, 14].

Un "poids" sur une W^*-algèbre A est une fonction non-négative additive calculable sur les projections qui est unitairement invariante et qui ainsi généralise la notion de mesure applicable dans le cas abélien. Tous les théorèmes de base et les idées de la théorie de l'intégration de Lebesgue s'étendent au cas non-commutatif, et les opérateurs "mesurables" peuvent être ajoutés et multipliés à l'envi, presque comme les fonctions mesurables et différemment des opérateurs non-bornés en général. Une application typique est la théorie de Plancherel pour les groupes généraux uni-modulaires localement compacts. Quand A a un centre trivial, i.e. est un "facteur", il y a un poids essentiellement unique, qui est la fonction dimension de Murray-von Neumann.

Voici les fondations sur lesquelles est basée la Géométrie non-commutative. La partie "géométrie" du titre est un peu programmatique ; un titre plus descriptif pourrait être Sujets d'algèbres d'opérateurs et leurs applications. L'approche est suggestive et informelle, bien que techniquement hautement sophistiquée. L'auteur se promène de ses principaux domaines et travaux afférents à une attention minimale (ou des références) aux travaux précédents, incluant quelques travaux idéalement basiques. Le résultat apparaît comme un tour de force brillant et soutenu qui fascinera les personnes travaillant dans ce domaine et ayant un bagage suffisant concernant les principaux axes d'investigation de l'auteur mais pourrait rebuter des non-spécialistes. Ce serait dommage, car le livre établit des relations entre divers aspects de son sujet qui ne sont pas très bien représentés dans la littérature, spécialement ceux concernant les directions topologique et homologique.

Chacun des six chapitres a son propre thème, représentant un intérêt majeur de l'auteur : I, "Espaces non-commutatifs et théorie de la mesure" ; II, "Topologie et K-théorie" ; III, "Cohomologie cyclique et géométrie différentielle" ; IV, "Calcul quantifié" ; V, "Algèbres d'opérateurs" ; VI, "Aspect métrique de la géométrie non-commutative". Tous les chapitres contiennent les $*$-algèbres de façon plus ou moins étendue mais sont sinon reliés de manière assez libre. Une introduction fournit une vue globale de chaque chapitre. Parmi les thèmes favoris qui sont récurrents, on trouve (i) les feuilletages, (ii) la cohomologie, (iii) la K-théorie, (iv) la classification des facteurs, et (v) les interprétations des aspects de la physique mathématique.

Le dernier chapitre est peut-être le plus nouveau. Il contient une tentative courageuse et intéressante d'amener la considérable expertise de l'auteur et sa flexibilité sur une grande variété de sujets en physique, sujets qu'il voit reliés aux algèbres d'opérateurs. Ceux-ci incluent les états KMS (Kubo-Martin-Schwinger), dont il considère apparemment la théorie comme fondamentale en mécanique statistique. Malheureusement, il n'y pas de base empirique apparente pour ça, et jusqu'à maintenant, la théorie apparaît comme une abstraction d'une initiative physique qui n'a pas été très fructueuse.

Un sujet physique plus vivant se manifeste par le caractère discret (ou rationnel) de certaines quantités observables. Une grande variété d'hypothèses mathématiques a été avancée dans

la littérature de la physique mathématique pour expliquer ces observations. Le livre présente une théorie mathématique frappante et intriquée due à Bellissard qui traite les cas entiers. Ceci est basé sur le "tore non-commutatif", une application de la cohomologie cyclique.

L'initiative la plus remarquable dans la direction de la physique est une interprétation de l'unification de l'électromagnétisme et des interactions faibles. Le "modèle standard" dû à Glashow, Weinberg, et Salam a eu un certain succès empirique, modulo certaines prescriptions adéquates de renormalisation et de corrections des énergies des hauts rayons. Comme l'explique l'auteur, ce modèle est à la base un modèle phénoménologique et il est difficilement acceptable comme théorie ultime. Le livre présente une reformulation mathématique sophistiquée du modèle standard, qui pourrait avoir le potentiel espéré d'aller au-delà de lui. C'est exemplaire que l'auteur applique son immense expertise mathématique à la physique théorique ; les mathématiques pures de haut niveau sont devenues trop repliées sur elles-mêmes et elles ont besoin du défi des connexions avec d'autres domaines. Cependant, l'interprétation donnée est essentiellement plus *descriptive* qu'*explicative*. Il n'est pas proposé de résolution de la question ancienne de savoir pourquoi l'interaction électromagnétique est invariante par inversion alors qu'il est proposé que les interactions faibles soient essentiellement non-invariantes. De plus, les efforts vers la physique mathématique semblent ignorer quelques principes physique de base - la causalité, la stabilité (effectivement, la positivité de l'énergie), etc. - pour obtenir une solution technique rapide. Cela semble représenter une sorte de naïveté qui contraste bizarrement avec le très haut niveau de connaissances mathématiques.

Mathématiquement, le chapitre du livre le plus original est celui qui traite de cohomologie cyclique, qui subsume les formes quantifiées décrites plus tôt mais qui est plus général. C'est, pourtant, loin d'être un exposé systématique du sujet, et cela n'est pas destiné à l'être. C'est plutôt un essai sur plusieurs ramifications, applications aux feuilletages, topologie et autres. Cela apparaît techniquement très ingénieux mais peut-être un peu court sur chaque problème externe intéressant à son propre titre.

Le chapitre qui fait le plus autorité est celui sur les W^*-algèbres, qui traite principalement de la classification des facteurs. L'idée initiale de Murray von Neumann était que la structure de la W^*-algèbre de l'effet de Hall quantique (en deux dimensions) peut en général être réduite à celle de ses facteurs via la décomposition d'une algèbre par rapport à son centre. La théorie de la réduction de von Neumann fournit une décomposition de toute W^*-algèbre donnée (sur un espace séparable) relativement à toute algèbre booléenne donnée de ses sous-espaces invariants. Cela implique en particulier que toute W^*-algèbre est une "intégrale directe" de facteurs. De manière formelle, cette "théorie locale" réduit le problème au cas des facteurs, mais la théorie "globale" est plus puissante et illustrante en pratique et présente moins de difficultés en terme de mesurabilité. Ainsi, en analyse harmonique sur les groupes de Lie simples non-compacts, le seul facteur impliqué est celui de tous les opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert séparable, comme cela découle du travail fondateur d'Harish-Chandra, mais on est encore loin de savoir établir la théorie de Plancherel pour de tels groupes.

Le livre fournit effectivement l'esprit et le goût de la théorie de Connes et devrait être assez stimulant et utile pour ceux qui font de la recherche dans ce domaine. D'un autre côté, l'insistance technique et le peu d'éléments fournis quant à son aspect idéel et ses origines historiques pourrait repousser les non-spécialistes. Il serait probablement difficile d'utiliser ce livre comme référence ou source d'information précise, en partie du fait du manque des numéros de pages de l'index. C'est plutôt un livre ressemblant à un long discours ou à une lettre à des amis. Par exemple, son style informel est à peu près à l'opposé du style crispant définition-théorème-preuve que l'on pourrait attendre de Connes, et cela peut être un peu frustrant pour ceux qui ne sont pas déjà au top quant à la maîtrise du matériau. Est fournie,

cependant, une bibliographie longue ainsi qu'un bref résumé des notations.

Comme compte-rendu effervescent et déjà soutenu d'une grande étendue d'aspects avancés et subtils de l'analyse abstraite, ce livre apparaît d'une qualité précieuse et est certainement unique en son genre.

Bibliographie

1. J. von Neumann, *Die Bindeutigket der Schrodingerschen Operatoren*, Math. Ann. **104** (1931), 570-578.

2. E. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math. **40** (1939), 149-204.

3, J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionoperatoren*, Math. Ann. **102** (1920), 370-427.

4. I. Segal and Z. Zhou, *Convergence of quantum electrodynamics in a curved deformation of Minkowski space*, Ann, Phys. *232* (1904), 61-87. MR **95c** :81174

5. J. Pedersen, I. Segal, and Z. Zhou, *Nonlinear quantum fields in $\geq$ 4 dimensions and cohomology of the infinite Heisenberg group*, Trans. Amer. Math. Soc. **345** (1994), 73-95. MR.**95a** :81158

6. I. Segal, *Rigorous covariant form of the correspondence principle*, Proceedings, 1094 J. von Neumann Symposium (W. Arveson, T. Branson, I. Segal, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 175-202.

7. _____, *Complex noncommutative infinite-dimensional analysis*, Proceedings, 1994 Norbert Wiener Symposium (D. Jerison, I Singer, and D. Stroock, eds.) (in preparation).

8. _____, *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. (2) **57** (1953), 401-457. MR **14** :991f

9. _____, *An extension of Plancherel's theorem to separable unimodular groups*, Ann. Math. (2) **52** (1950), 272-292. MR **12** :157F

10. _____, *Decompositions of operator algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 9 (1951). MR **13** :472b

11. _____, *A class of operator algebras which are determined by groups*, Duke Math, J. **18** (1951), 221-265. MR **13** :534b

12. _____, *Irreducible representations of operator algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 73-88, MR **8** :520b

13. J. von Neumann, *Continuous geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22** (1936), 92-100.

14. H. A. Dye, *The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 243-280. MR **13** :662b

Irving Segal
Massachusetts Institute of Technology

Formule de Trace en géométrie non-commutative
et zéros de la fonction zeta de Riemann

Alain CONNES

Abstract *Nous donnons une interprétation spectrale des zéros critiques de la fonction zêta de Riemann qui les fait voir comme les raies d'un spectre d'absorption, alors que les éventuels zéros non-critiques apparaissent comme des résonances. Nous donnons une interprétation géométrique des formules explicites de la théorie des nombres qui deviennent des formules de trace sur l'espace des classes d'adèles. Cela réduit l'hypothèse de Riemann à la validité de la formule de trace et élimine le paramètre δ de notre approche précédente.*

Table des matières

	Introduction.
I	**Chaos quantique et flot hypothétique de Riemann.**
II	**Géométrie algébrique et corps globaux de caractéristique nulle.**
III	**Interprétation spectrale des zéros critiques.**
IV	**Formule de trace d'une distribution pour les flots sur des variétés.**
V	**L'action $(\lambda, x) \to \lambda x$ de K^* d'un corps local K.**
VI	**Le cas global, et le calcul de la formule de trace.**
VII	**Preuve de la formule de trace dans le cas S-local.**
VIII	**Formule de trace dans le cas global, et élimination de δ.**
	Remarques générales.
Appendice I	**Preuve du théorème 1.**
Appendice II	**Formules explicites.**
Appendice III	**Formules de trace d'une distribution.**

Introduction

Nous allons donner dans cet article une interpréation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann et un cadre géométrique dans lequel on peut transposer les idées de la géométrie algébrique impliquant l'action du Frobenius et la formule de Lefschetz. L'interprétation spectrale des zéros de zêta les considèrera comme les raies noires d'un spectre d'absorption. Tous les zéros joueront un rôle du côté spectral de la formule de trace, mais alors que les zéros critiques apparaîtront per-se, les zéros non-critiques apparaîtront comme des résonances et interviendront dans la formule de trace à travers leur potentiel harmonique par rapport à la droite critique. Ainsi, le versant spectral est entièrement

article original de référence Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, Sel. Math. New ser. 5 (1999), p. 29-106.
lisible sur la page http://alainconnes.org/fr/bibliography.phphttp://alainconnes.org/fr/bibliography.php référence n° 132.
Traduction corrigée en décembre 2020, Denise Vella-Chemla.

canonique, et en prouvant la positivité de la distribution de Weil, nous montrerons que cette égalité avec le côté géométrique, i.e. la formule de trace globale, est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. Nous prendrons modèle dans notre présentation sur la formule des traces de Selberg, mais notre formule diffère de celle-ci selon plusieurs aspects importants. Nous expliquerons d'abord en particulier dans quelle mesure un signe négatif crucial dans l'analyse des fluctuations statistiques des zéros de zêta indique que l'interprétation spectrale devrait être un spectre d'absorption, ou de façon équivalente, devrait être de nature cohomologique. Cela se combinera dans un cadre géométrique qui sera un espace à l'air innocent, l'espace X des classes d' adèles, dans lequel deux adèles qui appartiennent à la même orbite d'action de $GL_1(k)$ (k un corps global), sont considérées comme équivalentes. Le groupe $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$ des classes d'idèles (qui est le correspondant dans la théorie des corps de classes du groupe de Galois) agit par multiplication sur X.

Notre premier résultat préliminaire (théorème 1 de la section III) fournit une interprétation spectrale des zéros de zêta et des fonctions L sur un corps global k, à partir de l'action du groupe des classes d'idèles sur un espace de fonctions de carré intégrable, sur l'espace $X = A/k^*$ des classes d'adèles. Le corollaire 2 fournit le calcul correspondant de la trace spectrale. Ce résultat est seulement préliminaire parce qu'il nécessite un paramètre non naturel δ qui joue le rôle d'un exposant de Sobolev et permet de voir le spectre d'absorption comme un point du spectre.

Notre second résultat préliminaire est un calcul formel (section VI) du caractère de la représentation du groupe des classes d'idèles sur l'espace sous-jacent L^2. Ce calcul formel donne la distribution de Weil qui est l'ingrédient essentiel de la formule explicite de Riemann-Weil. À ce point-là des recherches (qui était la situation dans [Co]), les problèmes principaux consistent à donner une signification rigoureuse au calcul de la formule de trace et à éliminer ce paramètre non souhaité δ.

Ces deux problèmes seront résolus dans le présent article. Nous démontrons d'abord une formule de trace (théorème 3 de la section V) pour l'action du groupe multiplicatif K^* sur un corps local K sur l'espace de Hilbert $L^2(K)$, et (théorème 4 de la section VII) une formule de trace pour l'action du groupe multiplicatif C_S des classes d'idèles associées à un ensemble fini S de places d'un corps global k, sur l'espace de Hilbert des fonctions à carré intégrable $L^2(X_S)$, où X_S est le quotient de $\prod_{v\in S} k_v$ par l'action du groupe O_S^* des S-unités de k. Dans les deux cas, nous obtenons exactement les termes des formules explicites de Weil qui appartiennent à l'ensemble fini des places. Ce résultat est plutôt important puisque l'espace X_S est hautement non trivial lorsque S est supérieur ou égal à 3. Par exemple, cet espace-quotient n'est pas de type I au sens de la géométrie non-commutative et il est rassurant que la formule de trace continue d'être alors valable dans ce cas.

Nous testons en détail (théorème 6 de l'Appendice II) que la réécriture des formules explicites de Weil qui est prédite par la formule de trace globale est correcte.

Finalement, nous éliminons dans la section VIII, en utilisant des idées qui sont communes et à la formule des traces de Selberg, et à l'explication standard des raies d'absorption en physique, le paramètre problématique δ qui est apparu comme un paramètre des espaces de fonctions de la section III. Nous écrivons la formule globale de trace de manière analogue à la formule des traces

de Selberg. La validité de la formule de trace pour n'importe quel ensemble fini de places découle du théorème 4 de la section VII, mais le cas global est laissé ouvert et on montre (Théorème 5 de la section VIII) qu'il est équivalent à la validité de l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. Cette équivalence, avec la plausibilité de l'obtention d'une preuve directe de la formule de trace selon les lignes du théorème 4 (section VII) constitue le résultat principal de cet article. L'élimination du paramètre δ est l'amélioration principale du présent article relativement à [Co].

C'est une idée ancienne, due à Polya et Hilbert, que dans le but de comprendre la localisation des zéros de la fonction zêta de Riemann, il conviendrait de trouver un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur D sur $\mathcal{H}$ dont le spectre est donné par les zéros non triviaux de la fonction zêta. L'espoir est alors que des propriétés convenables d'auto-adjonction de D (de $i\left(D-\frac{1}{2}\right)$ plus précisément) ou bien des propriétés de positivité de $\Delta = D(1-D)$ seraient plus aisées à traiter que la conjecture originale. Les raisons principales qui doivent nous faire prendre ces idées très au sérieux sont d'une part le travail de A. Selberg ([Se]) dans lequel un Laplacien Δ est relié de la façon décrite ci-dessous à un analogue de la fonction zêta, et d'autre part l'évidence théorique ([M][B][KS]) et expérimentale ([O][BG]) des fluctuations de l'espacement entre les zéros consécutifs de zêta. Le nombre de zéros de zêta dont la partie imaginaire est inférieure à $E > 0$,

$$N(E) = \#\text{ de zéros } \rho\ ,\ 0 < \operatorname{Im}\rho < E \tag{1}$$

a une expression asymptotique ([R]) donnée par

$$N(E) = \frac{E}{2\pi}\ \left(\log\left(\frac{E}{2\pi}\right) - 1\right) + \frac{7}{8} + o(1) + N_{\text{osc}}(E) \tag{2}$$

où la partie oscillatoire de la fonction N étagée est

$$N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi}\ \operatorname{Im}\log\ \zeta\ \left(\frac{1}{2} + iE\right) \tag{3}$$

en assumant que E n'est pas la partie imaginaire d'un zéro et en prenant comme logarithme la branche qui vaut 0 à l'$+\infty$.

On montre (cf. [Pat]) que $N_{\text{osc}}(E)$ est en $O(\log E)$. Dans la décomposition (2), les deux termes $\langle N(E)\rangle = N(E) - N_{\text{osc}}(E)$ et $N_{\text{osc}}(E)$ jouent un rôle indépendant. Le premier $\langle N(E)\rangle$, qui fournit la densité moyenne des zéros, provient de la formule de Stirling et est parfaitement contrôlé. Le second $N_{\text{osc}}(E)$ est une manifestation du caractère vraiment aléatoire de la localisation des zéros, et pour éliminer le rôle de la densité, on retourne à une situation de densité uniforme par la transformation

$$x_j = \langle N(E_j)\rangle \quad (E_j \text{ la partie imaginaire du } j^{\text{eme}} \text{ zéro de zêta})\,. \tag{4}$$

Alors, l'espacement entre deux x_j consécutifs est 1 en moyenne et la seule information qui reste est dans la fluctuation statistique. Il s'avère que ([M][O]), ces fluctuations sont identiques aux fluctuations d'une matrice hermitienne de très grande taille.

H. Montgomery [M] a démontré (en assumant RH) une forme faible de la conjecture suivante (avec $\alpha, \beta > 0$),

$$\text{Card}\,\{(i,j)\,;\, i,j \in 1,\ldots,M\,;\, x_i - x_j \in [\alpha,\beta]\} \sim M\int_\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2\right)\,du \tag{5}$$

Cette loi (5) est précisément identique à la corrélation entre les valeurs propres de matrices hermitiennes de l'ensemble unitaire gaussien ([M]). De plus, des tests numériques établis par A. Odlyzko ([O][BG]) ont confirmé avec une grande précision le comportement (5) ainsi qu'un comportement analogue pour plus de deux zéros. In [KS], N. Katz et P. Sarnak ont prouvé une loi analogue à celle de Montgomery-Odlyzko pour les fonctions zêta et pour les fonctions L sur des corps de fonctions.

C'est alors une excellente motivation que d'essayer de trouver une paire naturelle $(\mathcal{H}, D)$; par naturelle, on veut dire par exemple que l'on pourrait ne même pas avoir à définir la fonction zêta, mais simplement son prolongement analytique, pour obtenir une telle paire (dans le but par exemple d'éviter la farce de définir $\mathcal{H}$ comme l'espace ℓ^2 fabriqué à partir des zéros de zêta).

I. Chaos quantique et flot hypothétique de Riemann

Décrivons tout d'abord en suivant [B] la tentative directe de construire l'espace de Polya-Hilbert à partir de la quantification d'un système dynamique classique. La motivation initiale de la théorie des matrices aléatoires vient de la mécanique quantique. Dans cette théorie, la quantification d'un système dynamique classique donné par son espace des phases X et son hamiltonien h permet d'obtenir un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur auto-adjoint H dont le spectre est l'observable principal du système. Pour des systèmes compliqués, la seule information utile à propos de ce spectre est que, alors que la partie moyenne de la fonction de comptage,

$$N(E) = \#\text{ valeurs propres de } H \text{ dans } [0, E] \tag{1}$$

est calculée par une approximation semi-classique comme un volume dans l'espace des phases, la partie oscillatoire,

$$N_{\text{osc}}(E) = N(E) - \langle N(E) \rangle \tag{2}$$

est la même que pour une matrice aléatoire, gouvernée par les statistiques dictées par les symétries du système.

En l'absence de champ magnétique, i.e. pour un hamiltonien classique de la forme,

$$h = \frac{1}{2m}\, p^2 + V(q) \tag{3}$$

où V est un potentiel à valeurs réelles sur l'espace des configurations, il y a une symétrie naturelle de l'espace classique des phases, appelée la symétrie temporelle inverse,

$$T(p, q) = (-p, q) \tag{4}$$

qui préserve h, et implique que l'ensemble correct sur les matrices aléatoires n'est pas le GUE ci-dessous mais plutôt l'ensemble orthogonal Gaussien : GOE. De ce fait, la partie oscillatoire $N_{\text{osc}}(E)$ se comporte de la même manière qu'une matrice aléatoire *réelle symétrique*.

Bien sûr, H est juste un opérateur spécifique dans $\mathcal{H}$ et, pour qu'il se comporte de façon *générique*, il est nécessaire (cf. [B]) que le système hamiltonien classique (X, h) soit *chaotique* avec des *orbites périodiques* isolées dont les exposants d'instabilité (i.e. les logarithmes des valeurs propres de l'application de Poincaré inverse agissant sur l'espace transverse aux orbites) soient différents de 0.

On peut alors ([B]) écrire une approximation semi-classique de la fonction oscillatoire $N_{\rm osc}(E)$

$$N_{\rm osc}(E) = \tfrac{1}{\pi}\ \mathrm{Im} \int_0^\infty \mathrm{Trace}(H - (E + i\eta))^{-1}\, id\eta \tag{5}$$

en utilisant l'approximation de la phase stationnaire de l'intégrale fonctionnelle correspondante. Pour un système dont la configuration est de dimension 2, cela donne ([B] (15)),

$$N_{\rm osc}(E) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\, \frac{1}{2\mathrm{sh}\left(\dfrac{m\lambda_p}{2}\right)}\, \sin(S_{\rm pm}(E)) \tag{6}$$

où les γ_p sont les orbites périodiques primitives, m correspondant au nombre de fois où l'orbite est traversée, alors que les exposants d'instabilité sont les $\pm\lambda_p$. La phase $S_{\rm pm}(E)$ est à un facteur constant près, égale à $m\, E\, T_\gamma^\#$ où $T_\gamma^\#$ est la période de l'orbite primitive γ_p.

La formule (6) donne des informations très précieuses ([B]) sur le "flot de Riemann" hypothétique dont la quantification devrait fournir l'espace de Polya-Hilbert. On note particulièrement que la formule du produit d'Euler pour la fonction zêta amène (cf. [B]) une formule asymptotique similaire pour $N_{\rm osc}(E)$ (3),

$$N_{\rm osc}(E) \simeq \frac{-1}{\pi} \sum_{p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\, \frac{1}{p^{m/2}}\, \sin\left(m\, E\, \log\, p\right). \tag{7}$$

La comparaison de (6) et (7) fournit les informations suivantes

(A) Les orbites périodiques primitives devraient être étiquetées par les nombres premiers $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$, les périodes devraient être les $\log p$ et les exposants d'instabilité devraient être les $\lambda_p = \pm \log p$.

De plus, puisque chaque orbite est comptée seulement une fois, le flot de Riemann ne devrait pas présenter la symétrie T de (4) dont l'effet serait de dupliquer le nombre d'orbites. Ce dernier point exclut en particulier les flots géodésiques puisqu'ils respectent la symétrie temporelle T. Ainsi nous obtenons que :

(B) Le flot de Riemann ne peut pas satisfaire la symétrie de renversement du temps.

Pourtant, il y a deux importants problèmes (cf. [B]) entre les formules (6) et (7). Le premier est le signe *moins* au début de la formule (7), et le second est que bien que $2\mathrm{sh}\left(\dfrac{m\lambda_p}{2}\right) \sim p^{m/2}$ quand $m \to \infty$, nous n'avons pas une égalité pour les valeurs finies de m.

Il y a donc deux difficultés fondamentales et pour les éliminer, nous utiliserons la stratégie bien connue consistant à élargir le problème au cas des *corps globaux* arbitraires. En restreignant alors le domaine au cas des corps de fonctions, nous obtiendrons une précieuse information supplémentaire.

II. Géométrie algébrique et corps globaux de caractéristique nulle

Les propriétés de base de la fonction zêta de Riemann s'étendent aux fonctions zêta associées à un corps global arbitraire, et il est peu probable que l'on puisse régler le problème de l'interprétation spectrale des zéros puis trouver le flot de Riemann pour le cas particulier des corps globaux $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, sans du même coup régler ces problèmes pour tous les corps globaux simultanément.

La définition conceptuelle d'un tel corps k, est :
Un corps k est un corps global si et seulement s'il est discret *et* cocompact *dans un anneau abélien semi-simple localement compact (non discret) A.*

De cela découle que A dépend alors fonctoriellement de k et est appelé l'anneau des adèles de k, souvent noté k_A. Aussi, bien que le corps k lui-même n'ait aucune topologie intéressante, il y a un anneau, et avec une topologie hautement non triviale, qui est canoniquement associé à k.

Quand la caractéristique p d'un corps global k est > 0, le corps k est le corps des fonctions sur une courbe algébrique non-singulière Σ définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ inclus dans k comme sous-corps fini maximal, appelé le corps des constantes. On peut alors appliquer les idées de la géométrie algébrique, d'abord développée sur $\mathbb{C}$, à la géométrie de la courbe Σ et obtenir une interprétation des propriétés de base de la fonction zêta de k ; le dictionnaire contient en particulier les lignes suivantes :

(1)

Interprétation spectrale des zéros	Valeurs propres de l'action de Frobenius sur la cohomologie ℓ-adique
Équation fonctionnelle	Théorème de Riemann Roch (Dualité de Poincaré)
Formules explicites de la théorie des nombres	Formule de Lefschetz pour le Frobenius
Hypothèse de Riemann	Positivité de Castelnuovo

Puisque $\mathbb{F}_q$ n'est pas algébriquement clos, les points de Σ définis sur $\mathbb{F}_q$ ne suffisent pas et on a besoin de considérer $\overline{\Sigma}$, les points de Σ sur la fermeture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$, qui sont obtenus en adjoignant à $\mathbb{F}_q$ les racines de l'unité d'ordre premier à q. Cet ensemble de points est une union dénombrable d'orbites périodiques sous l'action de l'automorphisme de Frobenius, ces orbites étant paramétrées

par l'ensemble des places de k et leurs périodes sont dans ce cas données par les analogues des $\log p$ de (A). Comme c'est un ensemble dénombrable, il ne se qualifie pas comme analogue du flot de Riemann et il acquiert seulement une structure intéressante de la géométrie algébrique. Le signe moins qui était problématique dans la discussion ci-dessus admet ici une belle résolution puisque l'analogue de l'espace de Polya-Hilbert est donné, si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Q}_\ell$ le corps des nombres ℓ-adiques $\ell \neq p$, par le groupe de cohomologie

$$H^1_{\text{et}}(\overline{\Sigma}, \mathbb{Q}_\ell) \tag{2}$$

qui apparaît avec un signe couvrant moins dans la formule de Lefschetz

$$\sum (-1)^j \operatorname{Trace} \varphi^* / H^j = \sum_{\varphi(x)=x} 1. \tag{3}$$

Pour le cas général, cela suggère que :

(C) L'espace de Polya-Hilbert $\mathcal{H}$ devrait provenir de son espace $\ominus\mathcal{H}$.

En d'autres termes, l'interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann devrait être un spectre d'absorption plutôt qu'un spectre d'émission, pour emprunter le langage de la spectroscopie.

L'élément suivant que l'on apprend de cette excursion dans la caractéristique $p > 0$ est que dans ce cas, on ne travaille pas avec un flot mais plutôt avec une simple transformation. En fait, en tirant parti des couvertures de Σ et de l'isomorphisme fondamental de la théorie des corps de classes, on trouve que le groupe naturel qui devrait remplacer $\mathbb{R}$ pour le flot général de Riemann est le groupe des classes d'idèles :

$$C_k = \mathrm{GL}_1(A)/k^* \,. \tag{D}$$

Nous pouvons alors mémoriser les informations (A) (B) (C) (D) que nous avons obtenues jusque-là et chercher le flot de Riemann comme étant une action de C_k sur un espace hypothétique X.

III. Interprétation spectrale des zéros critiques

Il y a une troisième approche au problème des zéros de la fonction zêta de Riemann, due à G. Pólya [P] et à M. Kac [K] et poursuivie plus tard dans [J] [BC]. Elle est basée sur la mécanique statistique et sur la construction d'un système quantique statistique dont la *fonction de partition* est la fonction zêta de Riemann. Un tel système a été construit naturellement dans [BC] et il indique, en utilisant la première ligne du dictionnaire de Géométrie non-commutative (notamment la correspondance entre les espaces-quotients et les algèbres non-commutatives) que l'espace X devrait en général être :

$$X = A/k^* \tag{1}$$

littéralement le quotient de l'espace $A = k_A$ des adèles par l'action du groupe multiplicatif k^*,

$$a \in A \ , \ q \in k^* \to aq \in A \, . \tag{2}$$

Cet espace X apparaît déjà d'une manière très implicite dans le travail de Tate et Iwasawa sur l'équation fonctionnelle. C'est un espace non-commutatif en ce que, même au niveau de la théorie de la mesure, c'est un espace-quotient très "sioux". Par exemple, au niveau de la théorie de la mesure, l'algèbre de von Neumann correspondante,

$$R_{01} = L^\infty(A) \rtimes k^* \tag{3}$$

où A est doté de sa mesure de Haar comme groupe additif, est le facteur hyperfini de type II_∞.

Le groupe des classes d'idèles C_k agit sur X par

$$(j, a) \to ja \qquad \forall \, j \in C_k \ , \ a \in X \tag{4}$$

et il était impératif de diviser A par k^* pour que (4) ait le bon sens.

Nous reviendrons ultérieurement sur l'analogie entre l'action de C_k sur R_{01} et l'action du groupe de Galois sur l'extension abélienne maximale de k.

Ce que nous allons faire maintenant va consister à construire l'espace de Hilbert L^2_δ des fonctions sur X avec une croissance indexée par $\delta > 1$. Puisque X est un espace-quotient, nous apprendrons d'abord dans la variété habituelle comment obtenir l'espace de Hilbert $L^2(M)$ des fonctions de carré intégrable sur une variété M en travaillant seulement sur la couverture universelle $\widetilde{M}$ avec l'action de $\Gamma = \pi_1(M)$. Chaque fonction $f \in C^\infty_c(\widetilde{M})$ donne naissance à une fonction $\widetilde{f}$ sur M par

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{\pi(\widetilde{x})=x} f(\widetilde{x}) \tag{5}$$

et toutes les $g \in C^\infty(M)$ apparaissent de cette manière. De plus, on peut écrire le produit intérieur de l'espace de Hilbert $\int_M \widetilde{f}_1(x) \, \widetilde{f}_2(x) \, dx$, en terme de f_1 et f_2 seules. Ainsi $\|\widetilde{f}\|^2 = \int \left| \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x) \right|^2 dx$ où l'intégrale est calculée sur un domaine fondamental pour Γ agissant sur M. Cette formule définit une norme d'espace préhilbertien sur $C^\infty_c(\widetilde{M})$ et $L^2(M)$ est juste la complétion de $C^\infty_c(\widetilde{M})$ pour cette norme. Noter que toute fonction de la forme $f - f_\gamma$ a une norme qui s'évanouit et qui, de ce fait, disparaît pendant le processus de complétion. Dans notre cas où $X = A/k^*$, nous avons du coup besoin de définir une norme analogue sur l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(A)$ des fonctions sur A (cf. Appendice I pour une définition générale de l'espace de Bruhat-Schwartz). Puisque 0 reste fixe par l'action de k^*, l'expression $\sum_{\gamma \in k^*} f(\gamma x)$ n'a pas de sens pour $x = 0$ à moins que l'on ait $f(0) = 0$. De plus, quand $|x| \to 0$, les sommes ci-dessus approximent, en tant que sommes de Riemann, le produit des $|x|^{-1}$ par $\int f \, dx$ pour la mesure additive de Haar, et alors on a aussi besoin que $\int f \, dx = 0$. Nous pouvons maintenant définir l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)_0$ comme la complétion du sous-espace de codimension 2

$$\mathcal{S}(A)_0 = \{ f \in \mathcal{S}(A) \ ; \ f(0) = 0 \ , \ \int f \, dx = 0 \} \tag{6}$$

pour la norme $\| \ \|_\delta$ donnée par

$$\|f\|^2_\delta = \int \Big| \sum_{q \in k^*} f(qx) \Big|^2 (1 + \log^2 |x|)^{\delta/2} \, |x| \, d^* x \tag{7}$$

où l'intégrale calculée sur A^*/k^* et d^*x est la mesure de Haar multiplicative sur A^*/k^*. L'horrible terme $(1+\log^2|x|)^{\delta/2}$ est alors là pour contrôler la croissance des fonctions sur le quotient non-compact. Nous verrons comment supprimer ce terme plus tard dans la section VII. Noter que $|qx| = |x|$ pour tout $q \in k^*$.

Le point-clé est que nous utilisons la mesure $|x|\, d^*x$ plutôt que la mesure de Haar additive dx. Bien sûr, pour un corps local K, on a $dx = |x|\, d^*x$ mais cela ne sert à rien dans la situation globale ci-dessus. On a plutôt,

$$dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, |x|^{1+\varepsilon}\, d^*x\,. \tag{8}$$

Une représentation naturelle de C_k sur $L^2_\delta(X)_0$ est donnée par :

$$(U(j)\, f)\,(x) = f(j^{-1}\, x) \qquad \forall\, x \in A\ ,\ j \in C_k \tag{9}$$

et le résultat est indépendant du choix d'un relèvement de j dans $J_k = \mathrm{GL}_1(A)$ parce que les fonctions $f - f_q$ sont dans le noyau de la norme. Les conditions (6) qui définissent $\mathcal{S}(A)_0$ sont invariantes sous l'action de C_k et elles fournissent l'action suivante de C_k sur le complémentaire à 2 dimensions de $\mathcal{S}(A)_0 \subset \mathcal{S}(A)$; ce complémentaire est $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$ où $\mathbb{C}$ est le module trivial C_k (correspondant à $f(0)$) alors que le twist de Tate $\mathbb{C}(1)$ est le module

$$(j, \lambda) \to |j|\, \lambda \tag{10}$$

provenant de l'égalité

$$\int f(j^{-1}\, x)\, d\, x = |j| \int f(x)\, dx\,. \tag{11}$$

Dans le but d'analyser la représentation (9) de C_k sur $L^2_\delta(X)_0$, nous allons la relier à la représentation gauche régulière du groupe C_k sur l'espace de Hilbert $L^2_\delta(C_k)$ obtenue de l'espace de Hilbert suivant des fonctions de norme carrée,

$$\|\xi\|^2_\delta = \int_{C_k} |\xi(g)|^2\, (1+\log^2|g|)^{\delta/2}\, d^*g \tag{12}$$

où nous avons normalisé la mesure de Haar du groupe C_k, avec comme module,

$$|\ | : C_k \to \mathbb{R}^*_+ \tag{13}$$

de telle façon que l'on ait (cf. [W3])

$$\int_{|g| \in [1,\Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \text{quand} \quad \Lambda \to +\infty\,. \tag{14}$$

La représentation régulière gauche V de C_k sur $L^2_\delta(C_k)$ est

$$(V(a)\, \xi)\,(g) = \xi(a^{-1}\, g) \qquad \forall\, g, a \in C_k\,. \tag{15}$$

Noter qu'à cause du poids $(1+\log^2|x|)^{\delta/2}$, cette représentation est *non* unitaire mais qu'elle satisfait l'estimation de la croissance

$$\|V(g)\| = O(\log|g|)^{\delta/2} \quad \text{quand} \quad |g| \to \infty \tag{16}$$

qui découle de l'inégalité (valide pour $u, v \in \mathbb{R}$)

$$\rho(u+v) \leq 2^{\delta/2}\, \rho(u)\, \rho(v)\ ,\ \rho(u) = (1+u^2)^{\delta/2}\,. \tag{17}$$

Nous définissions E comme l'isométrie linéaire de $L^2_\delta(X)_0$ dans $L^2_\delta(C_k)$ donnée par l'égalité,

$$E(f)\,(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \qquad \forall\, g \in C_k\,. \tag{18}$$

En comparant (7) à (12), on voit que E est une isométrie et le facteur $|g|^{1/2}$ est imposé par la comparaison des mesures $|g|\, d^*g$ de (7) et d^*g de (12).

On a $E(U(a)\, f)\,(g) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} (U(a)\, f)\,(qg) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(a^{-1}\, qg) = |a|^{1/2}\, |a^{-1}\, g|^{1/2} \sum_{k^*} f(q\, a^{-1}\, g) = |a|^{1/2}\, (V(a)\, E(f))\ (g)$.

Ainsi,

$$E\, U(a) = |a|^{1/2}\, V(a)\, E\,. \tag{19}$$

Cette équivariance montre que l'image de E dans $L^2_\delta(C_k)$ est un espace clos invariant pour la représentation V.

Le théorème ci-dessous et son corollaire montrent que le conoyau $\mathcal{H} = L^2_\delta(C_k)/\ \mathrm{Im}(E)$ de l'isométrie E joue le rôle de l'espace de Polya-Hilbert. Puisque $\mathrm{Im}\, E$ est invariant sous la représentation V, on définit W comme la représentation correspondante de C_k sur $\mathcal{H}$.

Le groupe localement compact abélien C_k est (de façon non canonique) isomorphe à $K \times N$ où

$$K = \{g \in C_k\ ;\ |g| = 1\}\ ,\ N = \text{image}\ |\ | \subset \mathbb{R}^*_+\,. \tag{20}$$

Pour des corps de nombres, on a $N = \mathbb{R}^*_+$ alors que pour des corps de caractéristique non-nulle, $N \simeq \mathbb{Z}$ est le sous-groupe $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^*_+$ (où $q = p^\ell$ est la cardinalité du corps des constantes).

Nous choisissons (de façon non canonique) un isomorphisme

$$C_k \simeq K \times N\,. \tag{21}$$

Par construction, la représentation W satisfait (en utilisant (16)),

$$\|W(g)\| = O(\log |g|)^{\delta/2} \tag{22}$$

et sa restriction à K est unitaire. Aussi, $\mathcal{H}$ se scinde en une somme directe canonique de sous-espaces orthogonaux 2 à 2,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{K}} \mathcal{H}_\chi\ ,\ \mathcal{H}_\chi = \{\xi\ ;\ W(g)\, \xi = \chi\,(g)\, \xi\ ,\ \forall\, g \in K\} \tag{23}$$

où χ parcourt le groupe dual de Pontrjagin K, qui est le groupe abélien discret $\widehat{K}$ des caractères de K. En utilisant l'isomorphisme non canonique (21), i.e. l'inclusion correspondante $N \subset C_k$, on peut maintenant restreindre la représentation W à n'importe lequel des secteurs $\mathcal{H}_\chi$. Quand

la caractéristique de k est > 0, alors $N \simeq \mathbb{Z}$ et la condition (22) montre que l'action de N sur $\mathcal{H}_\chi$ est donnée par un seul opérateur à spectre *unitaire* (on utilise la formule du rayon spectral $|\mathrm{Spec}\, w| = \overline{\mathrm{Lim}}\, \| w^n \|^{1/n}$). Quand la caractéristique de k est nulle, on travaille avec une action de $\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}$ sur $\mathcal{H}_\chi$ et la condition (22) montre que cette représentation est engendrée par un opérateur clos non-borné D_χ à spectre purement imaginaire. Le résolvant $R_\lambda = (D_\chi - \lambda)^{-1}$ est donné, pour $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$, par l'égalité

$$R_\lambda = \int_0^\infty W_\chi(e^s)\, e^{-\lambda s}\, ds \tag{24}$$

et pour $\mathrm{Re}\, \lambda < 0$ par,

$$R_\lambda = \int_0^\infty W_\chi(e^{-s})\, e^{\lambda s}\, ds \tag{25}$$

alors que l'opérateur D_χ est défini par

$$D_\chi\, \xi = \lim_{\varepsilon \to 0}\, \frac{1}{\varepsilon}\, (W_\chi(e^\varepsilon) - 1)\, \xi\,. \tag{26}$$

Théorème 1. *Soient $\chi \in \widehat{K}$, $\delta > 1$, $\mathcal{H}_\chi$ et D_χ comme ci-dessus. Alors D_χ a un spectre discret, $\mathrm{Sp}\, D_\chi \subset i\,\mathbb{R}$ est l'ensemble des parties imaginaires des zéros de la fonction L à Grössencharakter $\widetilde{\chi}$ de partie réelle $\frac{1}{2}$; $\rho \in \mathrm{Sp}\, D \Leftrightarrow L\left(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho\right) = 0$ et $\rho \in i\,\mathbb{R}$, où $\widetilde{\chi}$ est l'unique extension de χ à C_k qui est égale à 1 sur N. De plus, la multiplicité des ρ dans $\mathrm{Sp}\, D$ est égale au plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$, n étant inférieur à la multiplicité de $n \leq \frac{1}{2} + \rho$ comme zéro de L.*

Le théorème 1 a une formulation similaire quand la caractéristique de k est non-nulle. Le corollaire suivant est valide pour les corps globaux k de caractéristique arbitraire.

Corollaire 2. *Pour toute fonction de Schwartz $h \in \mathcal{S}(C_k)$ l'opérateur $W(h) = \int W(g)\, h(g)\, d^*\, g$ dans $\mathcal{H}$ appartient à la classe des traces, et sa trace est donnée par*

$$\mathrm{Trace}\, W(h) = \sum_{\substack{L\left(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2}+\rho\right)=0 \\ \rho \in i\,\mathbb{R}/N^\perp}} \widehat{h}(\widetilde{\chi}, \rho)$$

où la multiplicité est comptée comme dans le Théorème 1 et où la transformée de Fourier $\widehat{h}$ de h est définie par,

$$\widehat{h}(\widetilde{\chi}, \rho) = \int_{C_k} h(u)\, \widetilde{\chi}(u)\, |u|^\rho\, d^*\, u\,.$$

Noter que nous n'avons pas eu à définir les fonctions L, mais seulement leur prolongement analytique, avant d'établir le théorème, qui montre que la paire

$$(\mathcal{H}_\chi, D_\chi) \tag{27}$$

se qualifie certainement comme un espace de Polya-Hilbert.

Le cas de la fonction zêta de Riemann correspond au caractère trivial $\chi = 1$ pour le corps global $k = \mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

En général, les zéros des fonctions L peuvent avoir des multiplicités mais l'on s'attend à ce que pour un Grössencharacter χ, cette multiplicité soit bornée, de telle façon que pour une valeur suffisamment grande de δ, la multiplicité spectrale de D sera la bonne. Quand la caractéristique de k est > 0, cela est certainement vrai.

Si l'on modifie le choix de l'isomorphisme non canonique (21), cela change l'opérateur D en

$$D' = D - i\,s \tag{28}$$

où $s \in \mathbb{R}$ est déterminé par l'égalité

$$\widetilde{\chi}'(g) = \widetilde{\chi}(g)\,|g|^{\mathrm{i}s} \qquad \forall\, g \in C_k\,. \tag{29}$$

La cohérence de l'établissement du théorème est assurée par l'égalité

$$L(\widetilde{\chi}', z) = L(\widetilde{\chi}, z + i\,s) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{30}$$

Quand les zéros de L apparaissent de façon multiple et quand δ est assez grand, l'opérateur D est *non* semi-simple et il a une forme de Jordan non triviale (cf. Appendice I). Cela est compatible avec la condition presque unitaire (22) mais pas avec une symétrie biaisée pour D.

La preuve du théorème 1, fournie dans l'Appendice I, est basée sur l'interprétation de la distribution théorique par A. Weil [W2] de l'équation fonctionnelle basée sur l'idée de Tate et Iwasawa. Notre construction devrait être comparée à [Bg] et [Z].

Comme on s'y attend du fait de (C), l'espace de Polya-Hilbert $\mathcal{H}$ apparaît comme un conoyau. Puisqu'on obtient l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)_0$ en imposant deux conditions linéaires sur $\mathcal{S}(A)$,

$$0 \to \mathcal{S}(A)_0 \to \mathcal{S}(A) \xrightarrow{L} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \to 0, \tag{31}$$

nous définirons $L^2_\delta(X)$ de telle manière qu'il apparaisse dans une séquence exacte de C_k-modules

$$0 \to L^2_\delta(X)_0 \to L^2_\delta(X) \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \to 0\,. \tag{32}$$

Nous pouvons alors utiliser la séquence exacte de C_k-modules

$$0 \to L^2_\delta(X)_0 \to L^2_\delta(C_k) \to \mathcal{H} \to 0 \tag{33}$$

avec le Corollaire 2 pour calculer de manière formelle quel devrait être le caractère du module $L^2_\delta(X)$. En utilisant (32) et (33), nous obtenons,

$$\text{Trace } (U(h)) = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\chi,\rho)=0 \\ \mathrm{Re}\rho = \frac{1}{2}}} \widehat{h}(\chi,\rho) + \infty\, h(1) \tag{34}$$

où $\widehat{h}(\chi,\rho)$ est défini par le Corollaire 2 et

$$U(h) = \int_{C_k} U(g)\, h(g)\, d^*\, g \tag{35}$$

alors que la fonction test h est dans un espace de fonctions convenable. Noter que la trace du côté gauche de (34) n'a de sens qu'après qu'on ait procédé à une régularisation adéquate puisque la représentation régulière gauche de C_k n'est pas traçable. Cette situation est similaire à celle rencontrée par Atiyah et Bott ([AB]) dans leur preuve de la formule de Lefschetz. Nous devrons d'abord apprendre comment calculer la trace ci-dessus de manière formelle à partir des points fixes de l'action de C_k sur X. Dans la section VII, nous montrerons comme régulariser la trace et éliminer complètement le paramètre δ.

IV. Formule de trace d'une distribution pour les flots sur des variétés

Dans le but de comprendre comment le côté gauche de l'égalité (34) devrait être calculé, nous devrions d'abord rendre compte de la preuve de la formule habituelle de Lefschetz par Atiyah-Bott ([AB]) et décrire le calcul de la trace théorique de la distribution sur les variétés, qui est une variation sur le thème de [AB] et qui a été fournie par Guillemin-Sternberg [GS]. Nous nous référons à l'Appendice III pour un traitement plus détaillé indépendant des coordonnées [GS].

Commençons par un difféomorphisme φ d'une variété lisse compacte M et supposons que le graphe de φ est transverse à la diagonale sur $M \times M$. On peut alors aisément définir et calculer la trace de la distribution théorique de l'opérateur $U : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$,

$$(U\xi)(x) = \xi(\varphi(x))\,. \tag{1}$$

Par exemple, soit $k(x, y)$ la distribution de Schwartz sur $M \times M$ telle que

$$(U\xi)(x) = \int k(x, y)\, \xi(y)\, dy\,, \tag{2}$$

La trace de la distribution sur U est simplement

$$\text{Trace}\,(U) = \int k(x, x)\, dx\,, \tag{3}$$

Près de la diagonale et en coordonnées locales, on obtient :

$$k(x, y) = \delta(y - \varphi(x)) \tag{4}$$

où δ est la distribution de Dirac.

Puisque, par hypothèse, les points fixes de φ sont isolés, on peut calculer la trace (3) comme une somme finie $\sum_{x,\varphi(x)=x}$ et obtenir la contribution de chaque point fixe $x \in M$, $\varphi(x) = x$, comme

$$\frac{1}{|1 - \varphi'(x)|} \tag{5}$$

où $\varphi'(x)$ est le Jacobien de φ et $|A| = |\det A|$.

On utilise simplement l'inversibilité de id $-\,\varphi'(x)$ pour effectuer un changement de variables dans l'intégrale,

$$\int \delta(y-\varphi(y))\,dy\,. \tag{6}$$

On obtient alors (cf. [AB]),

$$\text{Trace}\,(U) = \sum_{x,\varphi(x)=x} \frac{1}{|1-\varphi'(x)|}\,. \tag{7}$$

Ce calcul s'étend immédiatement à l'action de φ sur les sections d'un fibré vectoriel équivariant E tel que le fibré $\wedge^k T^*$, dont les sections $C^\infty(M,E)$ sont les formes lisses de degré k. La somme alternée des traces théoriques de la distribution correspondante constitue la trace *ordinaire* de l'action de φ sur la cohomologie de de Rham, amenant ainsi à la formule habituelle de Lefschetz,

$$\sum (-1)^j \,\text{Trace}\,\varphi^*/H^j = \sum_{\varphi(x)=x} \text{sign}\,\det(1-\varphi'(x))\,. \tag{8}$$

Référons-nous à l'appendice qui utilise des notations plus pédantes pour montrer que la trace théorique de la distribution est indépendante des coordonnées.

Nous allons maintenant écrire l'analogue de la formule (7) dans le cas d'un flot $F_t = \exp(tv)$ de difféomorphismes de M, où $v \in C^\infty(M,T)$ est un champ de vecteurs sur M. Nous obtenons un groupe à un paramètre d'opérateurs agissant sur $C^\infty(M)$,

$$(U_t\,\xi)(x) = \xi(F_t(x)) \qquad \forall\,\xi \in C^\infty(M)\,,\ x \in M\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \tag{9}$$

et nous avons besoin de la formule pour,

$$\rho(h) = \text{Trace}\left(\int h(t)\,U_t\,dt\right)\ ,\ h \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,,\ h(0) = 0\,. \tag{10}$$

La condition $h(0) = 0$ est nécessaire parce que nous ne pouvons pas être assurés que la fonction Identité F_0 est transverse à la diagonale.

Pour définir ρ comme une distribution évaluée sur la fonction test h, choisissons f comme étant la fonction suivante,

$$f : X = M \times \mathbb{R} \to Y = M\ ,\ f(x,t) = F_t(x)\,. \tag{11}$$

Le graphe de f est la sous-variété Z de $X \times Y$,

$$Z = \{(x,t,y)\ ;\ y = F_t(x)\}\,. \tag{12}$$

Soit φ l'application diagonale,

$$\varphi(x,t) = (x,t,x)\ ,\ \varphi : M \times \mathbb{R} \to X \times Y \tag{13}$$

et supposons la transversalité $\quad \varphi \pitchfork Z \quad$ en dehors de $M \times (0)$.

Soit τ la distribution,

$$\tau = \varphi^*(\delta(y - F_t(x))\, dy)\,, \tag{14}$$

et q la seconde projection,

$$q(x,t) = t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

alors, par définition, ρ est le foncteur image directe $q_*(\tau)$ de la distribution τ.

On peut vérifier (cf. Appendice III) que $q_*(\tau)$ est une fonction généralisée.

Exactement comme dans le cas d'une transformation simple, les contributions à (10) viendront des points fixes de F_t. Ces dernières viendront soit d'un *zéro* du champ vectoriel v, (i.e. $x \in M$ tel que $v_x = 0$) soit d'une *orbite périodique* γ du flot et nous appellerons $T_\gamma^\#$ la longueur d'une telle orbite périodique.

Sous l'hypothèse de transversalité ci-dessus, la formule pour (10) est (cf. [GS], [G] et l'Appendice III),

$$\text{Trace } \left(\int h(t)\, U_t\, dt\right) = \sum_{x, v_x = 0} \int \frac{h(t)}{|1-(F_t)_*|}\, dt + \sum_\gamma \sum_T T_\gamma^\# \, \frac{1}{|1-(F_{T/})_*|}\, h(T) \tag{16}$$

où dans la seconde somme, γ est une orbite périodique de longueur $T_\gamma^\#$, et T varie dans $\mathbb{Z}\, T_\gamma^\#$ tandis que $(F_{T/})_*$ est l'application inverse de Poincaré, i.e. la restriction du plan tangent à la transverse à l'orbite.

On peut réécrire (16) sous une forme plus simple ainsi,

$$\text{Trace } \left(\int h(t)\, U_t\, dt\right) = \sum_\gamma \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1 - (F_u)_*|}\, d^*u\,, \tag{17}$$

où les zéros $x \in M$, $v_x = 0$, sont aussi considérés comme des orbites périodiques γ, alors que $I_\gamma \subset \mathbb{R}$ est le sous-groupe d'isotopie d'un $x \in \gamma$, et où d^*u est l'unique mesure de Haar dans I_γ telle que le covolume de I_γ soit égal à 1, i.e. tel que pour l'unique mesure de Haar $d\mu$ de masse totale 1 sur $\mathbb{R}/I$ et pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}/I} \left(\int_I f(u+s)\, d^*u\right)\, d\mu(s). \tag{18}$$

On écrit également $(F_u)_*$ pour la restriction du plan tangent F_u à l'espace transverse aux orbites.

Pour comprendre à quoi ressemble $(F_t)_*$ en un zéro de v, on peut remplacer $v(x)$ pour x proche de x_0 par son image tangentielle. Pour des raisons de simplicité, prenons le cas en dimension 1, avec $v(x) = x\, \frac{\partial}{\partial x}$, agissant sur $\mathbb{R} = M$.
On a $F_t(x) = e^t\, x$. Puisque F_t est linéaire, le plan tangent $(F_t)_*$ est

$$(F_t)_* = e^t \tag{19}$$

et (12) devient

$$\text{Trace } \left(\int h(t)\, U_t\, dt\right) = \int \frac{h(t)}{|1 - e^t|}\, dt. \tag{20}$$

Ainsi, pour ce flot, la formule de trace de la distribution est

$$\text{Trace}\,(U(h)) = \int \frac{h(u)}{|1-u|}\; d^*u \tag{21}$$

où nous utilisons une notation multiplicative de telle façon que $\mathbb{R}_+^*$ agisse sur $\mathbb{R}$ par multiplication, alors que $U(h) = \int U(v)h(v)\; d^*v$ et d^*v est la mesure de Haar du groupe $\mathbb{R}_+^*$.

On peut traiter de manière similaire l'action, par multiplication, du groupe des nombres complexes non-nuls de la variété $\mathbb{C}$.

Nous allons maintenant étudier le cas plus général d'un corps local arbitraire.

V. L'action $(\lambda, x) \to \lambda\, x$ de K^* d'un corps local K.

Soit K un corps local et considérons l'application,

$$f : K \times K^* \to K\ ,\ f(x,\lambda) = \lambda\, x \tag{1}$$

ainsi que l'application diagonale,

$$\varphi : K \times K^* \to K \times K^* \times K\ ,\ \varphi(x,\lambda) = (x,\lambda,x) \tag{2}$$

comme dans IV (11) et (12) ci-dessous.

Quand K est archimédien, on est dans le cadre des variétés et on peut associer à f une δ-section de support $Z =$ Graphe (f),

$$\delta_Z = \delta(y - \lambda\, x)\, dy\,. \tag{3}$$

En utilisant la projection $q(x,\lambda) = \lambda$ de $K \times K^*$ sur K^*, on considère alors comme ci-dessus la fonction généralisée sur K^* donnée par,

$$q_*(\varphi^*\, \delta_Z)\,. \tag{4}$$

Le calcul formel de cette fonction généralisée de λ est

$$\int \delta(x - \lambda\, x)\, dx = \int \delta((1-\lambda)x)\, dx = \int \delta(y)\, d((1-\lambda)^{-1}\, y)$$

$$= |1-\lambda|^{-1} \int \delta(y)\, dy = |1-\lambda|^{-1}\,.$$

Nous devons justifier cela en calculant la convolution des transformées de Fourier de $\delta(x-y)$ et $\delta(y - \lambda\, x)$ puisque c'est la manière correcte de définir le produit de deux distributions dans ce contexte local.

Calculons d'abord la transformée de Fourier de $\delta(ax+by)$ où $(a,b) \in K^2 (\neq 0)$. L'appariement de K^2 et de son dual K^2 est donné par

$$\langle (x,y), (\xi,\eta) \rangle = \alpha(x\,\xi + y\,\eta) \in U(1)\,. \tag{5}$$

où α est un caractère fixe non trivial du groupe additif K.

Soit $(c,d) \in K^2$ tel que $ad - bc = 1$ et considérons la transformation linéaire inversible de K^2,

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} . \tag{6}$$

La transformée de Fourier de $\varphi \circ L$ est donnée par

$$(\varphi \circ L)^\wedge = |\det L|^{-1}\, \widehat{\varphi} \circ (L^{-1})^t . \tag{7}$$

Ici, on a $\det L = 1$ et $(L^{-1})^t$ définie par

$$(L^{-1})^t = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} . \tag{8}$$

On calcule d'abord la transformée de Fourier de $\delta(x)$, la mesure de Haar additive dx est normalisée de façon à être auto-duale et en une seule variable, $\delta(x)$ et 1 sont transformées de Fourier l'une de l'autre, de telle sorte que

$$(\delta \otimes 1)^\wedge = 1 \otimes \delta . \tag{9}$$

En utilisant (7), on obtient que la transformée de Fourier de $\delta(ax + by)$ est $\delta(-b\,\xi + a\,\eta)$. On doit alors calculer la convolution des deux fonctions généralisées, $\delta(\xi + \eta)$ et $\delta(\xi + \lambda\,\eta)$. Maintenant,

$$\int f(\xi,\eta)\, \delta(\xi + \eta)\, d\xi\, d\eta = \int f(\xi, -\xi)\, d\xi$$

et

$$\int f(\xi,\eta)\, \delta(\xi + \lambda\,\eta)\, d\xi\, d\eta = \int f(-\lambda\,\eta, \eta)\, d\eta$$

de telle manière que l'on doit gérer deux mesures portées respectivement par deux lignes distinctes. Leur convolution évaluée sur $f \in C_c^\infty(K^2)$ est

$$\begin{aligned} \int f(\alpha + \beta)\, d\mu(\alpha)\, d\nu(\beta) &= \int\int f((\xi, -\xi) + (-\lambda\,\eta, \eta))\, d\xi\, d\eta \\ &= \int\int f(\xi - \lambda\,\eta, -\xi + \eta)\, d\xi\, d\eta \\ &= \Big(\int\int f(\xi', \eta')\; d\xi'\, d\eta'\Big) \times |J|^{-1} \end{aligned}$$

où J est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = L$, de telle manière que $\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$. On a $J = 1 - \lambda$ et alors, la convolution des fonctions généralisées $\delta(\xi + \eta)$ et $\delta(\xi + \lambda\,\eta)$ donne comme attendu la fonction constante

$$|1 - \lambda|^{-1}\, 1 . \tag{10}$$

De manière correspondante, le produit des distributions $\delta(x - y)$ et $\delta(y - \lambda\,x)$ donne $|1 - \lambda|^{-1}\, \delta_0$ de façon que,

$$\int \delta(x - y)\, \delta(y - \lambda\,x)\, dx\, dy = |1 - \lambda|^{-1} . \tag{11}$$

Dans ce cas local, la transformée de Fourier seule était suffisante pour donner un sens pertinent au produit des distributions. En fait, cela continuerait d'avoir du sens que de remplacer $\delta(y - \lambda\,x)$ par

$$\int h(\lambda^{-1})\, \delta(y - \lambda\,x)\, d^*\lambda$$

où $h(1) = 0$.

Nous allons maintenant traiter en détail le cas général plus délicat dans lequel $h(1)$ est arbitraire.

Nous allons démontrer un résultat général précis (théorème 3) qui gère le manque de transversalité lorsque $h(1) \neq 0$. On travaille directement avec l'opérateur suivant dans $L^2(K)$,

$$U(h) = \int h(\lambda)\, U(\lambda)\, d^*\lambda\,, \tag{12}$$

où l'opérateur d'échelle $U(\lambda)$ est défini par

$$(U(\lambda)\,\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}\, x) \qquad \forall\, x \in K \tag{13}$$

et où la mesure de Haar multiplicative $d^*\lambda$ est normalisée par,

$$\int_{|\lambda|\in[1,\Lambda]} d^*\lambda \sim \log \Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty\,. \tag{14}$$

Pour interpréter la "trace" de $U(h)$, nous allons procéder comme dans le cas de la formule de trace de Selberg ([Se]) et utiliser une coupure (cut-off). Pour cela, nous utilisons la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace,

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(K)\,;\ \xi(x) = 0 \qquad \forall x\ ,\ |x| > \Lambda\}\,. \tag{15}$$

Alors, P_Λ est l'opérateur multiplicatif par la fonction ρ_Λ, où $\rho_\Lambda(x) = 1$ si $|x| \leq \Lambda$, et $\rho(x) = 0$ pour $|x| > \Lambda$. Cela donne une coupure (cut-off) infrarouge et pour obtenir une coupure (cut-off) ultraviolette, on utilise $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier (qui dépend du caractère de base α). On pose

$$R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda\,. \tag{16}$$

Le résultat principal de cette section est alors,

Théorème 3. *Soit K un corps local de caractère de base α. Soit $h \in \mathcal{S}(K^*)$ à support compact. Alors $R_\Lambda\, U(h)$ est un opérateur de classe trace et quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log'\Lambda + \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

où $2\log'\Lambda = \int_{\lambda\in K^*,\,|\lambda|\in[\Lambda^{-1},\Lambda]} d^*\lambda$, et où la valeur principale $\int'$ est uniquement déterminée par l'appariement avec l'unique distribution sur K qui coïncide avec $\frac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1.

Preuve. On normalise comme ci-dessus la mesure de Haar additive pour qu'elle soit auto-duale sur K. Soit la constante $\rho > 0$ déterminée par l'égalité,

$$\int_{1\leq|\lambda|\leq\Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|} \sim \rho \log \Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty\,. \tag{17}$$

de telle manière que $d^*\lambda = \rho^{-1}\frac{d\lambda}{|\lambda|}$. Soit L l'unique distribution, extension de $\rho^{-1}\frac{du}{|1-u|}$ dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1, $\widehat{L}(1) = 0$. On a alors, par définition,

$$\int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u = \left\langle L,\, \frac{h(u^{-1})}{|u|} \right\rangle\,, \tag{18}$$

où $\frac{h(u^{-1})}{|u|} = 0$ pour u^{-1} en dehors du support de h.

Soit $T = U(h)$. On peut écrire le noyau de Schwartz de T comme,

$$k(x,y) = \int h(\lambda^{-1})\,\delta(y-\lambda x)\,d^*\lambda\,. \tag{19}$$

Étant donné n'importe quel tel noyau k, on introduit son symbole,

$$\sigma(x,\xi) = \int k(x,x+u)\,\alpha(u\xi)\,du \tag{20}$$

comme sa transformée de Fourier partielle. Le noyau de Schwartz $r_\Lambda^t(x,y)$ de la transposée R_Λ^t est donné par,

$$r_\Lambda^t(x,y) = \rho_\Lambda(x)\,(\widehat{\rho_\Lambda})\,(x-y)\,. \tag{21}$$

Ainsi, le symbole σ_Λ de R_Λ^t est simplement,

$$\sigma_\Lambda(x,\xi) = \rho_\Lambda(x)\,\rho_\Lambda(\xi)\,. \tag{22}$$

L'opérateur R_Λ est de classe trace et l'on a,

$$\text{Trace}\,(R_\Lambda\,T) = \int k(x,y)\,r_\Lambda^t(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{23}$$

En utilisant la formule de Parseval, on obtient,

$$\text{Trace}\,(R_\Lambda\,T) = \int_{|x|\le\Lambda,|\xi|\le\Lambda} \sigma(x,\xi)\,dx\,d\xi\,. \tag{24}$$

Maintenant, le symbole σ de T est donné par,

$$\sigma(x,\xi) = \int h(\lambda^{-1})\left(\int \delta(x+u-\lambda x)\,\alpha(u\xi)\,du\right)\,d^*\lambda\,. \tag{25}$$

On a,

$$\int \delta(x+u-\lambda x)\,\alpha(u\xi)\,du = \alpha((\lambda-1)\,x\xi)\,, \tag{26}$$

aussi (25) donne,

$$\sigma(x,\xi) = \rho^{-1}\int_K g(\lambda)\,\alpha(\lambda x\xi)\,d\lambda \tag{27}$$

où,

$$g(\lambda) = h((\lambda+1)^{-1})\,|\lambda+1|^{-1}\,. \tag{28}$$

Puisque h est lisse à support compact sur K^*, la fonction g appartient à $C_c^\infty(K)$.

Alors $\sigma(x,\xi) = \rho^{-1}\,\widehat{g}(x\xi)$ et,

$$\text{Trace}\,(R_\Lambda\,T) = \rho^{-1}\int_{|x|\le\Lambda,|\xi|\le\Lambda} \widehat{g}(x\xi)\,dx\,d\xi\,. \tag{29}$$

Avec $u = x\xi$, on a $dx\, d\xi = du\, \frac{dx}{|x|}$ et, pour $|u| \leq \Lambda^2$,

$$\rho^{-1} \int_{\frac{|u|}{\Lambda} \leq |x| \leq \Lambda} \frac{dx}{|x|} = 2 \log' \Lambda - \log |u| \tag{30}$$

(en utilisant la définition précise de $\log' \Lambda$ pour gérer les termes aux bornes). Ainsi, nous pouvons réécrire (29) comme,

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = \int_{|u| \leq \Lambda^2} \widehat{g}(u)\, (2 \log' \Lambda - \log |u|)\, du \tag{31}$$

Puisque $g \in C_c^\infty(K)$, on a,

$$\int_{|u| \geq \Lambda^2} |\widehat{g}(u)|\, du = O(\Lambda^{-N}) \qquad \forall\, N \tag{32}$$

et de façon similaire, pour $|\widehat{g}(u) \log |u||$. Ainsi,

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = 2\, g(0)\, \log' \Lambda - \int \widehat{g}(u)\, \log |u|\, du\, + o(1). \tag{33}$$

Maintenant, pour n'importe quel corps local K et pour n'importe quel caractère de base α, si nous prenons comme mesure de da la mesure auto-duale, la transformée de Fourier de la distribution $\varphi(u) = -\log |u|$ est donnée ailleurs qu'en 0 par

$$\widehat{\varphi}(a) = \rho^{-1}\, \frac{1}{|a|}\,, \tag{34}$$

avec ρ déterminée par (17). Pour connaître celui-ci, appelons P la distribution sur K donnée par,

$$P(f) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in \mathrm{Mod}(K)}} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\, d^*x + f(0) \log \varepsilon \right). \tag{35}$$

On a $P(f_a) = P(f) - \log |a|\, f(0)$, ce qui est suffisant pour montrer que $\widehat{P}(x)$ est égal à $-\log |x|+$ Cte, et que $\widehat{\varphi}$ diffère de P par un multiple de δ_0.

Alors, la formule de Parseval donne, avec les conventions du théorème 3,

$$-\int \widehat{g}(u)\, \log |u|\, du = \frac{1}{\rho} \int' g(a)\, \frac{da}{|a|}\,. \tag{36}$$

En remplaçant a par $\lambda - 1$ et en appliquant (28), on obtient le résultat escompté. ∎

Nous montrerons dans l'Appendice II que la valeur principale à privilégier, qui dépend du caractère de base α, est la même que dans les formules explicites de Weil.

VI. Le cas global, et le calcul de la formule de trace.

Nous allons maintenant considérer l'action de C_k sur X et écrire l'analogue de IV (17)[1] pour la formule de trace de la distribution.

[1] III (17) dans l'original.

X et C_k sont tous les deux définis comme des quotients et l'on définit

$$\pi : A \to X\,,\ c : \mathrm{GL}_1(A) \to C_k \tag{1}$$

comme les applications quotients correspondantes.

Comme ci-dessus, on considère le graphe Z de l'action

$$f : X \times C_k \to X\,,\ f(x,\lambda) = \lambda x \tag{2}$$

et l'application diagonale

$$\varphi : X \times C_k \to X \times C_k \times X \qquad \varphi(x,\lambda) = (x,\lambda,x)\,. \tag{3}$$

Recherchons d'abord les points fixes, $\varphi^{-1}(Z)$, i.e. les paires $(x,\lambda) \in X \times C_k$ telles que $\lambda x = x$. Choisissons $x = \pi(\widetilde{x})$ et $\lambda = c(j)$. Alors l'égalité $\lambda x = x$ signifie que $\pi(j\widetilde{x}) = \pi(\widetilde{x})$ et alors, il existe $q \in k^*$ tel qu'avec $\widetilde{j} = qj$, on a

$$\widetilde{j}\widetilde{x} = \widetilde{x}\,. \tag{4}$$

Rappelons maintenant que A est le produit direct restreint $A = \underset{\text{res}}{\Pi}\ k_v$ des corps locaux k_v obtenu par complétion de k par rapport à la place v. L'égalité (4) signifie que $\widetilde{j}_v\widetilde{x}_v = \widetilde{x}_v$; ainsi, si $\widetilde{x}_v \neq 0$ pour tout v, il s'ensuit que $\widetilde{j}_v = 1\ \forall v$ et $\widetilde{j} = 1$. Cela montre que la projection de $\varphi^{-1}(Z) \cap C_k \backslash \{1\}$ sur X est l'union des hyperplans

$$\cup H_v\,;\ H_v = \pi(\widetilde{H}_v)\,,\ \widetilde{H}_v = \{x\,;\ x_v = 0\}\,. \tag{5}$$

Chaque $\widetilde{H}_v$ est clos dans A et est invariant par la multiplication par des éléments de k^*. De cela, il découle que H_v est un sous-ensemble clos de X et on vérifie que c'est la fermeture de l'orbite sous C_k de n'importe quel point générique

$$x\,,\ x_u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = v\,. \tag{6}$$

Pour n'importe quel tel point x, le groupe d'isotropie I_x est l'image dans C_k du groupe multiplicatif k_v^*,

$$I_x = k_v^* \tag{7}$$

par l'application $\lambda \in k_v^* \to (1,\ldots,1,\lambda,1,\ldots)$. Cette application apparaît aussi dans la théorie des corps de classes (cf. [W1]) pour relier la théorie de Galois locale à la théorie globale.

Les deux groupes k_v^* et C_k sont commensurables à $\mathbb{R}_+^*$ par l'homomorphisme de modules, qui est propre à image cocompacte,

$$G \xrightarrow{|\ |} \mathbb{R}_+^*\,. \tag{8}$$

Puisque la restriction à k_v^* du module de C_k est le module de k_v^*, il s'ensuit que

$$I_x \text{ est un sous-groupe cocompact de } C_k\,. \tag{9}$$

Cela autorise à normaliser les mesures de Haar respectives de telle manière que le covolume de I_x vaille 1. Cela est en fait assuré par la normalisation canonique des mesures de Haar des groupes modulés (cf. [W3]),

$$\int_{|g|\in[1,\Lambda]} d^*g \sim \log\Lambda \quad \text{quand} \quad \Lambda \to +\infty\,. \tag{10}$$

Il est important de noter que bien que I_x soit cocompact dans C_k, l'orbite de x n'est pas fermée et qu'il est nécessaire de la fermer, le résultat de cette fermeture étant H_v. Nous expliquerons comment justifier ce point plus tard dans la section VII, dans la situation similaire de l'action de C_S sur X_S. Nous pouvons maintenant au vu des résultats des deux sections précédentes écrire la contribution de chaque H_v à la trace de la distribution.

Puisque $\widetilde{H}_v$ est un hyperplan, on peut identifier l'espace transverse N_x à H_v en x avec le quotient

$$N_x = A/\widetilde{H}_v = k_v \tag{11}$$

qui est plus précisément le groupe additif du corps local k_v. Étant donné $j \in I_x$, on a $j_u = 1\ \forall u \neq v$, et $j_v = \lambda \in k_v^*$. L'action de j sur A est linéaire et rend x fixe, ce qui a pour conséquence que l'action sur l'espace transverse N_x est donnée par

$$(\lambda, a) \to \lambda a \quad \forall a \in k_v. \tag{12}$$

Nous pouvons alors espérer aboutir en écrivant la contribution de H_v à la trace de la distribution ainsi,

$$\int_{k_v^*} \frac{h(\lambda)}{|1-\lambda|}\, d^*\lambda \tag{13}$$

où h est la fonction test sur C_k qui s'évanouit en 1. Nous devons alors prêter attention à une contradiction en terme de notations avec la troisième section (formule 9), quand nous avons utilisé le symbole $U(j)$ pour l'opération

$$\big(U(j)f\big)(x) = f(j^{-1}x) \tag{14}$$

tandis que nous avons utilisé j dans la discussion ci-dessus. Cela revient à remplacer la fonction test $h(u)$ par $h(u^{-1})$ et alors, nous obtenons comme analogue formel de IV (17)[2] l'expression suivante pour la trace de la distribution

$$\text{Trace}\,(U(h)) = \sum_v \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,. \tag{15}$$

Maintenant, le côté droit de (15) devient, quand on le restreint à l'hyperplan $h(1) = 0$, la distribution obtenue par André Weil [W3] comme synthèse des formules explicites de la théorie des nombres pour toutes les fonctions L à Grössencharakter. En particulier, nous pouvons la réécrire en

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{L(\chi,\rho)=0} \widehat{h}(\chi,\rho) + \infty\ h(1) \tag{16}$$

où cette fois, la restriction $\text{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ a été éliminée.

[2] noté III (17) dans l'article original.

Ainsi, rendre égales (34) de la section III et (16) pour $h(1) = 0$, devrait permettre d'obtenir l'information souhaitée sur les zéros. Bien sûr, cela nécessite au préalable d'éliminer le rôle de δ, et (comme dans [AB]) de prouver que la trace coïncide avec la trace théorique d'un opérateur ordinaire sur le conoyau de E. On effectue cela pour la formulation connue du théorème du point-fixe de Lefschetz en utilisant les familles.

Une propriété très importante de la partie droite de (15) (et de IV (17) en général) est que si la fonction test h, avec $\mathrm{h}(1) = 0$, est positive,

(17), $$h(u) \geq 0 \quad \forall\ u \in C_k$$

alors le côté droit est *positif*. Cela indique dès le début que, dans le but d'obtenir l'espace de Polya-Hilbert à partir du flot de Riemann, *ce n'est pas* la quantification qui devrait être en jeu mais simplement le passage à l'espace L^2, $X \to L^2(X)$. Effectivement, la positivité de IV (17) est typique des *matrices de permutation* plutôt qu'associée à la quantification. Cette distinction joue un rôle crucial dans la discussion ci-dessus au sujet de la formule de trace, en particulier par le fait que la formule de trace attendue n'est pas une formule semi-classique mais une formule de Leschetz dans l'esprit de [AB].

La discussion ci-dessus *n'est pas* une justification rigoureuse de cette formule. Le premier obstacle évident est que la trace de la distribution est seulement formelle et que, pour lui donner une signification rigoureuse liée aux opérateurs sur les espaces de Hilbert, on a besoin, comme dans la section V, d'effectuer une coupure (cut-off).

La seconde difficulté provient de la présence du paramètre δ comme paramètre de l'espace de Hilbert, alors que δ n'apparaît pas dans la formule de trace.

Comme nous le verrons dans les deux prochaines sections, la coupure (cut-off) éliminera complètement le rôle de δ, et nous montrerons néanmoins (en démontrant la positivité de la distribution de Weil) que la validité de la formule de trace (indépendante de δ) est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour tous les Grössencharakters de k.

VII. Preuve de la formule de trace dans le cas S-local.

Dans le calcul de la trace formelle de la section VI, nous passons sur les difficultés inhérentes à la structure "sioux" de l'espace X.

Pour comprendre comment gérer les formules de traces sur de tels espaces, nous allons considérer la situation légèrement plus simple qui advient lorsqu'on considère seulement un ensemble fini S de places de k.

Dès que la cardinalité de S est plus grande que 3, l'espace correspondant X_S présente la plupart des propriétés "sioux" de X. En particulier, il n'est plus de type I au sens de la Géométrie non-commutative.

Néanmoins, nous pourrons démontrer un résultat général précis (théorème 4) qui montre que la gestion des orbites périodiques ci-dessus, et de leur contribution à la trace, est celle qui convient.

Cela montrera en particulier pourquoi les orbites du point fixe 0, ou des éléments $x \in A$, tels que x_v s'évanouit en au moins deux places, ne contribuent pas à la formule de trace.

En même temps, nous gèrerons, comme dans la section V, l'absence de transversalité quand $h(1) \neq 0$.

Décrivons d'abord le contexte réduit pour la formule de trace. Prenons k un corps global et S un ensemble fini de places de k contenant toutes les places infinies. Le groupe O_S^* des S-unités est défini comme le sous-groupe de k^*,

$$O_S^* = \{q \in k^*, |q_v| = 1, v \notin S\} \tag{1}$$

Il est cocompact dans J_S^1 où,

$$J_S = \prod_{v \in S} k_v^* \tag{2}$$

et,

$$J_S^1 = \{j \in J_S, |j| = 1\}. \tag{3}$$

Ainsi, le groupe-quotient $C_S = J_S/O_S^*$ joue le même rôle que C_k, et agit sur le quotient X_S de $A_S = \prod_{v \in S} k_v$ par O_S^*.

Pour avoir à l'esprit un exemple simple, on peut prendre $k = \mathbb{Q}$, avec S constitué des trois places 2, 3, et ∞. On vérifie sur cet exemple que la topologie de X_S n'est pas de type I puisque par exemple, le groupe $O_S^* = \{\pm 2^n 3^m;\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ agit ergodiquement sur $\{0\} \times \mathbb{R} \subset A_S$.

On normalise la mesure de Haar $d^*\lambda$ de C_S par,

$$\int_{|\lambda| \in [1,\Lambda]} d^*\lambda \sim \log \Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty\,, \tag{4}$$

et on normalise la mesure de Haar multiplicative $d^*\lambda$ de J_S de telle manière qu'elle coïncide sur le domaine fondamental D avec l'action de O_S^* sur J_S.

Il n'y a pas de difficulté à définir l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$ des fonctions de carré intégrable sur X_S. Nous procédons comme dans la section III (sans le δ), et nous complétons (et séparons) l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(A_S)$ pour la structure préhilbertienne donnée par,

$$\|f\|^2 = \int \Big| \sum_{q \in O_S^*} f(qx) \Big|^2 |x|\, d^*x \tag{5}$$

où l'intégrale est calculée sur C_S ou, de manière équivalente, sur un domaine fondamental D pour l'action de O_S^* sur J_S.

Pour montrer que (5) fait sens, on prouve que pour $f \in \mathcal{S}(A_S)$, la fonction $E_0(f)(x) = \sum_{q \in O_S^*} f(qx)$ est bornée supérieurement par une puissance de $\log |x|$ quand $|x|$ tend vers zéro. Pour voir cela quand

f est la fonction caractéristique de $\{x \in A_S, |x_v| \leq 1\,, \forall v \in S\}$, on utilise la cocompacité de O_S^* dans J_S^1, pour remplacer la somme par une intégrale. Cette dernière intégrale est alors comparable à,

$$\int_{u_i \geq 0, \sum u_i = -\log|x|} \prod du_i, \tag{6}$$

où l'indice i varie dans S. Le cas général découle de cela.

L'opérateur d'échelle $U(\lambda)$ est défini par,

$$(U(\lambda)\,\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}\,x) \qquad \forall\, x \in A_S \tag{7}$$

et la même formule, avec $x \in X_S$, définit son action sur $L^2(X_S)$.

Se donner une fonction lisse h supportée de façon compacte sur C_S, $U(h) = \int h(g)U(g)dg$, consiste à se donner un opérateur agissant sur $L^2(X_S)$.

Nous allons maintenant montrer que la transformée de Fourier F sur $\mathcal{S}(A_S)$ s'étend à un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.

Lemme 1. *a) Pour toute fonction $f_i \in \mathcal{S}(A_S)$, les séries $\sum_{O_S^*} \langle f_1, U(q)\, f_2\rangle_A$ des produits intérieurs sur $L^2(A_S)$ convergent géométriquement sur le groupe commutatif fini engendré O_S^*. De plus, leur somme est égale au produit intérieur de f_1 et f_2 dans l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.*

b) Soit $\alpha = \prod \alpha_v$ un caractère de base du groupe additif A_S et F la transformée de Fourier lui correspondant. La fonction $f \to F(f)$, $f \in \mathcal{S}(A_S)$ étend de façon unique l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.

Preuve. La fonction $L : O_S^* \to \mathbb{R}^S$, donnée par $L(u)_v = \log|u_v|$ a un noyau fini et son image est un treillis sur l'hyperplan $H = \{(y_v), \sum_S y_v = 0\}$. Sur H, on a $Sup_S y_v \geq 1/2n \sum |y_v|$, où $n = card(S)$. Alors, on a l'inégalité

$$Sup_S|q_v| \geq \exp(d(q,1)) \qquad \forall q \in O_S^* \tag{8}$$

pour une métrique spatiale adéquate d sur O_S^*.

Soit $K_n = \{x \in A_S;\, |x_v| \leq n,\ \forall v \in S\}$ et k_n la fonction caractéristique de K_n. Soit (λ_n) une suite à décroissance rapide telle que,

$$|f_i(x)| \leq \sum \lambda_n\, k_n(x) \qquad \forall x \in A_S. \tag{9}$$

On a pour une constante adéquate c,

$$|\left\langle k_n, U(q^{-1})\, k_n\right\rangle| \leq c\, n^m (Sup_S|q_v|)^{-1} \tag{10}$$

où $m = Card(S)$.

En utilisant (9), on voit alors que $\langle f_1, U(q)\, f_2\rangle_A$ décroît exponentiellement sur O_S^*. En appliquant le théorème de Fubini, on aboutit à l'égalité,

$$\int \Big|\sum_{q \in O_S^*} f(qx)\Big|^2 |x|\, d^*x = \sum_{O_S^*} \langle f, U(q)\, f\rangle_A\,. \tag{11}$$

Cela prouve a). Pour prouver b), on utilise seulement (11) et les égalités $\langle Ff,\, Ff\rangle_A = \langle f,\, f\rangle_A$ et $F(U(q)\, f) = U(q^{-1})F(f)$. ∎

Maintenant, exactement comme dans le cas des corps locaux ci-dessus (théorème V.3), on a besoin d'utiliser une coupure (cut-off). Pour cela, on utilise la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace,

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(X_S)\,;\ \xi(x) = 0 \qquad \forall x\ ,\ |x| > \Lambda\}\,. \tag{12}$$

Ainsi, P_Λ est l'opérateur multiplicatif par la fonction ρ_Λ, où $\rho_\Lambda(x) = 1$ si $|x| \leq \Lambda$, et $\rho(x) = 0$ pour $|x| > \Lambda$. Cela donne une coupure (cut-off) infrarouge et pour obtenir une coupure ultraviolette, on utilise $\widehat{P}_\Lambda = FP_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier (lemme 1) qui dépend du choix du caractère de base $\alpha = \prod \alpha_v$. On pose,

$$R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda\,. \tag{13}$$

Le résultat principal de cette section est alors,

Théorème 4. *Soit A_S défini comme précédemment, avec un caractère de base $\alpha = \prod \alpha_v$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ possédant un support compact. Alors quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log'\Lambda + \sum_{v\in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

où $2\log'\Lambda = \int_{\lambda\in C_S,\, |\lambda|\in[\Lambda^{-1},\Lambda]} d^*\lambda$, chaque k_v^* est envoyé sur C_S par la fonction $u \to (1, 1, ..., u, ..., 1)$ et la valeur principale $\int'$ est déterminée de manière unique par l'appariement avec l'unique distribution sur k_v qui coïncide avec $\frac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier relative à α_v s'évanouit en 1.

Preuve. On normalise comme ci-dessus la mesure de Haar additive dx pour qu'elle soit la mesure auto-duale sur le groupe abélien A_S. On détermine la constante $\rho > 0$ par l'égalité (où le domaine fondamental D est comme ci-dessus),

$$\int_{\lambda\in D,\, 1\leq|\lambda|\leq\Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|} \sim \rho\log\Lambda \qquad \text{quand } \Lambda\to\infty\,.$$

de telle façon que $d^*\lambda = \rho^{-1}\frac{d\lambda}{|\lambda|}$.

On prend f une fonction compacte lisse supportée par J_S et telle que

$$\sum_{q\in O_S^*} f(qg) = h(g) \qquad \forall\, g \in C_S. \tag{14}$$

L'existence d'une telle fonction f découle du caractère discret de O_S^* dans J_S. Nous avons alors l'égalité $U(f) = U(h)$, où

$$U(f) = \int f(\lambda)\, U(\lambda)\, d^*\lambda\,, \tag{15}$$

Pour calculer la trace de $U(h)$ agissant sur les fonctions de l'espace quotient X_S, on procède comme dans le calcul de la formule de trace de Selberg (cf. [Se]). Ainsi pour un opérateur T, agissant sur les fonctions sur A_S, qui commute avec l'action de O_S^* et qui est représenté par un noyau entier,

$$T(\xi) = \int k(x,y)\xi(y)\, dy, \tag{16}$$

la trace de son action sur $L^2(X_S)$ est donnée par,

$$\text{Trace}(T) = \sum_{q \in O_S^*} \int_D k(x, qx) dx. \tag{17}$$

où D est comme ci-dessus le domaine fondamental de l'action de O_S^* sur le sous-ensemble J_S de A_S, dont le complément est négligeable. Posons $T = U(f)$. On peut écrire le noyau de Schwartz de T comme,

$$k(x, y) = \int f(\lambda^{-1})\, \delta(y - \lambda x)\, d^*\lambda\,. \tag{18}$$

Par construction, on a,

$$k(qx, qy) = k(x, y) \qquad q \in O_S^*. \tag{19}$$

Pour n'importe quel $q \in O_S^*$, nous évaluerons l'intégrale,

$$I_q = \int_{x \in D} k(qx, y) r_\Lambda^t(x, y) dy dx \tag{20}$$

où le noyau de Schwartz $r_\Lambda^t(x, y)$ pour la transposée R_Λ^t est donné par,

$$r_\Lambda^t(x, y) = \rho_\Lambda(x)\, (\widehat{\rho_\Lambda})\, (x - y)\,. \tag{21}$$

Pour évaluer l'intégrale ci-dessus, on pose $y = x + a$ et on calcule la transformée de Fourier en a.

Pour la transformée de Fourier en a de $r_\Lambda^t(x, x + a)$, on obtient,

$$\sigma_\Lambda(x, \xi) = \rho_\Lambda(x)\, \rho_\Lambda(\xi)\,. \tag{22}$$

Pour la transformée de Fourier en a de $k(qx, x + a)$, on obtient,

$$\sigma(x, \xi) = \int f(\lambda^{-1}) \left(\int \delta(x + a - \lambda q x)\, \alpha(a\xi)\, da \right) d^*\lambda\,. \tag{23}$$

On a,

$$\int \delta(x + a - \lambda q x)\, \alpha(a\xi)\, da = \alpha((\lambda q - 1)\, x\xi)\,, \tag{24}$$

ainsi (23) donne,

$$\sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \int_{A_S} g_q(u)\, \alpha(ux\xi)\, du \tag{25}$$

où,

$$g_q(u) = f(q(u + 1)^{-1})\, |u + 1|^{-1}\,. \tag{26}$$

Puisque f est lisse à support compact sur A_S^*, la fonction g_q appartient à $C_c^\infty(A_S)$.

Ainsi $\sigma(x, \xi) = \rho^{-1}\, \widehat{g}_q(x\xi)$ et, en utilisant la formule de Parseval, on obtient,

$$I_q = \int_{x \in D,\, |x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \sigma(x, \xi)\, dx\, d\xi\,. \tag{27}$$

Cela donne,

$$I_q = \rho^{-1} \int_{x\in D,\, |x|\le\Lambda, |\xi|\le\Lambda} \widehat{g}_q(x\xi)\, dx\, d\xi\,. \tag{28}$$

Avec $u = x\xi$, on a $dx\, d\xi = du\, \frac{dx}{|x|}$ et, pour $|u| \le \Lambda^2$,

$$\rho^{-1} \int_{x\in D,\, \frac{|u|}{\Lambda}\le|x|\le\Lambda} \frac{dx}{|x|} = 2\log'\Lambda - \log|u| \tag{29}$$

(en utilisant la définition précise de $\log'\Lambda$ pour gérer les termes aux limites). Ainsi, on peut réécrire (28) comme,

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, T) = \sum_{q\in O_S^*} \int_{|u|\le\Lambda^2} \widehat{g}_q(u)\,(2\log'\Lambda - \log|u|)\, du \tag{30}$$

Maintenant $\log|u| = \sum_{v\in S} \log|u_v|$, et nous allons d'abord prouver que,

$$\sum_{q\in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u)\, du = \, h(1), \tag{31}$$

alors que pour tout $v \in S$,

$$\sum_{q\in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u)\,(-\log|u_v|)\, du = \int_{k_v^*}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,. \tag{32}$$

En fait, toutes les sommes dans q auront seulement des termes non-nuls certains nombres finis de fois.

Il restera alors à contrôler le terme d'erreur, c'est-à-dire à montrer que,

$$\sum_{q\in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u)\,(\log|u| - 2\log'\Lambda)^+\, du = 0(\Lambda^{-N}) \tag{33}$$

pour tout N, où nous avons utilisé la notation $x^- = 0$ si $x \le 0$ et $x^+ = x$ si $x > 0$.

Maintenant, on rappelle que,

$$g_q(u) = f(q(u+1)^{-1})\,|u+1|^{-1}\,,$$

de telle façon que $\int \widehat{g}_q(u)\, du = g_q(0) = f(q)$. Puisque f est à support compact dans A_S^*, l'intersection de O_S^* avec le support de f est finie et par (14), on obtient l'égalité (31).

Pour prouver (32), on considère la projection naturelle pr_v de $\prod_{l\in S} k_l^*$ sur $\prod_{l\ne v} k_l^*$. L'image $pr_v(O_S^*)$ est encore un sous-groupe discret de $\prod_{l\ne v} k_l^*$, (puisque k_v^* est cocompact dans C_S) ; ainsi, il y a seulement un nombre fini de $q \in O_S^*$ tels que k_v^* rencontre le support f_q, c'est-à-dire tels que $f_q(a) = f(qa)$ pour tout a.

Pour chaque $q \in O_S^*$, on a, comme dans la section V,

$$\int \widehat{g}_q(u)\,(-\log|u_v|)\, du = \int_{k_v^*}' \frac{f_q(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,, \tag{34}$$

et comme nous venons de le voir, cette intégrale s'évanouit excepté pour un nombre fini de q, de telle manière que, par (14), on obtienne l'égalité (32).

Prouvons (33). Soient $\varepsilon_\Lambda(u) = (\log|u| - 2\log'\Lambda)^+$, et,

$$\delta_q(\Lambda) = \int \widehat{g}_q(u)\,\varepsilon_\Lambda(u)\,du \tag{35}$$

le terme d'erreur. Nous allons démontrer le

Lemme 2. *Pour tout Λ, les séries $\sum_{O_S^*}|\delta_q(\Lambda)|$ convergent géométriquement sur le groupe commutatif fini engendré O_S^*.*
De plus, la somme $\sigma(\Lambda)$ est en $O(\Lambda^{-N})$ pour un N au moins.

Preuve. Soit d une métrique adéquate sur O_S^* (cf. (8)) telle que,

$$Sup_S|q_v| \geq exp(d(q,1)) \qquad \forall q \in O_S^* \tag{36}$$

Soit $\xi \in \mathcal{S}(A_S)$ définie par $\xi(x) = f(x^{-1})|x^{-1}|$ pour tout $x \in A_S^*$ et étendue par la valeur 0 partout ailleurs. On a $g_q(x) = \xi(q^{-1}(1+x))$ pour tout $x \in A_S$, de telle sorte que $\widehat{g}_q(u) = \int g_q(x)\alpha(u\,x)\,dx = \alpha(-u)\,\widehat{\xi}(q\,u)$. Maintenant,

$$\delta_q(\Lambda) = \int \widehat{g}_q(u)\,\varepsilon_\Lambda(u)\,du = \int \widehat{\xi}(q\,u)\,\alpha(-u)\;\varepsilon_\Lambda(u)\,du = \int \widehat{\xi}(y)\,\alpha(-q^{-1}\,y)\,\varepsilon_\Lambda(y)\,dy,$$

puisque $\varepsilon_\Lambda(q\,u) = \varepsilon_\Lambda(u)$ pour tout u.

Ainsi, nous obtenons, en utilisant le symbole $\overline{F}\eta$ pour la transformée de Fourier inverse de η, l'égalité,

$$\delta_q(\Lambda) = \overline{F}(\varepsilon_\Lambda\widehat{\xi})(q^{-1}). \tag{37}$$

Soit $\alpha \in]0,1/2[$ et considérons la norme,

$$\|\eta\| = Sup_{x\in A_S}|F(\eta)(x)\,Sup_S|x_v|^\alpha|. \tag{38}$$

Dans le but d'estimer (38), choisissons une fonction lisse ψ sur $\mathbb{R}$, égale à 1 dans un voisinage de 0, et avec support dans $[-1,1]$, et introduisons les opérateurs de convolution,

$$(C_{\alpha,v} * \eta)(x) = \int_{k_v} \psi(|\varepsilon|)(\eta(x+\varepsilon) - \eta(x))\frac{d\varepsilon}{|\varepsilon|^{1+\alpha}}\ , \tag{39}$$

et les normes,

$$\|\eta\|_{(1,\alpha,v)} = \|C_{\alpha,v} * \eta\|_1\ , \tag{40}$$

où $\|\ \|_1$ est la L^1-norme.

La transformée de Fourier k_v de la distribution $C_{\alpha,v}$ se comporte comme $|x_v|^\alpha$ pour $|x_v| \to \infty$. Ainsi, en utilisant $F(C_{\alpha,v} * \eta) = F(C_{\alpha,v})\,F(\eta)$, et le contrôle de la norme supérieure $F(g)$ par la L^1-norme de g, nous obtenons une inégalité de la forme,

$$Sup_{x\in A_S}|F(\eta)(x)\,Sup_S|x_v|^\alpha| \leq c_\alpha \sum_S \|\eta\|_{(1,\alpha,v)}\,. \tag{41}$$

Montrons maintenant que, pour tout $\eta \in \mathcal{S}(A_S)$, et $\alpha < 1/2$, on a,

$$\|\varepsilon_\Lambda\, \eta\|_{(1,\alpha,v)} = O(\Lambda^{-N})\,, \tag{42}$$

pour un certain N.

On a
$|(\varepsilon_\Lambda(x+\varepsilon)\eta(x+\varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x)\eta(x)) - \varepsilon_\Lambda(x)(\eta(x+\varepsilon) - \eta(x))| \leq |(\varepsilon_\Lambda(x+\varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x))||\eta(x+\varepsilon)|$.

De plus, en utilisant l'inégalité,

$$|a^+ - b^+| \leq |a-b|\,, \tag{43}$$

on voit que $|(\varepsilon_\Lambda(x+\varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x))| \leq |\log|x_v+\varepsilon| - \log|x_v||$, pour $\varepsilon \in k_v$.

Posons alors,

$$c'_\alpha = \int_{k_v} \log|1+y| \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}\ . \tag{44}$$

Ce nombre est fini pour toutes les places $v \in S$ dans la mesure où $\alpha < 1/2$, et on a,

$$\int_{k_v} \psi(|\varepsilon|)(|\log|x+\varepsilon| - \log|x||)\frac{d\varepsilon}{|\varepsilon|^{1+\alpha}}\ \leq c'_\alpha |x|^{-\alpha}\,. \tag{45}$$

Ainsi, on obtient l'inégalité,

$$|C_{\alpha,v} * \varepsilon_\Lambda\, \eta - \varepsilon_\Lambda\,(C_{\alpha,v} * \eta)|(x) \leq c'_\alpha |x_v|^{-\alpha}\, Sup_{\varepsilon\in k_v, |\varepsilon|\leq 1}\, |\eta(x+\varepsilon)|. \tag{46}$$

Puisque la fonction $|x_v|^{-\alpha}$ est localement intégrable, pour $\alpha < 1$, on a pour $\eta \in \mathcal{S}(A_S)$, et pour tout N,

$$\int_{X_\Lambda} |x_v|^{-\alpha}\, Sup_{\varepsilon\in k_v, |\varepsilon|\leq 1}\, |\eta(x+\varepsilon)|dx\ = O(\Lambda^{-N})\,, \tag{47}$$

où $X_\Lambda = \{\, y+\varepsilon;\ |y| \geq \Lambda,\ \varepsilon \in k_v,\ |\varepsilon| \leq 1\,\}$.

De plus, on a pour un certain N,

$$\|\varepsilon_\Lambda\,(C_{\alpha,v} * \eta)\|_1 = \ O(\Lambda^{-N}). \tag{48}$$

Ainsi, en utilisant (46), on obtient l'inégalité (42).

En prenant $\eta = \widehat{\xi}$ et en utilisant (41), on obtient des nombres δ_Λ, tels que $\delta_\Lambda\ = O(\Lambda^{-N})$ pour tout N et tels que,

$$|\overline{F}(\varepsilon_\Lambda \widehat{\xi}) Sup_S |x_v|^\alpha|| \leq \delta_\Lambda \qquad \forall x \in A_S\, \forall \Lambda. \tag{49}$$

En prenant $x = q \in O_S^*$, et en utilisant (36) et (37), on obtient,

$$|\delta_q(\Lambda)| \leq \delta_\Lambda exp(-d(q,1)) \qquad \forall q \in O_S^*, \tag{50}$$

qui est l'inégalité souhaitée. ∎

VIII. Formule de trace dans le cas global, et élimination de δ.

La principale difficulté amenée par le paramètre δ dans le Théorème 1 est que le calcul de la trace formelle de la section VI est indépendant de δ, et ainsi ne peut pas donner en général la valeur attendue pour la trace, du fait du théorème 1, puisque dans ce dernier, tout zéro critique ρ est compté avec une multiplicité égale au plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$, $n \leq$ la multiplicité de ρ comme zéro de L. En particulier, avec les fonctions L à zéros multiples, la δ-dépendance du côté spectral est non-triviale. Il est également clair que l'introduction du paramètre δ élimine artificiellement les zéros non-critiques de l'espace des fonctions $L^2_\delta(X)$.

Comme nous le verrons, tous ces problèmes sont éliminés par la coupure (cut-off). Cette dernière sera directement pratiquée sur l'espace de Hilbert $L^2(X)$ de telle manière que la seule valeur de δ qui sera utilisée est $\delta = 0$. Tous les zéros joueront un rôle du côté spectral de la formule de trace, mais, alors que les zéros critiques apparaîtront per-se, les zéros non-critiques apparaîtront en tant que résonances, et ils seront pris en compte dans la formule de trace à travers leur potentiel harmonique par rapport à la droite critique. Ainsi, le côté spectral est entièrement canonique et indépendant de δ, et en prouvant la positivité de la distribution de Weil, nous montrerons que cette égalité avec le côté géométrique, i.e. l'analogue global du théorème 4, est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössencharakter.

Le groupe abélien A des adèles de k est son propre dual de Pontrjagin du fait de l'appariement

$$\langle a, b\rangle = \alpha(ab) \tag{1}$$

où $\alpha : A \to U(1)$ est un caractère non-trivial qui s'évanouit sur $k \subset A$. Noter qu'un tel caractère est *non canonique*, mais que n'importe quels deux tels caractères α et α' sont reliés par k^*,

$$\alpha'(a) = \alpha(qa) \quad \forall a \in A\,. \tag{2}$$

Il suit de cela que les transformées de Fourier correspondantes sur A sont reliées par

$$\widehat{f'} = \widehat{f}_q\,. \tag{3}$$

C'est une raison de plus pour quotienter par des fonctions de la forme $f - f_q$, i.e. pour considérer l'espace-quotient X.

Fixons le caractère additif α comme ci-dessus, $\alpha = \prod \alpha_v$ et choisissons d une idèle différentielle,

$$\alpha(x) = \alpha_0(d\,x) \quad \forall x \in A\,, \tag{4}$$

où $\alpha_0 = \prod \alpha_{0,v}$ est le produit des caractères normalisés locaux (cf. [W1]). Soit S_0 l'ensemble fini des places auxquelles α_v est ramifié.

Nous nous concentrerons d'abord sur le cas de caractéristique positive, i.e. sur le cas des corps de fonctions, à la fois parce qu'il est techniquement plus simple, mais également parce qu'il permet de garder la trace de la signification géométrique de la construction (cf. section II).

De façon à comprendre comment réaliser, dans le cas global, la coupure (cut-off) $R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda$ de la section VII, nous allons d'abord analyser la position relative de la paire de projections $\widehat{P}_\Lambda$, P_Λ quand $\Lambda \to \infty$. Ainsi, appelons $S \supset S_0$ un ensemble fini de places de k, suffisamment grand pour que $mod(C_S) = mod(C_k) = q^{\mathbb{Z}}$ et tel que, pour tout domaine fondamental quelconque D pour l'action de O_S^* sur J_S, le produit $D \times \prod R_v^*$ soit un domaine fondamental pour l'action de k^* sur J_k.

$\widehat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent toutes deux avec la décomposition de $L^2(X_S)$ comme sommes directes des sous-espaces, indexées par les caractères χ_0 de $C_{S,1}$,

$$L^2_{\chi_0} = \{\xi \in L^2(X_S)\,;\, \xi(a^{-1}x) = \chi_0(a)\,\xi(x),\ \ \forall\, x \in X_S\,, a \in C_{S,1}\} \tag{5}$$

qui correspondent aux projections $P_{\chi_0} = \int \overline{\chi_0}(a)\, U(a)\, d_1\, a$, où $d_1\, a$ est la mesure de Haar de masse totale 1 sur $C_{S,1}$.

Lemme 1. *Soit χ_0 un caractère de $C_{S,1}$, alors pour Λ suffisamment grand, $\widehat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent sur l'espace de Hilbert $L^2_{\chi_0}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{U}_S$ l'image dans C_S du sous-groupe ouvert $\prod R_v^*$. C'est un sous-groupe d'indice fini l dans $C_{S,1}$. Fixons un caractère χ de $\mathcal{U}_S$ et considérons la somme directe finie des espaces de Hilbert $L^2_{\chi_0}$ où χ_0 varie parmi les caractères de $C_{S,1}$ dont la restriction à $\mathcal{U}_S$ est égale à χ,

$$L^2(X_S)_\chi = \{\xi \in L^2(X_S)\,;\, \xi(a^{-1}x) = \chi(a)\,\xi(x),\ \ \forall\, x \in X_S\,, a \in \mathcal{U}_S\} \tag{6}$$

La projection orthogonale correspondante est $U(h_\chi)$, où $h_\chi \in \mathcal{S}(C_S)$ est telle que,

$$Supp(h_\chi) = \mathcal{U}_S \qquad h_\chi(x) = \lambda\, \overline{\chi}(x) \qquad \forall\, x \in \mathcal{U}_S \tag{7}$$

et la constante $\lambda = l/\log q$, correspond à la normalisation standard de la mesure de Haar sur C_S. Choisissons comme dans la section VII, $f \in \mathcal{S}(J_S)$ avec un support $\prod R_v^*$ tel que $U(f) = U(h)$ et prenons $\xi \in \mathcal{S}(A_S)$ définie par $\xi(x) = f(x^{-1})|x^{-1}|$ pour tout $x \in A_S^*$ et étendue par la valeur 0 partout ailleurs.

Puisque ξ est localement constante, sa transformée de Fourier est de support compact et l'égalité (37) de la section VII montre que pour Λ suffisamment grand, on a l'égalité,

$$\mathrm{Trace}\,(\widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda\, U(h_\chi)) = 2h_\chi(1)\log'\Lambda + \sum_{v\in S} \int'_{k_v^*} \frac{h_\chi(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u \tag{8}$$

Avec $\Lambda = q^N$, on a $2\log'\Lambda = (2N+1)\log q$ de telle sorte que,

$$2h_\chi(1)\log'\Lambda = (2N+1)l \tag{9}$$

Le caractère χ de $\prod R_v^*$ est un produit, $\chi = \prod \chi_v$ et si l'on utilise le caractère standard additif α_0 pour prendre la valeur principale, on a (cf. [W1] Appendice IV),

$$\int'_{R^*_v} \frac{\chi_v(u)}{|1-u|}\, d^*u = -f_v \log q_v \tag{10}$$

où f_v est l'ordre de ramification de χ_v. Nous obtenons ainsi,

$$\int_{k_v^*}{}' \frac{h_\chi(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u = -f_v\, deg(v)\, l + l\, \frac{\log|d_v|}{\log q} \tag{11}$$

où $q_v = q^{deg(v)}$, et puisque nous utilisons le caractère additif α_v, nous devons prendre en compte le décalage $\log|d_v|\, h_\chi(1)$ dans la valeur principale.

Maintenant, on a $|d| = \prod |d_v| = q^{2-2g}$, où g est le genre de la courbe. Ainsi, nous obtenons,

$$\text{Trace}\,(\widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda\, U(h_\chi)) = (2N+1)l - f\, l + (2-2g)\, l \tag{12}$$

où $f = \sum_S f_v\, deg(v)$ est l'ordre de ramification de χ, i.e. le degré de son conducteur.

Soit $B_\Lambda = Im(P_\Lambda) \cap Im(\widehat{P}_\Lambda)$ l'intersection des images par les projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$, et B_Λ^χ l'intersection avec $L^2(X_S)_\chi$. Nous allons exhiber pour tout caractère χ de $\mathcal{U}_S$ un vecteur $\eta_\chi \in L^2(X_S)_\chi$ tel que,

$$U(g)(\eta_\chi) \in B_\Lambda \qquad \forall g \in C_S, |g| \leq \Lambda, |g^{-1}| \leq q^{2-2g-f}\, \Lambda, \tag{13}$$

alors que les vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$ sont linéairement indépendants pour $g \in D_S$, où D_S est le quotient de C_S par le sous-groupe ouvert $\mathcal{U}_S$.

Avec $\Lambda = q^N$ comme ci-dessus, le nombre d'éléments g de D_S tels que $|g| \leq \Lambda, |g^{-1}| \leq q^{2-2g-f}\, \Lambda$ est précisément égal à $(2N+1)l - f\, l + (2-2g)\, l$, ce qui autorise à conclure que les projections $\widehat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent dans $L^2(X_S)_\chi$ et que le sous-espace B_Λ^χ est l'extension linéaire des vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$.

Construisons maintenant les vecteurs $\eta_\chi \in L^2(X_S)_\chi$. Avec les notations de [W1] Proposition VII.13, soit,

$$\eta_\chi = \prod_S \phi_v \tag{14}$$

la fonction standard associée à $\chi = \prod \chi_v$ de telle sorte que v, ϕ_v non-ramifiée soit la fonction caractéristique de R_v, alors que pour v ramifiée, elle s'évanouisse en dehors de R_v^* et coïncide avec $\overline{\chi}_v$ sur R_v^*. Par construction, le support de η_χ est contenu dans $R = \prod R_v$, de telle façon que l'on a $U(g)(\eta_\chi) \in Im(P_\Lambda)$ si $|g| \leq \Lambda$. De façon similaire, par [W1] Proposition VII.13, on obtient que $U(g)(\eta_\chi) \in Im(\widehat{P}_\Lambda)$ dès que $|g^{-1}| \leq q^{2-2g-f}\, \Lambda$. Cela montre que η_χ satisfait (13) et il reste à montrer que les vecteurs $U(g)(\eta_\chi)$ sont linéairement indépendants pour $g \in D_S$.

Commençons par une relation non-triviale de la forme,

$$\| \sum \lambda_g U(g)(\eta_\chi) \| = 0 \tag{15}$$

où la norme est prise dans $L^2(X_S)$, (cf. VII.5). Posons alors $\xi_\chi = \prod_S \phi_v \otimes 1_R$ où $R = \prod_{v \notin S} R_v$. Assumons d'abord que $\chi \neq 1$. Alors ξ_χ donne un élément de $L^2_\delta(X)_0$ qui est cyclique pour la représentation U de C_k dans la somme directe des sous-espaces $L^2_{\delta,\chi_0}(X)_0$ où χ_0 varie parmi les caractères de $C_{k,1}$ dont la restriction à $\mathcal{U}$ est égale à χ.

Maintenant, (15) implique que dans $L^2_\delta(X)_0$, on a $\sum \lambda_g U(g)(\xi_\chi) = 0$. Par la cyclicité de ξ_χ, on obtient $\sum \lambda_g U(g) = 0$ sur tout $L^2_{\delta,\chi_0}(X)_0$ ce qui donne une contradiction (cf. Appendice I, Lemme 3).

La preuve que $\chi = 1$ est similaire mais nécessite plus d'attention car $1_R \notin \mathcal{S}_0(A)$. ∎

On peut alors écrire le Théorème 4 dans le cas de la caractéristique positive par le

Corollaire 2. *Soit Q_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace de $L^2(X_S)$ fibré par les $f \in \mathcal{S}(A_S)$ qui s'évanouissent aussi bien que leur transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. Posons que $h \in \mathcal{S}(C_S)$ est à support compact. Alors, quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\mathrm{Trace}\,(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log'\Lambda + \sum_{v\in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

où $2\log'\Lambda = \int_{\lambda\in C_S,\, |\lambda|\in[\Lambda^{-1},\Lambda]} d^*\lambda$, et les autres notations sont les mêmes que celles du Théorème VII.4.

En fait, la preuve du lemme 1 montre que les sous-espaces B_Λ se stabilisent très rapidement, de telle manière que l'application naturelle $\xi \to \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)$ dans $L^2(X'_S)$ pour $S \subset S'$ envoie B^S_Λ sur $B^{S'}_\Lambda$.

On obtient alors du corollaire 2 une formulation globale, indépendante de S, de la coupure (cut-off), et de la formule de trace. Soit $L^2(X)$ l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)$ de la section III pour la valeur triviale $\delta = 0$ qui, bien sûr, élimine le terme déplaisant du produit intérieur, et soit Q_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace B_Λ de $L^2(X)$ fibré par $f \in \mathcal{S}(A)$ qui s'évanouissent comme leur transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. Comme on l'a mentionné précédemment, la preuve du lemme 1 montre que pour S et Λ suffisamment grands (et pour un caractère fixé χ), l'application naturelle $\xi \to \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)_\chi$ dans $L^2(X)_\chi$ envoie B^S_Λ sur B_Λ.

Il est alors naturel de s'attendre à ce que l'analogue global suivant de la formule de trace du corollaire 2 soit vraiment vérifié, i.e. que quand $\Lambda \to \infty$, on ait,

$$\mathrm{Trace}\,(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log'\Lambda + \sum_{v} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1) \tag{16}$$

où $2\log'\Lambda = \int_{\lambda\in C_k,\, |\lambda|\in[\Lambda^{-1},\Lambda]} d^*\lambda$, et les autres notations sont celles du Théorème VII.4.

Nous pouvons prouver directement que (16) est vérifiée quand h est supporté par $C_{k,1}$ mais nous ne pouvons prouver (16) directement pour un h arbitraire (même si le côté droit de la formule ne contient qu'un nombre fini de termes non-nuls puisque $h \in \mathcal{S}(C_k)$ est à support compact). Ce que nous allons cependant montrer, c'est que la formule de trace (16) implique la positivité de la distribution de Weil, et ainsi la validité de RH pour k. Rappelons-nous que nous sommes encore en caractéristique positive et qu'alors RH est un théorème de A.Weil. Il sera alors important de vérifier l'équivalence effective entre la validité de RH et la formule (16). Cela se fait par le,

Théorème 5. *Soit k un corps global de caractéristique positive et Q_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace de $L^2(X)$ fibré par les $f \in \mathcal{S}(A)$ tels que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'évanouissent pour $|x| > \Lambda$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_k)$ à support compact. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes,*

a) Quand $\Lambda \to \infty$, on a

$$\mathrm{Trace}\,(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log'\Lambda + \sum_v \int_{k_v^*}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

b) Toutes les fonctions L à Grössencharakter sur k satisfont l'hypothèse de Riemann.

Preuve. Pour prouver que a) implique b), nous allons prouver (en assumant a)) la positivité de la distribution de Weil (cf. Appendice II),

$$\Delta = \log|d^{-1}|\,\delta_1 + D - \sum_v D_v\,. \tag{17}$$

D'abord, le théorème III.1 est appliqué pour $\delta = 0$. L'application E,

$$E(f)\,(g) = |g|^{1/2} \sum_{q\in k^*} f(qg) \qquad \forall\, g \in C_k\,, \tag{18}$$

définit une isométrie surjective de $L^2(X)_0$ dans $L^2(C_k)$ de telle sorte que,

$$E\,U(a) = |a|^{1/2}\,V(a)\,E\,, \tag{19}$$

où la représentation régulière gauche V de C_k sur $L^2(C_k)$ est donnée par,

$$(V(a)\,\xi)\,(g) = \xi(a^{-1}\,g) \qquad \forall\, g, a \in C_k\,. \tag{20}$$

Soit S_Λ le sous-espace de $L^2(C_k)$ donné par,

$$S_\Lambda = \{\xi \in L^2(C_k)\,;\ \xi(g) = 0,\ \ \forall g\ ,\ |g| \notin [\Lambda^{-1},\,\Lambda]\}\,. \tag{21}$$

Nous noterons par la même lettre la projection orthogonale correspondante.

Soit $B_{\Lambda,0}$ le sous-espace de $L^2(X)_0$ fibré par les $f \in \mathcal{S}(A)_0$ de telle façon que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'évanouissent pour $|x| > \Lambda$ et soit $Q_{\Lambda,0}$ la projection orthogonale correspondante. Soit $f \in \mathcal{S}(A)_0$ telle que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'évanouissent pour $|x| > \Lambda$, alors $E(f)\,(g)$ s'évanouit pour $|g| > \Lambda$, et l'égalité (Appendice I)

$$E(f)(g) = E(\widehat{f})\left(\frac{1}{g}\right) \qquad f \in \mathcal{S}(A)_0, \tag{22}$$

montre que $E(f)\,(g)$ s'évanouit pour $|g| < \Lambda^{-1}$.

Cela montre que $E(B_{\Lambda,0}) \subset S_\Lambda$, de telle manière que si l'on prend $Q'_{\Lambda,0} = E\,Q_{\Lambda,0}\,E^{-1}$, on obtient l'inégalité,

$$Q'_{\Lambda,0} \leq S_\Lambda \tag{23}$$

et que pour un Λ donné, la distribution suivante sur C_k est de type positif,

$$\Delta_\Lambda(f) = \text{Trace}\,((S_\Lambda - Q'_{\Lambda,0})\,V(f)), \tag{24}$$

i.e. on a,

$$\Delta_\Lambda(f * f^*) \geq 0, \tag{25}$$

où $f^*(g) = \overline{f}(g^{-1})$ pour tout $g \in C_k$.

Prenons alors $f(g) = |g|^{-1/2}\, h(g^{-1})$, de telle façon que par (19), on ait $E\,U(h) = V(\widetilde{f})E$ où $\widetilde{f}(g) = f(g^{-1})$ pour tout $g \in C_k$. Par le lemme 3 de l'Appendice II, on a,

$$\sum_v D_v(f) - \log|d^{-1}| = \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u. \tag{26}$$

On a $\text{Trace}\,(S_\Lambda\, V(f)) = 2f(1)\log'\Lambda$. Aussi, en utilisant a), on voit que la limite de Δ_Λ quand $\Lambda \to \infty$ est la distribution de Weil Δ (cf.(17)). Le terme D dans la dernière équation provient de la nuance entre les sous-espaces B_Λ et $B_{\Lambda,0}$. Cela montre, en utilisant (24), que la distribution Δ est de type positif de telle façon que b) est vérifiée (cf. [W3]).

Montrons maintenant que b) implique a). Nous allons calculer à partir des zéros des fonctions L, et indépendamment d'une quelconque hypothèse, la limite des distributions Δ_Λ quand $\Lambda \to \infty$.

Nous choisissons (de manière non canonique) un isomorphisme

$$C_k \simeq C_{k,1} \times N\,. \tag{27}$$

où $N = \text{image}\,|\ | \subset \mathbb{R}_+^*$, $N \simeq \mathbb{Z}$ est le sous-groupe $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Pour $\rho \in \mathbb{C}$, soit $d\mu_\rho(z)$ la mesure harmonique de ρ par rapport à la ligne $i\,\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. C'est une mesure de probabilité sur la ligne $i\,\mathbb{R}$ et elle coïncide avec la masse de Dirac de ρ quand ρ est sur la ligne.

L'implication b)⇒a) découle immédiatement des formules explicites (Appendice II) et du lemme suivant,

Lemme 3. *La limite des distributions Δ_Λ quand $\Lambda \to \infty$ est donnée par,*

$$\Delta_\infty(f) = \sum_{\substack{L\left(\widetilde{\chi},\frac{1}{2}+\rho\right)=0 \\ \rho \in B/N^\perp}} N(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2}+\rho) \int_{z \in i\,\mathbb{R}} \widehat{f}(\widetilde{\chi}, z) d\mu_\rho(z)$$

où B est la bande ouverte $B = \{\rho \in \mathbb{C}; Re(\rho) \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[\}$, $N(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2}+\rho)$ est la multiplicité du zéro, $d\mu_\rho(z)$ est la mesure harmonique de ρ par rapport à la ligne $i\,\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, et la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est définie par,

$$\widehat{f}(\widetilde{\chi}, \rho) = \int_{C_k} f(u)\, \widetilde{\chi}(u)\, |u|^\rho\, d^*\, u\,.$$

Preuve. Soit $\Lambda = q^N$. La preuve du Lemme 1 donne la borne inférieure $(2N+1) - f + (2-2g)$ pour la dimension de $B_{\Lambda,\chi}$ en fonction de l'ordre de la ramification f du caractère χ de $C_{k,1}$, pour lequel nous supposons d'abord que $\chi \neq 1$.

Nous avons vu plus haut que $E(B_{\Lambda,\chi}) \subset S_{\Lambda,\chi}$ alors que la dimension de $S_{\Lambda,\chi}$ est $2N+1$.

Maintenant, par le Lemme 3 de l'Appendice I, tout élément $\xi \in E(B_{\Lambda,\chi})$ satisfait les conditions,

$$\int \xi(x)\,\chi(x)\,|x|^{\rho}\,d^*x = 0 \qquad \forall \rho \in B/N^{\perp},\, L\left(\chi, \frac{1}{2}+\rho\right) = 0. \tag{28}$$

Cela donne $2g-2+f$ conditions linéairement indépendantes (pour N suffisamment grand), en utilisant le Théorème VII.6 de [W1], et cela montre que ces conditions caractérisent le sous-espace $E(B_{\Lambda,\chi})$ de $S_{\Lambda,\chi}$.

Cela réduit la preuve du lemme au simple calcul suivant : soit F un ensemble fini (contenant d'éventuelles multiplicités) de $\mathbb{C}^*$ et E_N le sous-espace de $S_N = \{\xi \in l^2(\mathbb{Z});\ \xi(n) = 0\ \forall n > N\}$ défini par les conditions $\sum \xi(n)\,z^n = 0\ \forall z \in F$. On doit alors calculer la limite quand $N \to \infty$ de $\mathrm{Trace}\,((S_N - E_N)\,V(f))$ où V est la représentation régulière de $\mathbb{Z}$ (de telle manière que $V(f) = \sum f_k\,V^k$ où V est le décalage, $V(\xi)_n = \xi_{n-1}$).

On vérifie alors que les vecteurs unités $\eta_z \in S_N$, $z \in F$, $\eta_z(n) = \overline{z}^n\,(|z^{2N+1}| - |z^{-(2N+1)}|)^{-\frac{1}{2}}(|z| - |z^{-1}|)^{\frac{1}{2}}$ $\forall n \in [-N, N]$, sont asymptotiquement orthogonaux et étendent $(S_N - E_N)$ (quand F présente des multiplicités, on doit faire très attention). La conclusion découle alors de,

$$\mathrm{Lim}_{N\to\infty}\langle V(f)\eta_z,\, \eta_z\rangle = \int_{|u|=1} P_z(u)\,\widehat{f}(u)\,du, \tag{29}$$

où $P_z(u)$ est le noyau de Poisson, et $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f. ∎

On devrait comparer ce lemme avec le Corollaire 2 du Théorème III.1. Dans ce dernier, seuls les zéros critiques entrent en jeu et avec une multiplicité contrôlée par δ. Dans le lemme ci-dessus, tous les zéros apparaissent avec leur multiplicité complète, mais alors que les zéros critiques apparaissent per-se, les zéros non-critiques jouent le rôle de résonances, comme dans la théorie de Fermi.

Expliquons maintenant comment les résultats ci-dessus s'étendent aux corps de nombres k. Nous avons d'abord besoin d'analyser, comme ci-dessus, la position relative des projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$. Rappelons à la lectrice la géométrie bien connue des paires de projecteurs. Rappelons qu'une paire de projections orthogonales P_i dans l'espace de Hilbert est la même chose qu'une représentation unitaire du groupe diédral $\Gamma = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$. Aux générateurs U_i de Γ correspondent des opérateurs $2P_i - 1$.

Le groupe Γ est le produit semi-direct du sous-groupe engendré par $U = U_1\,U_2$, par le groupe $\mathbb{Z}/2$, agissant sur $U \mapsto U^{-1}$. Ses représentations unitaires irréductibles sont paramétrées par un angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, les projections orthogonales correspondantes P_i étant associées aux sous-espaces de dimension 1 de la forme $y = 0$ et $y = x\,tg(\theta)$ dans le plan euclidien x, y. En particulier, ces représentations sont au plus de dimension 2. Une représentation unitaire générale est caractérisée

par l'opérateur Θ dont la valeur est l'angle θ ci-dessus dans le cas irréductible. Il est uniquement défini par l'égalité,

$$\mathrm{Sin}(\Theta) = |P_1 - P_2|, \tag{30}$$

et commute avec P_i.

La première difficulté évidente est que, quand v est une place archimédienne, il n'existe pas de fonction non-nulle sur k_v qui s'évanouisse ainsi que sa transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. Cela serait un obstacle difficile, s'il n'y avait eu le travail de Landau, Pollak et Slepian ([LPS]) au début des années soixante, motivés par des problèmes d'ingénierie électrique, qui les a amenés à surpasser leur problème en montrant que même si les projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$ ne commutent pas exactement même pour Λ grand, leur angle se comporte suffisamment bien pour que le sous-espace B_Λ fasse sens.

Pour des raisons de simplicité, nous prendrons $k = \mathbb{Q}$, de telle façon que la seule place infinie soit réelle. Soit P_Λ la projection orthogonale sur le sous-espace,

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(\mathbb{R})\,;\ \xi(x) = 0,\ \ \forall x\ ,\ |x| > \Lambda\}\,. \tag{31}$$

et $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ où F est la transformée de Fourier associée au caractère de base $\alpha(x) = e^{-2\pi i x}$. Ce que les auteurs ci-dessus ont fait a consisté à analyser la position relative des projections P_Λ, $\widehat{P}_\Lambda$ pour $\Lambda \to \infty$ de manière à pouvoir rendre compte de l'existence de signaux évidents (tels qu'un morceau de musique enregistrée par exemple) qui sont de support fini à la fois selon la variable temporelle, et selon la variable duale fréquence.

L'observation-clé de ([LPS]) est que l'opérateur différentiel de second ordre sur $\mathbb{R}$ commute effectivement avec les projections P_Λ, $\widehat{P}_\Lambda$,

$$H_\Lambda \psi(x) = -\partial((\Lambda^2 - x^2)\,\partial)\psi(x) + (2\pi\Lambda x)^2\,\psi(x), \tag{32}$$

où ∂ est la différenciation ordinaire en une variable.

Exactement comme le générateur $x\,\partial$ d'échelle commute avec la projection orthogonale sur l'espace des fonctions à support positif, l'opérateur $\partial((\Lambda^2 - x^2)\,\partial)$ commute avec P_Λ. De plus, H_Λ commute avec la transformée de Fourier F, et la commutativité de H_Λ avec $\widehat{P}_\Lambda$ en découle alors.

Si on le recolle à des fonctions à support dans $[-\Lambda, \Lambda]$, l'opérateur H_Λ a un spectre simple discret, et a été étudié longtemps avant le travail de [LPS]. Il apparaît dans la factorisation de l'équation de Helmoltz $\Delta\,\psi + k^2\,\psi = 0$ dans un système de coordonnées peu séparables dans l'espace euclidien de dimension 3, qu'on appelle le système des coordonnées sphéroïdales. Ses valeurs propres $\chi_n(\Lambda), n \geq 0$ sont simples, positives, et de l'ordre de n^2 pour $n \to \infty$. Les fonctions propres correspondantes sont appelées les fonctions d'ondes sphéroïdales et comme $P_\Lambda\,\widehat{P}_\Lambda\,P_\Lambda$ commute avec H_Λ, ce sont les fonctions propres de $P_\Lambda\,\widehat{P}_\Lambda\,P_\Lambda$. On connaît beaucoup de choses sur ces fonctions, en particulier, on peut les prendre à valeurs réelles, et elles sont mêmes paires pour n pair et impaires pour n impair. Le résultat-clé de [LPS] est que les valeurs propres correspondantes λ_n de l'opérateur $P_\Lambda\,\widehat{P}_\Lambda\,P_\Lambda$ décroissent très lentement de $\lambda_0 \simeq 1$ jusqu'à la valeur $n \simeq 4\Lambda^2$ de l'index n, elles décroissent alors de $\simeq 1$ à $\simeq 0$ dans un intervalle de longueur $\simeq \log\Lambda$ et restent alors proches

de 0. Bien sûr, cela donne les valeurs propres de Θ, cela fournit l'analogue du sous-espace B_Λ du lemme 1, comme le fibré linéaire des ψ_n, $n \leq 4\Lambda^2$, et cela fournit la justification du comptage dans le cas semi-classique des nombres d'états de la mécanique quantique qui sont localisés sur l'intervalle $[-\Lambda, \Lambda]$ ainsi que leur transformée de Fourier comme l'aire du carré correspondant dans l'espace des phases.

Nous savons maintenant quel est le sous-espace B_Λ pour la seule place ∞, et pour l'obtenir pour un ensemble de places arbitraire (contenant la place infinie), nous avons juste à utiliser la même règle que dans le cas des corps de fonctions, i.e. nous considérons l'application,

$$\psi \mapsto \psi \otimes 1_R, \tag{33}$$

qui suffit si on souhaite ne gérer que la fonction zêta de Riemann. Noter aussi que dans ce cas, nous nous restreignons aux fonctions paires sur $\mathbb{R}$. Cela donne l'analogue du Lemme 1, Théorème 5, et du Lemme 3.

Pour terminer cette section, nous allons revenir à notre motivation initiale de la section I et montrer comment la formule pour le nombre de zéros

$$N(E) \sim (E/2\pi)(\log E/2\pi - 1) + 7/8 + o(1) + N_{osc}(E) \tag{34}$$

apparaît à partir de notre interprétation spectrale.

Faisons d'abord un calcul dans le cas semi-classique du nombre d'états de la mécanique quantique à un degré de liberté et qui remplissent la condition suivante,

$$|q| \leq \Lambda, |p| \leq \Lambda, |H| \leq E\,, \tag{35}$$

où $H = qp$ est l'hamiltonien engendrant le groupe des transformations d'échelle,

$$(U(\lambda)\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*_+, x \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R})\,, \tag{36}$$

comme dans notre cadre général.

Pour nous conformer à notre analyse de la section III, nous devons nous restreindre aux fonctions paires de manière à exclure la région $pq \leq 0$ du plan semi-classique (p, q).

Maintenant, la région qui respecte la condition ci-dessus est égale à $D = D_+ \cup (-D_+)$ où,

$$D_+ = \{(p, q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, p \leq \Lambda, q \leq \Lambda, pq \leq E\}\,, \tag{37}$$

Calculons l'aire de D_+ de la forme symplectique canonique,

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\, dp \wedge dq\,. \tag{38}$$

Par construction, D_+ est l'union d'un rectangle ayant pour côtés E/Λ, Λ avec la portion sous la courbe, de $q = E/\Lambda$ à $q = \Lambda$, de l'hyperbole $pq = E$. Ainsi,

$$\int_{D_+} \omega = \frac{1}{2\pi}\, E/\Lambda \times \Lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{E/\Lambda}^{\Lambda} \frac{E\, dq}{q} = \frac{E}{2\pi} + \frac{2E}{2\pi} \log \Lambda - \frac{E}{2\pi} \log E\,. \tag{39}$$

Maintenant, le calcul ci-dessus correspond à la normalisation standard de la transformée de Fourier avec le caractère de base de $\mathbb{R}$ donné par

$$\alpha(x) = \exp(ix)\,. \tag{40}$$

Mais nous devons nous conformer à la normalisation naturelle à la place infinie,

$$\alpha_0(x) = \exp(-2\pi ix)\,. \tag{41}$$

Nous devons ainsi effectuer la transformation,

$$P = p/2\pi\ ,\ Q = q\,. \tag{41}$$

La forme symplectique est maintenant $dP \wedge dQ$ et le domaine,

$$D' = \{(P,Q); |Q| \leq \Lambda, |P| \leq \Lambda, |PQ| \leq E/2\pi\}. \tag{42}$$

Le calcul est similaire et amène au résultat suivant,

$$\int_{D'_+} \omega = \frac{2E}{2\pi}\,\log\Lambda - \frac{E}{2\pi}\left(\frac{\log\,E}{2\pi - 1}\right)\,. \tag{43}$$

Dans cette formule, on voit que le terme principal $\langle N(E)\rangle$, qui apparaît avec un signe *moins*, montre que le nombre d'états mécaniques quantiques correspondant à D' est inférieur à $\frac{4E}{2\pi}\,\log\Lambda$ par la première approximation du nombre de zéros de zêta dont la partie imaginaire est inférieure à E en valeur absolue (on a juste à multiplier par 2 l'égalité (43) puisque $D' = D'_+ \cup (-D'_+)$).

Maintenant $\frac{1}{2\pi}\,(2E)(2\log\Lambda)$ est le nombre d'états quantiques de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^*_+, d^*x)$ qui sont localisés dans $\mathbb{R}^*_+$ entre Λ^{-1} et Λ, ainsi que localisés dans le groupe dual $\mathbb{R}$ (pour l'appariement $\langle\lambda, t\rangle = \lambda^{it}$) entre $-E$ et E. Ainsi, on voit clairement que la première approximation de $N(E)$ apparaît comme le manque de surjectivité de l'application qui associe aux états quantiques ξ appartenant à D' la fonction sur $\mathbb{R}^*_+$,

$$E(\xi)(x) = |x|^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi(nx) \tag{44}$$

où l'on assume les conditions supplémentaires $\xi(0) = \int \xi(x)dx = 0$.

Une analyse plus précise, qui est juste ce que fait la formule de trace, amènera les termes additionnels $7/8 + o(1) + N_{osc}(E)$. La discussion ci-dessus fournit la construction explicite d'une grande matrice dont le spectre approche les zéros de zêta lorsque $\Lambda \to \infty$.

Il est assez remarquable que les valeurs propres de l'opérateur angle Θ dont nous avons discuté ci-dessus, jouent également un rôle-clé dans la théorie des matrices aléatoires unitaires. Pour être plus précis, soit $E(n,s)$ la grande probabilité limite N qu'il y ait exactement n valeurs propres d'une matrice hermitienne de taille $N \times N$ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{\sqrt{2N}}t, \frac{\pi}{\sqrt{2N}}t]$, $t = s/2$. Clairement, $\sum_n E(n,s) = 1$. Soit P_t comme ci-dessus l'opérateur de multiplication par $1_{[-t,t]}$ - la fonction caractéristique de l'intervalle $[-t,t]$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. En général (cf. [Me]), $E(n,s)$ est le produit de $(-1)^n$ par le n-ième coefficient de l'expansion de Taylor en $z = 1$ de $\zeta_s(z) = \prod_1^\infty (1 - z\lambda_j(s))$,

où $\lambda_j(s)$ sont les valeurs propres de l'opérateur $\widehat{P_\pi} P_t$ (ici, on note $\widehat{P_\lambda} = \mathcal{F} P_\lambda \mathcal{F}^{-1}$, et $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier, $\mathcal{F}\xi(u) = \int e^{ixu}\xi(x)dx$. Noter également que les valeurs propres de $\widehat{P_a} P_b$ dépendent seulement du produit ab de manière à ce que les relations avec les valeurs propres de Θ soient bien claires).

Remarques générales.

a) Il y a une forte analogie entre la construction de l'espace de Hilbert $L^2(X)$ dans la section III, et la construction de l'espace physique ([S] théorème 2.1) dans la théorie quantique des champs constructive, dans le cas des théories de jauge. Dans les deux cas, l'action du groupe d'invariance (le groupe $k^* = GL_1(k)$ dans notre cas, le groupe de jauge dans le cas des théories de jauge) est balayé par la véritable définition du produit intérieur. Comparer les commentaires après III (9) avec ([S]) en haut de la page 17.

b) Pour les corps globaux de caractéristique 0, le groupe des classes d'idèles a un composant connexe non évident de l'identité et ce groupe connexe n'a jusque-là pas reçu d'interprétation par la théorie de Galois (cf. [W4]). L'apparition de facteurs de type III dans [BC] indique que la classification des facteurs hyperfinis de type III [C] devrait être vue comme une restriction de la théorie des corps de classes locaux pour les places archimédiennes, et fournir l'interprétation manquante de la composante connexe de l'identité du groupe des classes d'idèles. En particulier, les facteurs hyperfinis de type III sont classifiés par des sous-groupes fermés (virtuels) de $\mathbb{R}_+^*$ (cf. [C]) et ils apparaissent tous comme des extensions "non-ramifiées" de l'hyperfacteur de type III_1.

c) Notre construction de l'espace d'Hilbert-Polya présente quelque ressemblance avec [Z] et en fait, il faudrait clarifier cette relation, ainsi que la relation de l'espace des classes d'adèles avec le site arithmétique de Deninger [D]. Noter que la division de A par k^* élimine la structure linéaire de A et qu'elle transforme drastiquement les formules pour les espaces de fonctions, en remplaçant les produits par des sommes (cf. théorème 4 de la section VII). Il devrait être clair à la lectrice que l'action du groupe des classes d'idèles sur l'espace des classes d'adèles est l'analogue (à travers le dictionnaire habituel de la théorie des corps de classes) de l'action du Frobenius sur la courbe (pour être plus précis, on a besoin de diviser d'abord l'espace des classes d'adèles par l'action du sous-groupe maximal du groupe des classes d'idèles).

d) Il y a une ressemblance superficielle entre la manière dont $N(E)$ apparaît dans le dernier calcul de la section VIII et la discussion dans [BK], directement inspirée de [Co]. Il est amusant de noter que le calcul de [BK] coïncide vraiment, les deux rectangles sont éliminés sans raison, ce qui change adéquatement le signe du terme dans E. Ce que [BK] n'a pas pris en compte, c'est l'interprétation spectrale de [Co] comme un *spectre d'absorption* plutôt que comme un spectre d'émission.

e) Il y a une ressemblance encore plus superficielle entre ce travail et celui de D. Goldfeld [G] ; dans ce dernier, la distribution de Weil est utilisée pour définir un produit intérieur correspondant à un espace de fonctions sur le groupe des classes d'idèles. La positivité du produit intérieur est bien-sûr équivalente à la positivité de la distribution de Weil (et par le résultat de Weil à RH) mais

cela ne donne aucun indice sur la manière de prouver cette positivité, et aucune explication n'est fournie (exceptée pour une jolie observation aux places archimédiennes) sur ce qu'est la distribution de Weil, puisqu'elle est introduite à la main dans la formule pour le produit intérieur.

f) Le cadre proposé ci-dessus s'étend naturellement du cas de $GL(1)$ au cas $GL(n)$ pour lequel l'espace des classes d'adèles est remplacé par le quotient de $M_n(A)$ par l'action à droite de $GL_n(k)$. Le travail préliminaire de C. Soulé montre que l'analogue du théorème III.1 reste valide, la prochaine étape étant de trouver l'analogue de la formule de trace de Lefschetz dans ce contexte.

g) J'ai appris de P. Sarnak et E. Bombieri que Paul Cohen a considéré l'espace des classes d'adèles en connexion avec RH, mais n'ai obtenu aucun détail des idées non publiées de celui-ci.

Tous les résultats du présent article ont été annoncés à la conférence au sujet de l'hypothèse de Riemann de septembre 1998 au Schrödinger Institute de Vienne et ont été publiés dans un preprint du Schrödinger Institute. Nous sommes reconnaissant à l'Institut Américain de Mathématiques d'avoir sponsorisé cette conférence.

Appendices

Appendice I. Preuve du théorème 1.

Dans cet appendice, nous donnons la preuve du théorème 1. Rappelons au préalable les résultats de Tate et Iwasawa à trouver dans [W2]

fonctions L et distributions homogènes sur A

En général, pour un corps local non archimédien K, nous utilisons les notations R pour le sous-anneau compact maximal, P pour l'idéal maximal de R, π pour un générateur de l'idéal P (i.e. $P = \pi R$).

Soit k un corps global et A l'anneau des adèles de k. C'est le produit restreint des corps locaux k_v indexé par l'ensemble des places v de k, par rapport aux sous-anneaux compacts maximaux R_v. Similairement, l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(A)$ est le produit tensoriel restreint des espaces locaux de $\mathcal{S}(k_v)$, par rapport aux vecteurs 1_{R_v}.

Aux fonctions L sur k sont associés des Grössencharakters, i.e. des caractères du groupe des classes d'idèles,

$$C_k = J_k/k^* \,. \tag{1}$$

Soit $\mathcal{X}$ un caractère du groupe des classes d'idèles, nous considérons $\mathcal{X}$ comme un caractère de J_k qui vaut 1 sur k^*. Puisqu'il peut être écrit comme un produit,

$$\mathcal{X}(j) = \Pi\, \mathcal{X}_v(j_v) \qquad j = (j_v) \in J_k \,. \tag{2}$$

En considérant la restriction de $\mathcal{X}$ au sous-groupe compact

$$G_0 = \Pi\, R_v^* \times 1 \subset J_k \,, \tag{3}$$

il découle que pour tout v fini sauf pour un nombre fini d'entre elles, on a

$$\mathcal{X}_v/R_v^* = 1\,. \tag{4}$$

On dit que $\mathcal{X}$ est non-ramifié en v quand cela a lieu.

Alors $\mathcal{X}_v(x)$ dépend seulement du module $|x|$, puisque

$$k_v^*/R_v^* = \mathrm{mod}(k_v)\,. \tag{5}$$

Ainsi $\mathcal{X}_v$ est déterminé par

$$\mathcal{X}_v(\pi_v) \tag{6}$$

qui ne dépend pas du choix de $\pi_v \pmod{R_v^*}$.

Soit $\mathcal{X}$ un quasi-caractère de C_k, il est de la forme,

$$\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x)\,|x|^s \tag{7}$$

où $s \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{X}_0$ est un caractère de C_k. La partie réelle σ de s est uniquement déterminée par

$$|\mathcal{X}(x)| = |x|^\sigma\,. \tag{8}$$

Soit P l'ensemble fini des places finies auxquelles $\mathcal{X}_0$ est ramifié. La L-fonction $L(\mathcal{X}_0, s)$ est définie pour $\sigma = Re(s) > 1$ par

$$L(\mathcal{X}_0, s) = \left(\prod_{\substack{v \text{ fini}\\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_{0,v}(\pi_v)\, q_v^{-s})^{-1}\right) = \left(\prod_{\substack{v \text{ fini}\\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_v(\pi_v))^{-1}\right) \tag{9}$$

où

$$|\pi_v| = q_v^{-1}. \tag{10}$$

Rappelons (cf. [W2]) comment $L(\mathcal{X}_0, s)$ apparaît comme un facteur de normalisation pour les distributions homogènes sur A.

D'abord, soit K un corps local et $\mathcal{X}$ un quasi-caractère de K^*,

$$\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x)\,|x|^s, \quad \mathcal{X}_0 : K^* \to U(1)\,. \tag{11}$$

Une distribution D sur K est homogène de poids $\mathcal{X}$ ssi on a

$$\langle f^a, D\rangle = \mathcal{X}(a)^{-1}\,\langle f, D\rangle \tag{12}$$

pour toutes les fonctions test f et pour tout a dans K^*, où par définition

$$f^a(x) = f(ax) \tag{13}$$

Quand $\sigma = Re(s) > 0$, il existe, moyennant normalisation seulement, une distribution homogène de poids $\mathcal{X}$ sur K (cf. [W2]). Elle est donnée par l'intégrale absolument convergente,

$$\int_{K^*} f(x)\,\mathcal{X}(x) d^*x = \Delta_{\mathcal{X}}(f) \tag{14}$$

En particulier, soit K non-archimédien, alors, pour n'importe quelle fonction localement constante supportée de façon compacte f par K, on a,

$$f(x) - f(\pi^{-1}x) = 0 \quad \forall x,\, |x| \leq \delta. \tag{15}$$

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{C}$, l'intégrale

$$\int_{K^*} (f(x) - f(\pi^{-1}x))\, |x|^s \, d^*x = \Delta'_s(f) \tag{16}$$

avec comme mesure de Haar multiplicative d^*x, normalisée par

$$\langle 1_{R^*}, d^*x \rangle = 1 \tag{17}$$

définit une distribution sur K avec les propriétés,

$$\langle 1_R, \Delta'_s \rangle = 1, \tag{18}$$

$$\langle f^a, \Delta'_s \rangle = |a|^{-s} \langle f, \Delta'_s \rangle, \tag{19}$$

et

$$\Delta'_s = (1 - q^{-s})\, \Delta_s, \tag{20}$$

où $|\pi| = q^{-1}$.

(Vérifions (18)...(20). Avec $f = 1_R$, on a $f(\pi^{-1}x) = 1$ ssi $\pi^{-1}x \in R$ i.e. $x \in \pi R = P$. Ainsi, $\Delta'_s(1_R) = \int_{R^*} d^*x = 1$. Vérifions (20), on a $\int f(\pi^{-1}x)\, |x|^s \, d^*x = \int f(y)\, |\pi|^s\, |y|^s \, d^*y = |\pi|^s\, \Delta_s(f)$. Mais $|\pi| < 1$, $|\pi| = \frac{1}{q}$. Noter alors que pour $s = 1$ et $f = 1_R$, on obtient $\int_{R^*} dx = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_R dx$.).

Soit alors $\mathcal{X}$ un quasi-caractère de C_k et écrivons comme ci-dessus

$$\mathcal{X} = \Pi\, \mathcal{X}_v\,, \qquad \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x)\, |x|^s \tag{21}$$

où $s \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{X}_0$ est un caractère.

Soit P l'ensemble fini des places finies où P se ramifie.
Pour toute place $v \notin P$, soit $\Delta'_v(s)$ l'unique distribution homogène de poids $\mathcal{X}_v$ normalisée par

$$\langle \Delta'_v(s), 1_{R_v} \rangle = 1\,. \tag{22}$$

Pour tout $v \in P$ ou pour toute place infinie, soit, pour $\sigma = Re(s) > 0$, Δ'_v donnée par (14) homogène de poids $\mathcal{X}_v$ mais non normalisée. Alors le produit tensoriel infini,

$$\Delta'_s = \Pi\, \Delta'_v(s) \tag{23}$$

prend sens comme une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(A)$ et est homogène de poids $\mathcal{X}$.

Cette solution n'est pas égale à 0 puisque $\Delta'_v \neq 0$ pour tout $v \in P$ ainsi que pour n'importe quelle place infinie. Elle est finie par construction sur l'espace $\mathcal{S}(A)$ des fonctions test comme produit tensoriel infini

$$\mathcal{S}(A) = \otimes\, (\mathcal{S}(k_v), 1_{R_v})\,. \tag{24}$$

Lemme 1. (cf. [W2]) *Pour $\sigma = Re(s) > 1$, les intégrales suivantes convergent absolument*

$$\int f(x)\,\mathcal{X}_0(x)\,|x|^s\,d^*x = \Delta_s(f) \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A)$$

et $\Delta_s(f) = L(\mathcal{X}_0, s)\,\Delta'_s(f)$.

Preuve. Pour obtenir la convergence absolue, on peut supposer que $f = 1_R$ et $\mathcal{X}_0 = 1$. Alors, on doit contrôler un produit infini de termes locaux, donnés localement pour la mesure de Haar d^*x sur k_v^* tels que $\int_{R_v^*} d^*x = 1$, par

$$\int_{R\cap k_v^*} |x|^s\,d^*x \qquad (s \text{ réel}) \tag{25}$$

qui est égal à $1 + q_v^{-s} + q_v^{-2s} + \ldots = (1 - q_v^{-s})^{-1}$. Ainsi, la convergence de $\sigma > 1$ est la même que celle de la fonction zêta.

Pour prouver la seconde égalité, on a seulement besoin de considérer le produit tensoriel infini pour les places finies $v \notin P$. Alors, par (20), on a $\Delta'_v = (1 - q_v^{-\alpha_v})\,\Delta_v$ où

$$q_v^{-\alpha_v} = \mathcal{X}_v(\pi) = \mathcal{X}_{0,v}(\pi)\,q_v^{-s} \tag{26}$$

avec $|\pi| = q_v^{-1}$.

Ainsi, on obtient $\Delta_s = \left(\prod_{\substack{v \text{ fini}\\ v\notin P}} (1 - \mathcal{X}_{0,v}(\pi)\,q_v^{-s})^{-1}\right)\,\Delta'_s = L(\mathcal{X}_0, s)\,\Delta'_s$. ∎

Par construction, Δ'_s fait sens à chaque fois que $\sigma > 0$ et est une fonction holomorphe de s (pour f fixée). Revoyons brièvement (cf. [W2]) comment étendre la définition de Δ_s.

Nous définissons comme ci-dessus k comme un corps global, nous fixons un caractère trivial non-additif α de A, trivial sur k,

$$\alpha(x+y) = \alpha(x)\,\alpha(y) \in U(1)\ ,\ \alpha(q) = 1, q \in k\,. \tag{27}$$

Nous identifions alors le dual du groupe additif localement compact A avec A lui-même par l'appariement,

$$\langle x, y\rangle = \alpha(xy)\,. \tag{28}$$

On montre (cf.[W1]) que le treillis $k \subset A$, i.e. le sous-groupe additif cocompact discret k, est son propre dual,

$$\langle x, q\rangle = 1 \qquad \forall\, q \in k \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in k\,. \tag{29}$$

Puisque A est le produit restreint des corps locaux k_v, on peut écrire α comme un produit infini,

$$\alpha = \Pi\,\alpha_v \tag{30}$$

où pour presque tout v, on a $\alpha_v = 1$ sur R_v. Rappelons la définition de l'espace $\mathcal{S}(A)_0$,

$$\mathcal{S}(A)_0 = \{f \in \mathcal{S}(A) \ ; \ f(0) = 0 \ , \ \int f \, dx = 0\} \tag{31}$$

Lemme 2. *Soit $f \in \mathcal{S}(A)_0$, alors les séries*

$$E(f)\,(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \qquad \forall\, g \in C_k$$

convergent absolument et on a

$$\forall\, n \, , \ \exists\, c, \qquad |E(f)(g)| \leq c\, e^{-n|\log|g||} \qquad \forall\, g \in C_k$$

et $E(\widehat{f})\,(g) = E(f)\,(g^{-1})$.

Preuve. Rappelons d'abord la définition formelle ([Br]) de l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(G)$ pour un groupe abélien arbitraire localement compact G. On considère toutes les paires de sous-groupes G_1, G_2 de G telles que G_1 est engendré par un voisinage compact de 0 dans G, tandis que G_2 est un sous-groupe compact de G_1 tel que le groupe-quotient est élémentaire, i.e. est de la forme $\mathbb{R}^a\, \mathbb{T}^b\, \mathbb{Z}^c\, F$ pour F un groupe fini. Par définition, l'espace de Schwartz, $\mathcal{S}(G)$ est la limite inductive des espaces de Schwartz $\mathcal{S}(G_1/G_2)$, où ces derniers sont définis comme habituellement en terme de décroissance rapide de leurs dérivées. Puisque G_1 est ouvert dans G, tout élément de $\mathcal{S}(G_1/G_2)$ étendu par la valeur 0 en dehors de G_1 définit une fonction continue sur G. Par construction, $\mathcal{S}(G)$ est l'union des sous-espaces $\mathcal{S}(G_1/G_2)$ et il est muni de la limite topologique inductive.

Soit $\widehat{G}$ le dual de Pontrjagin de G, alors la transformée de Fourier, qui dépend de la normalisation de la mesure de Haar sur G, fournit un isomorphisme de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(\widehat{G})$.

Soit Γ un treillis dans le groupe abélien localement compact G. Alors, toute fonction $f \in \mathcal{S}(G)$ est admissible pour l'appariement G, Γ au sens de [W1], et la formule de sommation de Poisson (cf. [W1]) est l'égalité,

$$\mathrm{Covol}\,(\Gamma) \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\beta \in \Gamma^\perp} \widehat{f}(\beta) \tag{32}$$

où $\Gamma^\perp$ est le dual du treillis Γ, et

$$\widehat{f}(\beta) = \int f(a)\, \beta(a)\, da \, . \tag{33}$$

Les deux côtés de l'égalité (32) dépendent de la normalisation de la mesure de Haar sur G.

Dans notre cas, on définit A comme le groupe additif des adèles sur k.
On normalise la mesure de Haar dx sur A par

$$\mathrm{Covol}(k) = 1 \, . \tag{34}$$

On prend alors $\Gamma = xk$, pour quelque $x \in A^{-1}$. On a

$$\mathrm{Covol}\,(xk) = |x| \tag{35}$$

Le dual $\Gamma^\perp$ du treillis xk, pour x inversible dans A, est le treillis $\Gamma^\perp = x^{-1}k$. Alors, la formule de Poisson (32) se lit, pour tout $f \in \mathcal{S}(A)$,

$$|x| \sum_{q \in k} f(xq) = \sum_{q \in k} \widehat{f}(x^{-1}q)\,. \tag{36}$$

Ce que nous pouvons réécrire en,

$$|x| \sum_{k^*} f(xq) = \sum_{k^*} \widehat{f}(x^{-1}q) + \delta \tag{37}$$

$\delta = -|x|\, f(0) + \int f(y)\, dy$.

Nous pouvons alors réécrire (37) comme l'égalité, valide pour tout $f \in \mathcal{S}(A)_0$

$$E(f)(x) = E(\widehat{f}) \left(\frac{1}{x}\right) \qquad f \in \mathcal{S}(A)_0. \tag{38}$$

Il reste à contrôler la croissance de $E(f)(x)$ sur C_k, mais par (38), il suffit de comprendre ce qui se passe pour $|x|$ grand.

Nous traitons seulement le cas des corps de nombres, le cas général est similaire. Soit $A = A_f \times A_\infty$ la décomposition de l'anneau des adèles correspondant aux places finies et infinies, ainsi $A_\infty = \prod_{S_\infty} k_v$ où S_∞ est l'ensemble des places infinies.

Tout élément de $\mathcal{S}(A)$ est une combinaison linéaire finie de fonctions test de la forme,

$$f = f_0 \otimes f_1 \tag{39}$$

où $f_0 \in \mathcal{S}(A_f)$, $f_1 \in \mathcal{S}(A_\infty)$ (cf. [W5] 39), ainsi, cela suffit à contrôler la croissance de $E(f)(x)$ pour une telle f et $|x|$ grand.

Soit $J_{k,1} = \{x \in J_k; |x| = 1\}$ le groupe des idèles de module 1, puisque $J_{k,1}/k^*$ est compact (cf. [W1]), nous allons prendre un ensemble compact K_1 de $J_{k,1}$ dont l'image dans $J_{k,1}/k^*$ est ce groupe compact.

Soit μ l'immersion diagonale :

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\mu} (\lambda, \ldots, \lambda) \in \prod_{S_\infty} k_v^* \tag{40}$$

qui fournit l'isomorphisme

$$J_k = J_{k,1} \times \mathrm{Im}\ \mu\,. \tag{41}$$

On a $f_0 \in \mathcal{S}(A_f)$, puisque (cf. [W5]), $f_0 \in C_c(A_f)$ et on pose $K_0 = \mathrm{Support}\ f_0$. Puisque K_0 est compact, on peut trouver un sous-ensemble fini P de l'ensemble des places finies et $C < \infty$ tel que :

$$y \in K = (K_f)^{-1} K_0 \Rightarrow |y_v| \leq 1, v \notin P, \qquad |y_v| \leq C, \qquad \forall v\,. \tag{42}$$

où K_f est la projection de K_1 sur A_f.

Définissons Ω comme le sous-groupe ouvert compact de A_f déterminé par

$$|a_v| \leq 1, v \notin P, \qquad |a_v| \leq C, \qquad \forall v\,. \tag{43}$$

Par construction, $E(f)(x)$ dépend seulement de la classe de x dans J_k/k^*. Ainsi, pour contrôler le comportement de $E(f)(x)$ pour $|x| \to \infty$, on peut prendre $x = (x_f, x_\infty) \in K_1$ et considérer $E(f)(\lambda\, x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*\,, \lambda \to \infty$. Maintenant, soit $q = (q_f, q_\infty) \in k$, alors,

$$f(q\,\lambda\, x) = f_0(q_f\, x_f)\, f_1(q_\infty\, \lambda\, x_\infty) \tag{44}$$

et cela s'évanouit, à moins que $q_f\, x_f \in K_0$, i.e. à moins que $q_f \in K$. Mais alors, par (42), on a $q_f \in \Omega$. Soit Γ le treillis sur $\prod_{S_\infty} k_v$ déterminé par

$$\Gamma = \{q_\infty;\, q \in k,\, q_f \in \Omega, \} \tag{45}$$

La taille de $E(f)(\lambda\, x)$ est ainsi contrôlée (jusqu'à la racine carrée de $|\lambda\, x|$) par

$$C \sum_{n \in \Gamma^*} |f_1(\lambda\, x_\infty\, n)| \tag{46}$$

où x_∞ varie sur la projection K_∞ de K_1 sur $\prod_{S_\infty} k_v^*$.

Puisque $f_1 \in \mathcal{S}(A_\infty)$, cela montre que $E(f)(x)$ décroît plus vite que n'importe quelle puissance de $|x|$ pour $|x| \to \infty$.

Nous avons montré que $E(f)$ décroît rapidement par rapport à $|x|$, pour $|x| \to \infty$. En utilisant (38) et la stabilité de $\mathcal{S}(A)_0$ sous Fourier, nous voyons qu'il décroît aussi rapidement par rapport à $|\log|x||$ quand $|\log|x|| \to \infty$.

Nous obtenons alors,

Lemme 3. (cf. [W2]) *Pour $\sigma = Re(s) > 0$, et n'importe quel caractère $\mathcal{X}_0$ de C_k, on a*

$$\int E(f)(x)\, \mathcal{X}_0(x)\, |x|^{s-1/2}\, d^*x = cL(\mathcal{X}_0, s)\, \Delta_s'(f) \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A)_0$$

où la constante non nulle c dépend de la normalisation de la mesure de Haar d^*x sur C_k.

Preuve. Pour $\sigma = Re(s) > 1$, l'égalité découle du lemme 1, mais puisque les deux côtés sont analytiques dans s, cela est vérifié en général.

Comme dans le lemme 1, nous continuerons d'utiliser la notation $\Delta_s(f)$ pour $\sigma = Re(s) > 0$.

Unités approchées dans les espaces de Sobolev $L^2_\delta(C_k)$

On considère d'abord, pour $\delta > 1$, l'espace de Hilbert $L^2_\delta(\mathbb{R})$ de fonctions $\xi(u)$, $u \in \mathbb{R}$ de norme carrée donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2\, (1 + u^2)^{\delta/2}\, du\,. \tag{1}$$

Posons $\rho(u) = (1+u^2)^{\delta/2}$. Il est comparable à $(1+|u|)^\delta$ et en particulier,

$$\frac{\rho(u+a)}{\rho(u)} \leq c\,\rho(a) \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}\,,\ a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

avec $c = 2^{\delta/2}$.

Soit alors $V(v)$ l'opérateur de translation,

$$(V(v)\xi)(u) = \xi(u-v) \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

on a $\int_{\mathbb{R}} |\xi(u-v)|^2\,\rho(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2\,\rho(u+v)\,du$ de telle manière que par (2), il est inférieur à $c\int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2\,\rho(u)\,\rho(v)\,du = c\,\rho(v)\,\|\xi\|^2$,

$$\|V(v)\| \leq (c\,\rho(v))^{1/2}\,. \tag{4}$$

Cela montre que $V(f) = \int f(v)\,V(v)\,dv$ a du sens dès que

$$\int |f(v)|\,\rho(v)^{1/2}\,dv < \infty\,. \tag{5}$$

Cela est vérifié pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lemme 4. *Il existe une unité appochée $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, telle que $\widehat{f_n}$ est à support compact, $\|V(f_n)\| \leq C, \forall n$, et*

$$V(f_n) \to 1 \text{ fortement dans } L^2_\delta(\mathbb{R})\,.$$

Preuve. Soit f une fonction, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est à support compact, et telle que $\int f\,dx = 1$ (i.e. $\widehat{f}(0) = 1$). Alors soit

$$f_n(v) = n\,f(nv) \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6),}$$

on a $\int |f_n(v)|\ \rho(v)^{1/2}\,dv = \int |f(u)|\ \rho\left(\frac{u}{n}\right)^{1/2} du \leq \int |f(u)|\ \rho(u)^{1/2}\,du$. Ainsi $\|V(f_n)\|$ est uniformément bornée.

Nous pouvons supposer que $\widehat{f}$ est égale à 1 sur $[-1,1]$, alors $\widehat{f_n}$ est égale à 1 sur $[-n,n]$ et $V(f_n)\xi = \xi$ pour n'importe quel ξ avec $\operatorname{Supp}\widehat{\xi} \subset [-n,n]$. Par uniformité, on obtient que $V(f_n) \to 1$ fortement. ∎

Identifions maintenant le dual $(L^2_\delta)^*$ de l'espace de Hilbert L^2_δ avec $L^2_{-\delta}$ au moyen de l'appariement,

$$\langle \xi, \eta \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}} \xi(u)\,\eta(u)\,du\,. \tag{7}$$

Puisque L^2_δ est un espace de Hilbert, il est son propre dual en utilisant l'appariement,

$$\langle \xi, \eta_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi(u)\,\eta_1(u)(1+u^2)^{\delta/2}\,du\,. \tag{8}$$

Si l'on pose $\eta(u) = \eta_1(u)(1+u^2)^{\delta/2}$, alors

$$\int |\eta_1(u)|^2 \, (1+u^2)^{\delta/2} \, du = \int |\eta(u)|^2 \, (1+u^2)^{-\delta/2} \, du$$

qui est la norme carrée naturelle pour $L^2_{-\delta}$.

Étant donné un groupe quasi-compact tel que C_k avec comme module,

$$| \, | : C_k \to \mathbb{R}^*_+ \tag{9}$$

on choisit d^*g la mesure de Haar sur C_k normalisée par

$$\int_{|g| \in [1,\Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \qquad \Lambda \to \infty \tag{10}$$

et on pose $L^2_\delta(C_k)$ définie comme la norme de,

$$\int_{C_k} |\xi(g)|^2 \, (1 + \log |g|^2)^{\delta/2} \, d^*g \, . \tag{11}$$

C'est, quand le module de k est $\mathbb{R}^*_+$, une somme directe d'espaces (1), étiquetée par les caractères $\mathcal{X}_0$ du groupe compact

$$C_{k,1} = \mathrm{Ker} \, \mathrm{mod} \, . \tag{12}$$

L'appariement entre $L^2_\delta(C_k)$ et $L^2_{-\delta}(C_k)$ est donné par

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int \xi(g) \, \eta(g) \, d^*g \, . \tag{13}$$

La représentation naturelle V de C_k par les translations est donnée par

$$(V(a)\xi)(g) = \xi(a^{-1}g) \qquad \forall \, g, a \in C_k \, . \tag{14}$$

Elle est unitaire, mais par (4), on a,

$$\|V(g)\| = 0 \, |\log |g||^{\delta/2} \, , \ |\log |g|| \to \infty \, . \tag{15}$$

Finalement, on a, en utilisant le lemme 4 et la décomposition $C_k = C_{k,1} \times N$,

Lemme 5. *Il existe une unité approchée $f_n \in \mathcal{S}(C_k)$, telle que $\widehat{f_n}$ est à support compact, $\|V(f_n)\| \leq C, \forall n$, et*

$$V(f_n) \to 1 \textit{ fortement dans } L^2_\delta(C_k) \, .$$

Preuve du théorème III.1

On considère d'abord le sous-espace de codimension 2 de $\mathcal{S}(A)$ donné par

$$f(0) = 0 \, , \ \int f \, dx = 0 \, . \tag{1}$$

On munit ce sous-espace $\mathcal{S}(A)_0$ du produit intérieur,

$$\int_{C_k} |E(f)(x)|^2 \, (1 + \log |x|^2)^{\delta/2} \, d^*x \, . \tag{2}$$

Soit U la représentation de C_k sur $\mathcal{S}(A)$ donnée par

$$(U(a)\xi)(x) = \xi(a^{-1}x) \qquad \forall \, a \in C_k \, , \; x \in A \, . \tag{3}$$

Soit $L^2_\delta(X)_0$ la complétion séparée de $\mathcal{S}(A)_0$ pour le produit intérieur donné par (2). L'application linéaire $E : \mathcal{S}(A)_0 \to L^2_\delta(C_k)$ satisfait

$$\|E(f)\|^2_\delta = \|f\|^2_\delta \tag{4}$$

par construction. Aussi, elle s'étend à une isométrie, toujours notée E,

$$E : L^2_\delta(X)_0 \hookrightarrow L^2_\delta(C_k) \, . \tag{5}$$

On a

$$E(U(a)f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} (U(a)f)(qg) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(a^{-1}qg)$$
$$= |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} \, |a^{-1}g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} (V(a) \, E(f))(g)$$

$$E \, U(a) = |a|^{1/2} \, V(a) \, E \, . \tag{6}$$

L'égalité (6) montre que la représentation naturelle U de C_k sur $L^2_\delta(X)_0$ correspond par l'isométrie E à la restriction de $|a|^{1/2} \, V(a)$ au sous-espace invariant donné par l'image de E.

Pour comprendre $\operatorname{Im} E$, on considère son orthogonal dans l'espace dual $L^2_{-\delta}(C_k)$.

Le sous-groupe compact

$$C_{k,1} = \{g \in C_k \, ; \, |g| = 1\} \tag{7}$$

agit par la représentation V qui est unitaire quand elle est restreinte à $C_{k,1}$. Ainsi, on peut décomposer $L^2_\delta(C_k)$ et son dual $L^2_{-\delta}(C_k)$, en la somme directe de sous-espaces,

$$L^2_{\delta,\mathcal{X}_0} = \{\xi \in L^2_\delta(C_k) \, ; \, \xi(a^{-1}g) = \mathcal{X}_0(a) \, \xi(g) \qquad \forall \, g \in C_k \, , \; a \in C_{k,1}\} \tag{8}$$

et,

$$L^2_{-\delta,\mathcal{X}_0} = \{\xi \in L^2_{-\delta}(C_k) \, ; \, \xi(a \, g) = \mathcal{X}_0(a) \, \xi(g) \qquad \forall \, g \in C_k \, , \; a \in C_{k,1}\} \tag{9}$$

qui correspondent aux projections $P_{\mathcal{X}_0} = \int \overline{\mathcal{X}_0}(a) \, V(a) \, d_1 \, a$ pour L^2_δ et $P^t_{\mathcal{X}_0} = \int \overline{\mathcal{X}_0}(a) \, V(a)^t \, d_1 \, a$ pour l'espace dual $L^2_{-\delta}$.

Dans (9), nous utilisons la formule

$$(V(g)^t \, \eta)(x) = \eta(gx) \tag{10}$$

qui découle de la définition de la transposée, $\langle V(g)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, V(g)^t\eta\rangle$ en utilisant

$$\int \xi(g^{-1}x)\,\eta(x)\,d^*x = \int \xi(y)\,\eta(gy)\,d^*y$$

Dans ces formules, on utilise seulement le caractère $\mathcal{X}_0$ comme un caractère du sous-groupe compact $C_{k,1}$ de C_k. Maintenant, choisissons, non canoniquement, une extension $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ de $\mathcal{X}_0$ comme caractère de C_k

$$\widetilde{\mathcal{X}}_0(g) = \mathcal{X}_0(g) \qquad \forall g \in C_{k,1}\,. \tag{11}$$

Ce choix n'est pas unique mais deux telles extensions diffèrent par un caractère qui est principal, i.e. de la forme : $g \to |g|^{is_0}$, $s_0 \in \mathbb{R}$.

Fixons une factorisation $C_k = C_{k,1} \times \mathbb{R}_+^*$, et définissons $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ comme étant égal à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous écrivons alors n'importe quel élément de $L^2_{-\delta,\mathcal{X}_0}(C_k)$ sous la forme

$$g \in C_k \to \eta(g) = \widetilde{\mathcal{X}}_0(g)\,\psi(|g|) \tag{12}$$

où

$$\int |\psi(|g|)^2\,(1 + (\log|g|)^2)^{-\delta/2}\,d^*g < \infty \tag{13).}$$

Ce vecteur est dans l'orthogonal de $\operatorname{Im} E$ ssi

$$\int E(f)(x)\,\widetilde{\mathcal{X}}_0(x)\,\psi(|x|)\,d^*x = 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A)_0\,. \tag{14}$$

Nous procédons d'abord de manière formelle et écrivons $\psi(|x|) = \int \widehat{\psi}(t)\,|x|^{it}\,dt$ de manière à ce que le côté gauche de (14) devienne

$$\int\int E(f)(x)\,\widetilde{\mathcal{X}}_0(x)\,|x|^{it}\,\widehat{\psi}(t)\,d^*x\,dt = \int \Delta_{1/2+it}(f)\,\widehat{\psi}(t)\,dt \tag{15}$$

(en utilisant les notations des lemmes 1 et 3).

Justifions cette manipulation formelle ; puisque nous travaillons avec l'orthogonal de l'espace invariant, nous pouvons assumer que

$$V^t(h)\,\eta = \eta, \tag{16}$$

pour un h tel que $\widehat{h}$ est à support compact. Nous pouvons effectivement utiliser le lemme 5 pour ne considérer que les vecteurs qui appartiennent à l'image de

$$V^t(h) = \int h(g)\,V(g)^t\,d^*g\,,\ \widehat{h} \text{ à support compact.}$$

Alors, en utilisant (16), la transformée de Fourier de la distribution tempérée ψ sur $\mathbb{R}_+^*$ est à support compact dans $\mathbb{R}$.
Puisque $E(f)(x)$ est à décroissance rapide, l'égalité entre (14) et (15) découle de la définition de la transformée de Fourier de la distribution tempérée ψ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Décrivons maintenant les fonctions test qui conviennent $f \in \mathcal{S}(A)_0$ de façon à tester la distribution,

$$\int \Delta_{\frac{1}{2}+it}\, \widehat{\psi}(t)\, dt \tag{17}$$

Nous traitons le cas en caractéristique 0, le cas général est similaire. Pour les places finies, nous prenons,

$$f_0 = \bigotimes_{v \notin P} 1_{R_v} \otimes f_{\mathcal{X}_0} \tag{18}$$

où $f_{\mathcal{X}_0}$ est le produit tensoriel sur les places ramifiées des fonctions nulles en dehors de R_v^* et en $\overline{\mathcal{X}}_{0,v}$ sur R_v^*. Il découle de la définition de Δ_s' que,

$$\langle \Delta_s', f_0 \otimes f \rangle = \int f(x)\, \mathcal{X}_{0,\infty}(x)\, |x|^s\, d^*x \tag{19}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(A_\infty)$.

De plus, si l'ensemble P des places ramifiées finies n'est pas vide, on a,

$$f_0(0) = 0\,, \ \int_{A_f} f_0(x)\, dx = 0 \tag{20}$$

de telle sorte que $f_0 \otimes f \in \mathcal{S}(A)_0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A_\infty)$.

Maintenant, soit ℓ le nombre de places infinies de k et considérons l'application $\rho : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \to \mathbb{R}_+^*$ donnée par

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = \lambda_1 \dots \lambda_\ell\,. \tag{21}$$

Dès que $\ell > 1$, cette application est non propre. Étant donnée une fonction lisse à support compact, $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, nous avons besoin de trouver $a \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^*)^\ell)$ telle que l'image directe de la mesure $a(x)\, d^*x$ est $b(y)\, d^*y$ où $d^*x = \Pi\, d^*x_i$ est le produit des mesures de Haar multiplicatives.

On traite de manière équivalente un espace vectoriel de dimension finie E et une forme linéaire $L : E \to \mathbb{R}$. $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est donné et on doit le relever. On peut écrire $E = \mathbb{R} \times E_1$ et le relèvement peut être pris comme $a = b \otimes b_1$ où $b_1 \in C_c^\infty(E_1)$, $\int b_1\, dx = 1$.

Ainsi, nous pouvons dans (19) prendre une fonction f de la forme,

$$f(x) = g(x)\, \overline{\mathcal{X}}_{0,\infty}\,(x) \tag{22}$$

où la fonction $g \in C_c^\infty(A_\infty)$ dépend seulement de $(|x|_v)$, $v \in S_\infty$ et est lisse à support compact, disjointe de l'ensemble fermé

$$\left\{ x \in \prod_{v \in S_\infty} k_v\,;\, \exists\, v\,,\, x_v = 0 \right\}.$$

Ainsi, à toute fonction $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, nous pouvons assigner une fonction test $f = f_b$ telle que pour tout s (Re $s > 0$)

$$\langle \Delta_s', f_0 \otimes f_b \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^*} b(x)\, |x|^s\, d^*x\,. \tag{23}$$

Par le lemme 3, on obtient,

$$\begin{aligned}\left\langle \int \Delta_{\frac{1}{2}+it}\,\widehat{\psi}(t)\,dt\,,\ f_0\otimes f_b\right\rangle &= \left\langle \int L\,(\mathcal{X}_0,\tfrac{1}{2}+it)\,\Delta'_{\frac{1}{2}+it}\,\widehat{\psi}(t)\,dt\,,\ f_0\otimes f_b\right\rangle\\ &= \int\int L\,(\mathcal{X}_0,\tfrac{1}{2}+it)\,\widehat{\psi}(t)\,b(x)\,|x|^{\frac{1}{2}+it}\,d^*x\,dt\,.\end{aligned}$$

Ainsi, de (14) et (15), on conclut, en utilisant des fonctions test arbitraires b que la transformée de Fourier de la distribution $L\,(\mathcal{X}_0,1/2+it)\,\widehat{\psi}(t)$ s'évanouit vraiment,

$$L\,(\mathcal{X}_0,\frac{1}{2}+it)\,\widehat{\psi}(t)=0 \tag{24}$$

Pour justifier l'égalité ci-dessus, nous avons besoin de contrôler la croissance de la fonction L en la variable t. On a,

$$|L(\frac{1}{2}+it)|=0\,(|t|^N). \tag{25}$$

En particulier, puisque $L\left(\frac{1}{2}+it\right)$ est une fonction analytique de t, nous voyons que c'est un multiplicateur de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions de Schwartz en la variable t. Ainsi, le produit $L\,(\frac{1}{2}+it)\,\widehat{\psi}(t)$ est encore une distribution tempérée, ainsi que sa transformée de Fourier. Dire que cette dernière s'évanouit quand on la teste sur des fonctions arbitraires qui sont lisses à support compact implique qu'elle s'évanouisse.

L'argument ci-dessus utilise l'hypothèse $\mathcal{X}_0/C_{k,1}\neq 1$.
Dans le cas $\mathcal{X}_0/C_{k,1}=1$, nous avons besoin d'imposer à la fonction test f utilisée dans (22) la condition $\int f\,dx=0$ qui signifie que

$$\int b(x)\,|x|\,d^*x=0\,. \tag{26}$$

Mais l'espace des fonctions $b(x)\,|x|^{1/2}\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ telles que (26) est vérifiée est toujours dense dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$.

Pour comprendre l'équation (24), considérons une équation pour les distributions $\alpha(t)$ de la forme

$$\varphi(t)\,\alpha(t)=0 \tag{27}$$

où l'on travaille d'abord avec des distributions α sur S^1 et où l'on assume que $\varphi\in C^\infty(S^1)$ a un nombre fini de zéros $x_i\in Z(\varphi)$, d'ordre fini n_i. Soit J l'idéal de $C^\infty(S^1)$ engendré par φ. On a $\psi\in J\Leftrightarrow$ l'ordre de ψ en x_i est $\geq n_i$.

Ainsi, les distributions $\delta_{x_i},\,\delta'_{x_i},\ldots,\delta_{x_i}^{(n_i-1)}$ forment une base de l'espace des solutions de (27).

Maintenant, $\widehat{\psi}(t)$ est, pour η orthogonal à $\mathrm{Im}(E)$ et satisfaisant (16), une distribution à support compact, et $L\left(\mathcal{X}_0,\frac{1}{2}+it\right)\,\widehat{\psi}(t)=0$. Ainsi, par l'argument ci-dessus, nous obtenons que $\widehat{\psi}$ est une combinaison linéaire finie des distributions,

$$\delta_t^{(k)}\ ,\ L\left(\mathcal{X}_0,\frac{1}{2}+it\right)=0\ ,\ k<\text{ordre du zéro},\ k<\frac{\delta-1}{2}\,. \tag{28}$$

La condition $k <$ l'ordre du zéro est nécessaire et suffisante pour obtenir l'évanouissement sur l'image de E. La condition $k < \frac{\delta-1}{2}$ est nécessaire et suffisante pour assurer que ψ appartient à $L^2_{-\delta}$, i.e. que

$$\int (\log|x|)^{2k} \, (1 + |\log|x||^2)^{-\delta/2} \, d^*x < \infty \tag{29}$$

qui est $2k + \delta < -1$, i.e. $k < \frac{\delta-1}{2}$.

Inversement, soit s un zéro de $L(\mathcal{X}_0, s)$ et $k > 0$ son ordre. Par le lemme 3 et par le fait que Δ'_s soit finie et analytique (pour Re $s > 0$), on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a \Delta_s(f) = 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(A)_0\,,\ a = 0, 1, \ldots, k-1\,. \tag{30}$$

On peut alors différencier l'égalité du lemme 3 et obtenir,

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a \Delta_s(f) = \int_{C_k} E(f)(x)\, \mathcal{X}_0(x)\, |x|^{s-1/2}\, (\log|x|)^a \, d^*x\,. \tag{31}$$

Ainsi, η appartient à l'orthogonal de Im(E) et satisfait (16) ssi c'est une combinaison linéaire de fonctions de la forme,

$$\eta_{t,a}(x) = \mathcal{X}_0(x)\, |x|^{it}\, (\log|x|)^a, \tag{32}$$

où,

$$L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it\right) = 0\ , \quad a < \text{ordre du zéro},\ a < \frac{\delta-1}{2}\,. \tag{33}$$

La restriction au sous-groupe $\mathbb{R}^*_+$ de C_k de la transposée de W est ainsi donnée dans la base ci-dessus par :

$$W(\lambda)^t\, \eta_{t,a} = \sum_{b=0}^{a} C_a^b\, \lambda^{it}\, (\log\lambda)^b\, \eta_{t,a-b}. \tag{34}$$

L'opérateur de multiplication par une fonction à dérivées bornées est un opérateur borné dans n'importe quel espace de Sobolev ; ainsi, on peut vérifier directement, en utilisant la densité dans l'orthogonal de Im(E) des vecteurs satisfaisant (16), que si $L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + is\right) \neq 0$ alors is n'appartient pas au spectre de $D^t_{\mathcal{X}_0}$.

Cela détermine le spectre de l'opérateur $D^t_{\mathcal{X}_0}$ et par conséquent celui de son transposé $D_{\mathcal{X}_0}$ comme indiqué dans le Théorème 1 et cela termine la preuve du théorème 1.

Prouvons maintenant le corollaire. Fixons $h_0 \in \mathcal{S}(C_k)$ de telle façon que $\widehat{h}_0$ a son support compact contenu dans $\{\mathcal{X}_0\} \times \mathbb{R}$ et $\widehat{h}_0(\mathcal{X}_0, s) = 1$ pour s petit.

Prenons alors h_s donné par $h_s(g) = h_0(g)\, |g|^{is}$. La transformée de Fourier $\widehat{h}_s$ est alors le translaté de $\widehat{h}_0$, et on peut choisir h_0 de telle façon que,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{h}_n(\mathcal{X}_0\,, u) = 1, u \in \mathbb{R} \tag{35}$$

Quand $|s| \to \infty$, la dimension de l'image de $W^t(h_s)$ est de l'ordre de $\log|s|$ comme l'est le nombre de zéros de la fonction L dans le translaté d'un intervalle donné (cf. [W3]).

Choisissons $h \in \mathcal{S}(C_k)$. On a $W^t(h) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} W^t(h * h_n)$.

Il suit de là, de la croissance polynomiale de la norme $W^t(g)$, que l'opérateur

$$\int h(g)\, W(g)^t\, d^*g \tag{36}$$

est de classe trace pour tout $h \in \mathcal{S}(C_k)$.

De plus, en utilisant la forme triangulaire donnée par (34), nous obtenons sa trace, et par conséquent la trace de son transposé $W(h)$ comme,

$$\operatorname{Trace} W(h) = \sum_{\substack{L\left(\mathcal{X},\frac{1}{2}+\rho\right)=0\\ \rho\in i\,\mathbb{R}}} \widehat{h}(\mathcal{X},\rho) \tag{37}$$

où la multiplicité est comptée comme dans le Théorème 1 et où la transformée de Fourier $\widehat{h}$ de h est définie par,

$$\widehat{h}(\mathcal{X},\rho) = \int_{C_k} h(u)\, \widetilde{\mathcal{X}}(u)\, |u|^\rho\, d^*\, u\,. \tag{38}$$

Appendice II. Formules explicites.

Rappelons d'abord les formules explicites de Weil ([W3]). Soit k un corps global. On identifie le quotient $C_k/C_{k,1}$ avec l'image du module,

$$N = \{|g|\,;\, g \in C_k\} \subset \mathbb{R}_+^*\,. \tag{1}$$

On munit N de sa mesure de Haar normalisée d^*x. Étant donnée une fonction F sur N telle que, pour $b > \frac{1}{2}$,

$$|F(\nu)| = 0(\nu^b) \quad \nu \to 0\ ,\ |F(\nu)| = 0(\nu^{-b})\ ,\ \nu \to \infty\,, \tag{2}$$

on définit,

$$\Phi(s) = \int_N F(\nu)\, \nu^{1/2-s}\, d^*\nu\,. \tag{3}$$

Étant donné un Grössencharakter $\mathcal{X}$, i.e. un caractère de C_k, et quel que soit ρ dans la bande $0 < \operatorname{Re}(\rho) < 1$, appelons $N(\mathcal{X},\rho)$ l'ordre de $L(\mathcal{X},s)$ en $s = \rho$. Soit,

$$S(\mathcal{X},F) = \sum_\rho N(\mathcal{X},\rho)\, \Phi(\rho) \tag{4}$$

où la somme est prise sur les ρ de la bande ouverte ci-dessus. On définit alors une distribution Δ sur C_k par,

$$\Delta = \log|d^{-1}|\, \delta_1 + D - \sum_v D_v\,, \tag{5}$$

où δ_1 est la masse de Dirac en $1 \in C_k$, où d est l'idèle différentielle de k de telle façon que $|d|^{-1}$ est au signe près le discriminant de k quand carac$(k) = 0$ et vaut q^{2g-2} quand k est un corps de fonctions sur une courbe de genre g avec ses coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.

La distribution D est donnée par,

$$D(f) = \int_{C_k} f(w)\,(|w|^{1/2} + |w|^{-1/2})\,d^*w \tag{6}$$

où la mesure de Haar d^*w est normalisée (cf. IIb). Les distributions D_v sont paramétrées par les places v de k et s'obtiennent comme suit. Pour chaque v, on considère l'homomorphisme propre naturel,

$$k_v^* \to C_k\ ,\ x \to \text{classe de } (1, \ldots, x, 1 \ldots) \tag{7}$$

du groupe multiplicatif du corps local k_v dans le groupe des classes d'idèles C_k.

On a alors,

$$D_v(f) = Pfw \int_{k_v^*} \frac{f(u)}{|1-u|}\,|u|^{1/2}\,d^*u \tag{8}$$

où la mesure de Haar d^*u est normalisée (cf. IIb), et où la valeur principale de Weil Pfw de l'intégrale s'obtient comme suit, pour un corps local $K = k_v$,

$$Pfw \int_{k_v^*} 1_{R_v^*}\,\frac{1}{|1-u|}\,d^*u = 0\,, \tag{9}$$

si le corps local k_v est non archimédien, et sinon :

$$Pfw \int_{k_v^*} \varphi(u)\,d^*u = PF_0 \int_{\mathbb{R}_+^*} \psi(\nu)\,d^*\nu\,, \tag{10}$$

où $\psi(\nu) = \int_{|u|=\nu} \varphi(u)\,d_\nu u$ est obtenu en intégrant φ sur les fibres, tandis que

$$PF_0 \int \psi(\nu) d^*\nu = 2\log 2\pi\, c + \lim_{t\to\infty} \left(\int (1 - f_0^{2t})\,\psi(\nu)\,d^*\nu - 2c\log t \right)\,, \tag{11}$$

où l'on suppose que $\psi - c\ f_1^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$f_0(\nu) = \inf(\nu^{1/2}, \nu^{-1/2}) \qquad \forall\,\nu \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_1 = f_0^{-1} - f_0\ .$$

La formule explicite de Weil est alors,

Théorème 1. ([W]) *Avec les notations ci-dessus, on a* $S(\mathcal{X}, F) = \Delta(F(|w|)\ \mathcal{X}(w)$.

Nous allons maintenant travailler sur cette formule et en particulier, comparer les valeurs principales Pfw avec celles du théorème V.3.

Effectuons le changement de variables suivant,

$$|g|^{-1/2}\, h(g^{-1}) = F(|g|)\, \mathcal{X}_0(g)\,, \tag{12}$$

et réécrivons l'égalité ci-dessus en fonction de h.

Par (3), on a,

$$\Phi\left(\frac{1}{2} + is\right) = \int_{C_k} F(|g|)\, |g|^{-is}\, d^*g\,, \tag{13}$$

Ainsi, en fonction de h,

$$\int h(g)\, \mathcal{X}_1(g)\, |g|^{1/2+is}\, d^*g = \int F(|g^{-1}|)\, \mathcal{X}_0(g^{-1})\, \mathcal{X}_1(g)\, |g|^{is}\, d^*g\,, \tag{14}$$

qui est égal à 0 si $\mathcal{X}_1/C_{k,1} \neq \mathcal{X}_0/C_{k,1}$ et pour $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0$,

$$\int h(g)\, \mathcal{X}_0(g)\, |g|^{1/2+is}\, d^*g = \Phi\left(\frac{1}{2} + is\right)\,. \tag{15}$$

Ainsi, avec nos notations, nous voyons que,

$$\mathrm{Supp}\, \widehat{h} \subset \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R}\ ,\ \widehat{h}(\mathcal{X}_0, \rho) = \Phi(\rho)\,. \tag{16}$$

Et alors, nous pouvons écrire,

$$S(\mathcal{X}_0, F) = \sum_{\substack{L(\mathcal{X},\rho)=0,\quad \mathcal{X}\in\widehat{C}_{k,1} \\ 0<\mathrm{Re}\,\rho<1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) \tag{17}$$

en utilisant une décomposition fixe $C_k = C_{k,1} \times N$.

Evaluons maintenant chaque terme dans (5).

Le premier devient $(\log |d^{-1}|)\, h(1)$. On a, en utilisant (6) et (12),

$$\begin{aligned} \langle D, F(|g|)\, \mathcal{X}_0(g)\rangle &= \textstyle\int_{C_k} |g|^{-1/2}\, h(g^{-1})\, (|g|^{1/2} + |g|^{-1/2})\, d^*g \\ &= \textstyle\int_{C_k} h(u)\, (1 + |u|)\, d^*u = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1)\,, \end{aligned}$$

où, pour le caractère trivial de $C_{k,1}$ on utilise la notation

$$\widehat{h}(z) = \widehat{h}(1, z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{18}$$

Ainsi, les deux premiers termes de (5) donnent

$$(\log |d^{-1}|)\, h(1) + \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1)\,. \tag{19}$$

Soit v une place de k, on a par (8) et (12),

$$\langle D_v, F(|g|)\, \mathcal{X}_0(g)\rangle = Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,.$$

Nous pouvons alors écrire la contribution des derniers termes de (5) comme,

$$-\sum_v Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u\,. \tag{20}$$

Ainsi, l'égalité de Weil peut être réécrite en,

$$\widehat{h}(0)+\widehat{h}(1)-\sum_{\substack{L(\mathcal{X},\rho)=0,\\ 0<\mathrm{Re}\,\rho<1}}\ \sum_{\mathcal{X}\in\widehat{C}_{k,1}}\widehat{h}(\mathcal{X},\rho)=(\log|d|)\,h(1)+ \tag{21}$$

$$\sum_v Pfw\int_{k_v^*}\frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\,d^*u\,.$$

qui est vérifiée maintenant pour des combinaisons linéaires de fonctions h de la forme (12).

Ceci est suffisant pour conclure quand $h(1)=0$.

Comparons maintenant les valeurs principales de Weil, avec celles dictées par le théorème V.3. Nous travaillons d'abord avec un corps local K et comparons (9), (10) avec notre prescription. Supposons d'abord K non archimédien. Soit α un caractère de K tel que,

$$\alpha/R=1\ ,\ \alpha/\pi^{-1}R\neq 1\,. \tag{22}$$

Alors, pour la transformée de Fourier donnée par,

$$(Ff)(x)=\int f(y)\,\alpha(y)\,dy\,, \tag{23}$$

avec dy la mesure auto-duale de Haar, on a

$$F(1_R)=1_R\,. \tag{24}$$

Lemme 2. *Avec le choix ci-dessus de α, on a*

$$\int'\frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\,d^*u=Pfw\int\frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\,d^*u$$

avec les notations du théorème 3.

Preuve. Par construction, les deux côtés peuvent seulement différer par un multiple de $h(1)$. Rappelons du théorème 3 que le côté gauche est donné par

$$\left\langle L,\,\frac{h(u^{-1})}{|u|}\right\rangle\,, \tag{25}$$

où L est l'unique extension de $\rho^{-1}\frac{du}{|1-u|}$ dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1, $\widehat{L}(1)=0$. Ainsi, de (9), nous devons seulement vérifier que (25) s'évanouit pour $h=1_{R^*}$, i.e. que

$$\langle L,1_{R^*}\rangle=0\,. \tag{26}$$

De façon équivalente, si l'on pose $Y=\{y\in K\,;\,|y-1|=1\}$, on a juste à montrer, en utilisant Parseval, que,

$$\langle\log|u|\,,\,\widehat{1}_Y\rangle=0\,. \tag{27}$$

On a $\widehat{1}_Y(x) = \int_Y \alpha(xy)\,dy = \alpha(x)\,\widehat{1}_{R^*}(x)$, et $1_{R^*} = 1_R - 1_P$, $\widehat{1}_{R^*} = 1_R - |\pi|\,1_{\pi^{-1}R}$, ainsi, avec $q^{-1} = |\pi|$,

$$\widehat{1}_Y(x) = \alpha(x)\left(1_R - \frac{1}{q}\,1_{\pi^{-1}R}\right)(x)\,. \tag{28}$$

Nous devons maintenant calculer $\int \log|x|\,\widehat{1}_Y(x)\,dx = A + B$,

$$A = -\frac{1}{q}\int_{\pi^{-1}R^*} \alpha(x)\,(\log q)\,dx\ ,\ B = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\int_R \log|x|\,dx\,. \tag{29}$$

Montrons que $A + B = 0$. On a $\int_R dx = 1$, et

$$\begin{aligned} A &= -\int_{R^*} \alpha(\pi^{-1}y)\,(\log q)\,dy = -\log q\left(\int_R \alpha(\pi^{-1}y)\,dy - \int_P dy\right) \\ &= \frac{1}{q}\,\log q\ ,\ \text{puisque}\ \int_R \alpha(\pi^{-1}y)\,dy = 0\ \text{lorsque}\ \alpha/\pi^{-1}R \neq 1\,. \end{aligned}$$

Pour calculer B, il convient de noter que $\int_{\pi^n R^*} dy = q^{-n}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ de telle manière que

$$B = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-n\log q)\,q^{-n} = -q^{-1}\log q\,.$$

et $A + B = 0$. ∎

Traitons maintenant le cas des corps archimédiens. On prend d'abord $K = \mathbb{R}$, et on normalise la transformée de Fourier comme,

$$(Ff)(x) = \int f(y)\,e^{-2\pi i x y}\,dy \tag{30}$$

de telle façon que la mesure de Haar dx soit auto-duale.

Avec les notations de (10), on a,

$$Pfw\int_{\mathbb{R}^*} f_0^3(|u|)\,\frac{|u|^{1/2}}{|1-u|}\,d^*u = \log\pi + \gamma \tag{31}$$

où γ est la constante d'Euler, $\gamma = -\Gamma'(1)$. Par conséquent, l'intégration sur les fibres donne $f_0^4 \times (1 - f_0^4)^{-1}$, et on obtient,

$$\begin{aligned} PF_0\int_{\mathbb{R}_+^*} f_0^4 \times (1-f_0^4)^{-1} d^*u\ &= \left(\log 2\pi + \lim_{t\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}_+^*} (1 - f_0^{2t})\,f_0^4(1-f_0^4)^{-1}\,d^*u - \log t\right)\right) \\ &= \log 2\pi + \gamma - \log 2\,. \end{aligned}$$

Maintenant, soit $\varphi(u) = -\log|u|$, c'est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ et on a,

$$\langle \varphi, e^{-\pi u^2}\rangle = \frac{1}{2}\,\log\pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2\,, \tag{32}$$

puisqu'on obtient que $\frac{\partial}{\partial s}\int |u|^{-s}\,e^{-\pi u^2}\,du = \frac{\partial}{\partial s}\left(\pi^{\frac{s-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\right)$ évalué en $s = 0$, en utilisant que $\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\gamma - 2\log 2$.

Alors, par la formule de Parseval, on a,

$$\langle \widehat{\varphi}, e^{-\pi x^2} \rangle = \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2 \,, \tag{33}$$

qui donne, pour toute fonction test f,

$$\langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\, d^* x + (\log \varepsilon)\, f(0) \right) + \lambda\, f(0) \tag{34}$$

où $\lambda = \log 2\pi + \gamma$. Dans le but d'obtenir (34), on utilise l'égalité,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\, d^* x + (\log \varepsilon)\, f(0) \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int f(x)\, |x|^{\varepsilon}\, d^* x - \frac{1}{\varepsilon}\, f(0) \right) \,, \tag{35}$$

qui est vérifiée puisque les deux côtés s'évanouissent pour $f(x) = 1$ et pour $|x| \leq 1$, $f(x) = 0$ sinon.

Ainsi, de (34), on obtient,

$$\int_{\mathbb{R}}{}' f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^* u = \lambda\, f(1) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|1-u| \geq \varepsilon} \frac{f(u)}{|1-u|}\, d^* u + (\log \varepsilon)\, f(1) \right) \,. \tag{36}$$

En prenant $f(u) = |u|^{1/2}\, f_0^3(|u|)$, le côté droit de (36) donne $\lambda - \log 2 = \log \pi + \gamma$, et ainsi, nous pouvons conclure en utilisant (31) que, pour toute fonction test f,

$$\int_{\mathbb{R}}{}' f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^* u = Pfw \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \frac{1}{|1-u|}\, d^* u \,. \tag{37}$$

Considérons finalement le cas $K = \mathbb{C}$. Nous choisissons le caractère de base α comme

$$\alpha(z) = \exp 2\pi i (z + \overline{z}) \,, \tag{38}$$

la mesure de Haar auto-duale est $dz\, d\overline{z} = |dz \wedge d\overline{z}|$, et la fonction $f(z) = \exp -2\pi |z|^2$ est auto-duale.

La mesure de Haar multiplicative normalisée est :

$$d^* z = \frac{|dz \wedge d\overline{z}|}{2\pi |z|^2} \,. \tag{39}$$

Calculons la transformée de Fourier de la distribution

$$\varphi(z) = -\log |z|_{\mathbb{C}} = -2 \log |z| \,. \tag{40}$$

On a

$$\langle \varphi, \exp -2\pi |z|^2 \rangle = \log 2\pi + \gamma \,, \tag{41}$$

comme on le voit en utilisant $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\int e^{-2\pi |z|^2}\, |z|^{-2\varepsilon}\, |dz \wedge d\overline{z}| \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left((2\pi)^{\varepsilon}\, \Gamma(1-\varepsilon) \right)$.

Ainsi, $\langle \widehat{\varphi}, \exp -2\pi |u|^2 \rangle = \log 2\pi + \gamma$ et l'on obtient,

$$\langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|u|_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon} f(u)\, d^* u + \log \varepsilon\, f(0) \right) + \lambda'\, f(0) \tag{42}$$

où $\lambda' = 2(\log 2\pi + \gamma)$.

Pour voir cela, on utilise l'analogue de (35) pour $K = \mathbb{C}$, pour calculer le côté droit de (42) pour $f(z) = \exp -2\pi|z|^2$.

Ainsi, pour toute fonction test f, on a,

$$\int_{\mathbb{C}}' f(u)\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u = \lambda'\,f(1) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|1-u|_{\mathbb{C}}\geq\varepsilon}\frac{f(u)}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u + (\log\varepsilon)f(1)\right). \tag{43}$$

Comparons cela à Pfw. Quand on intègre sur les fibres de $\mathbb{C}^* \xrightarrow{|\ |_{\mathbb{C}}} \mathbb{R}_+^*$ la fonction $|1-z|_{\mathbb{C}}^{-1}$, on obtient,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-e^{i\theta}z|^2}\,d\theta = \frac{1}{1-|z|^2}\ \text{si}\ |z|<1\,,\ \text{et}\ \frac{1}{|z|^2-1}\ \text{si}\ |z|>1\,. \tag{44}$$

Ainsi, pour toute fonction test f sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, par (10),

$$Pfw\int f(|u|_{\mathbb{C}})\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u = PF_0\int f(\nu)\,\frac{1}{|1-\nu|}\,d^*\nu \tag{45}$$

avec les notations de (11). Avec $f_2(\nu) = \nu^{\frac{1}{2}}\,f_0(\nu)$, on obtient alors, en utilisant (11),

$$Pfw\int f_2(|u|_{\mathbb{C}})\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u = PF_0\int f_0\,f_1^{-1}d^*\nu = 2(\log 2\pi+\gamma)\,. \tag{46}$$

Nous allons maintenant montrer que,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|1-u|_{\mathbb{C}}\geq\varepsilon}\frac{f_2(|u|_{\mathbb{C}})}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u + \log\varepsilon\right) = 0\,, \tag{47}$$

d'où il découlera que, en utilisant (43),

$$\int_{\mathbb{C}}' f(u)\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u = Pfw\int f(u)\,\frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\,d^*u\,. \tag{48}$$

Pour prouver (47), il suffit d'évaluer l'intégrale,

$$\int_{|z|\leq 1,|1-z|\geq\varepsilon}((1-z)(1-\overline{z}))^{-1}\,|dz\wedge d\overline{z}| = j(\varepsilon) \tag{49}$$

et de montrer que $j(\varepsilon) = \alpha\log\varepsilon + o(1)$ pour $\varepsilon\to 0$. Un énoncé similaire est alors vérifié

$$\int_{|z|\leq 1,|1-z^{-1}|\geq\varepsilon}((1-z)(1-\overline{z}))^{-1}\,|dz\wedge d\overline{z}|.$$

On a $j(\varepsilon) = \int_D |dZ\wedge d\overline{Z}|$, où $Z = \log 1 - z$ et le domaine D est contenu dans le rectangle,

$$\{Z = (x+iy)\,;\,\log\varepsilon\leq x\leq\log 2\,,\ -\pi/2\leq y\leq\pi/2\} = R_\varepsilon \tag{50}$$

et borné par la courbe $x = \log 2\cos y$ qui vient de l'équation du cercle $|z| = 1$ en coordonnées polaires centrées en $z = 1$. On obtient alors,

$$j(\varepsilon) = 4\int_{\log\varepsilon}^{\log 2}\operatorname{Arc}\cos(e^x/2)\,dx\,, \tag{51}$$

quand $\varepsilon \to 0$, on a $j(\varepsilon) \sim 2\pi \log 1/\varepsilon$, qui est l'aire du rectangle suivant (selon la mesure $|dz \wedge d\overline{z}|$),

$$\{Z = (x+iy)\,;\, \log\varepsilon \le x \le 0\,,\ -\pi/2 \le y \le \pi/2\} \tag{52}$$

on a $|R_\varepsilon| - 2\pi \log 2 = 2\pi \log 1/\varepsilon$. Quand $\varepsilon \to 0$, l'aire de $R_\varepsilon \backslash D$ converge vers

$$4\int_{-\infty}^{\log 2} \mathrm{Arc}\sin(e^x/2)\,dx = -4\int_0^{\pi/2} \log\sin u\,du = 2\pi\log 2\,, \tag{53}$$

de telle façon que $j(\varepsilon) = 2\pi \log 1/\varepsilon + o(1)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Ainsi, nous pouvons affirmer qu'avec le choix ci-dessus des caractères de base pour les corps locaux, on a, pour toute fonction test f,

$$\int_K{}' f(u)\,\frac{1}{|1-u|}\,d^*u = Pfw\int f(u)\,\frac{1}{|1-u|}\,d^*u\,. \tag{54}$$

Lemme 3. *Soit K un corps local, α_0 un caractère normalisé comme ci-dessus et α, $\alpha(x) = \alpha_0(\lambda x)$ un caractère arbitraire de K. Soit $\int'$ définie comme dans le théorème V.3 relative à α, alors, pour toute fonction test f,*

$$\int_K{}' f(u)\,\frac{1}{|1-u|}\,d^*u = \log|\lambda|\,f(1) + Pfw\int f(u)\,\frac{1}{|1-u|}\,d^*u\,.$$

Preuve. La nouvelle mesure de Haar auto-duale est

$$da = |\lambda|^{1/2}\,d_0\,a \tag{55}$$

avec $d_0\,a$ auto-duale pour α_0.

De façon similaire, la nouvelle transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{f}(x) = \int \alpha(xy)\,f(y)\,dy = \int \alpha_0(\lambda\,xy)\,f(y)\,|\lambda|^{1/2}\,d_0\,y\,,$$

ainsi

$$\widehat{f}(x) = |\lambda|^{1/2}\,\widehat{f}^0(\lambda\,x)\,. \tag{56}$$

Soit alors $\varphi(u) = -\log|u|$. Sa transformée de Fourier comme distribution est donnée par,

$$\langle\widehat{\varphi}, f\rangle = \int(-\log|u|)\,\widehat{f}(u)\,du\,. \tag{57}$$

On a

$$\begin{aligned}\textstyle\int(-\log|u|)\,\widehat{f}(u)\,du &= \textstyle\int(-\log|u|)\,\widehat{f}^0(\lambda\,u)\,|\lambda|\,d_0\,u\\ &= \textstyle\int(-\log|v|)\,\widehat{f}^0(v)\,d_0\,v + \int\log|\lambda|\,\widehat{f}^0(v)\,d_0\,v\\ &= \textstyle\int(-\log|v|)\,\widehat{f}^0(v)\,d_0\,v + \log|\lambda|\,f(0).\end{aligned}$$

Ainsi, le lemme découle de (54). ∎

Passons maintenant au cas global, rappelons que si α, $\alpha \neq 1$, est un caractère de A tel que $\alpha/k = 1$, il existe une idèle différentielle $d = (d_v)$ telle que (cf. [W1]),

$$\alpha_v(x) = \alpha_{0,v}(d_v\, x) \tag{58}$$

où $\alpha = \Pi\, \alpha_v$ et où chaque caractère $\alpha_{0,v}$ est normalisé comme ci-dessus.

Nous pouvons alors réécrire la formule de Weil (théorème 1) comme,

Théorème 6. *Soit k un corps global, α un caractère non-trivial de A/k et $\alpha = \Pi\, \alpha_v$ ses facteurs locaux.*

Soit $h \in \mathcal{S}(C_k)$ à support compact, alors

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\mathcal{X},\rho)=0 \\ 0<\mathrm{Re}\rho<1}} \widehat{h}(\mathcal{X},\rho) = \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u$$

où la normalisation de $\int'$ est donnée par α_v comme dans le théorème V.3, et $\widehat{h}(\mathcal{X},z) = \int h(u)\, \mathcal{X}(u)\, |u|^z\, d^*u$.

Preuve. Cela découle de la formule (21), lemme 3 et de l'égalité $\log|d| = \sum\limits_v \log|d_v|$. ∎

Normalisation de la mesure de Haar sur le groupe modulé

Soit G un groupe abélien localement compact avec un morphisme propre,

$$g \to |g|\,,\ G \to \mathbb{R}_+^* \tag{1}$$

dont l'image est cocompacte dans $\mathbb{R}_+^*$.

Il existe une unique mesure de Haar d^*g sur G telle que

$$\int_{|g|\in[1,\Lambda]} d^*g \sim \log\Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to +\infty\,. \tag{2}$$

Soit $G_0 = \mathrm{Ker}\,\mathrm{mod} = \{g \in G\,;\, |g| = 1\}$. C'est un groupe compact par hypothèse, et l'on peut identifier G/G_0 avec l'image N du module. Déterminons la mesure d^*n sur $N \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que (2) soit vérifiée pour

$$\int f\, d^*g = \int \left(\int f(ng_0)\, dg_0 \right) d^*n \tag{3}$$

où la mesure de Haar dg_0 est normalisée par

$$\int_{G_0} dg_0 = 1\,. \tag{4}$$

Soit ρ_Λ la fonction sur G définie par

$$\rho_\Lambda(g) = 0 \quad \text{si } |g| \notin [1,\Lambda]\,,\ \rho_\Lambda(g) = \frac{1}{\log\Lambda} \quad \text{si } g \in [1,\Lambda]\,. \tag{5}$$

La normalisation (2) signifie que $\int \rho_\Lambda\, d^*g \to 1$ quand $\Lambda \to \infty$.

Posons d'abord $N = \mathbb{R}_+^*$; alors l'unique mesure satisfaisant (2) est

$$d^*\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda}\,. \tag{6}$$

Posons alors $N = \mu^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $\mu > 1$. Considérons la mesure

$$\int f\, d^*g = \alpha \sum f(\mu^n)\,. \tag{7}$$

On prend $f = \rho_\Lambda$, alors, le côté droit est $\alpha\, \frac{N}{\log\Lambda}$ où N est le nombre de $\mu^n \in [1,\Lambda]$, i.e. $\sim \frac{\log\Lambda}{\log\mu}$. Cela montre que (2) est vérifiée ssi

$$\alpha = \log\mu\,. \tag{8}$$

Montrons plus généralement que si $H \subset G$ est un sous-groupe compact de G et si à la fois d^*g et d^*h sont normalisées par (2), on a

$$\int \left(\int f(hy)\, d^*h \right) d_0\, y = \int f\, d^*g \tag{9}$$

où $d_0\, y$ est la mesure de Haar de l'intégrale 1 sur G/H,

$$\int_{G/H} d_0\, y = 1\,. \tag{10}$$

Le côté gauche de (9) définit une mesure de Haar sur G et il est juste nécessaire de montrer qu'il satisfait (2).

On a $\|\rho_\Lambda(\cdot\, y) - \rho_\Lambda\|_1 \to 0$ quand $\Lambda \to \infty$, et

$$\int \rho_\Lambda(hy)\, d^*h \to 1 \qquad \text{quand}\, \Lambda \to \infty \tag{11}$$

uniformément sur les ensembles compacts de $y \in G$, ainsi

$$\int \left(\int \rho_\Lambda(hy)\, d^*h \right) d_0\, y \to 1 \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty\,. \tag{12}$$

Appendice III. Formules de trace d'une distribution.

Dans cet appendice, nous rappelons pour le confort de la lectrice le traitement des distributions indépendantes des coordonnées de [GS] et donnons des détails pour les conditions de transversalité.

Étant donné un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, $\dim E = n$, une densité est une application, $\rho \in |E|$,

$$\rho : \wedge^n E \to \mathbb{C} \tag{1}$$

telle que $\rho(\lambda v) = |\lambda|\,\rho(v) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, v \in \wedge^n E.$

Étant donnée une fonction linéaire $T : E \to F$, soit $|T| : |F| \to |E|$ l'application linéaire correspondante, elle dépend de façon contravariante de T.

Étant donnée une variété M et $\rho \in C_c^\infty(M, |TM|)$ sur une intégrale canonique,

$$\int \rho \in \mathbb{C}\,. \tag{2}$$

Étant donné un fibré vectoriel L sur M, on définit les sections généralisées sur M comme l'espace dual de $C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|)$

$$C^{-\infty}(M, L) = \text{ dual de } C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|) \tag{3}$$

où L^* est le fibré dual. On a une inclusion naturelle,

$$C^\infty(M, L) \subset C^{-\infty}(M, L) \tag{4}$$

étant donné l'appariement,

$$\sigma \in C^\infty(M, L)\ ,\ s \in C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|) \to \int \langle s, \sigma \rangle \tag{5}$$

où $\langle s, \sigma \rangle$ est vu comme une densité, $\langle s, \sigma \rangle \in C_c^\infty(M, |TM|)$.

On a la notion similaire de section généralisée sur les supports compacts.

Étant donnée une application lisse $\varphi : X \to Y$, alors si φ est *propre*, elle a une application (contravariante) associée :

$$\varphi^* : C_c^\infty(Y, L) \to C_c^\infty(X, \varphi^*(L))\ ,\ (\varphi^*\,\xi)(x) = \xi(\varphi(x)) \tag{6}$$

où $\varphi^*(L)$ est le pullback du fibré vectoriel L.

Ainsi, étant donnée une forme linéaire sur $C_c^\infty(X, \varphi^*(L))$, on a une forme linéaire (covariante) associée sur $C_c^\infty(Y, L)$. En particulier, avec L trivial, on voit que si on a une densité généralisée $\rho \in C^{-\infty}(X, |T|)$, on a un pushforward

$$\varphi_*(\rho) \in C^{-\infty}(Y, |T|) \tag{7}$$

avec $\langle \varphi_*(\rho), \xi \rangle = \langle \rho, \varphi^*\,\xi \rangle \qquad \forall\, \xi \in C_c^\infty(X).$

Ensuite, si φ est une fibration et $\rho \in C_c^\infty(X, |T|)$ est une densité, alors, on peut intégrer ρ le long des fibres ; la densité obtenue sur Y, $\varphi_*(\rho)$ est donnée comme dans (7) par

$$\langle \varphi_*(\rho), f \rangle = \langle \rho, \varphi^*\,f \rangle \qquad \forall\, f \in C^\infty(Y) \tag{8}$$

mais l'important est que ce n'est pas seulement une section généralisée mais également une section lisse $\varphi_*(\rho) \in C_c^\infty(Y, |T|)$.

Il suit de cela que si $f \in C^{-\infty}(Y)$ est une fonction généralisée, alors on obtient une fonction généralisée $\varphi^*(f)$ sur X par,

$$\langle \varphi^*(f), \rho \rangle = \langle f, \varphi_*(\rho) \rangle \qquad \forall\, \rho \in C_c^\infty(X, |T|)\,. \tag{9}$$

En général, le pullback $\varphi^*(f)$ continue d'avoir du sens tant que la condition de transversalité tient,

$$d(\varphi^*(l)) \neq 0 \quad \forall l \in WF(f)\,. \tag{10}$$

où $WF(f)$ est l'ensemble des fronts d'onde de f ([GS]). Le point suivant est la construction de la section généralisée d'un fibré vectoriel L sur une variété X associée à une sous-variété $Z \subset X$ et un symbole,

$$\sigma \in C^\infty(Z, L \otimes |N_Z^*|)\,. \tag{11}$$

où N_Z est le fibré normal de Z. La construction est la même que celle de l'intégration habituelle sur un cycle. Étant donné $\xi \in C_c^\infty(X, L^* \otimes |T|)$, le produit $\sigma\, \xi/Z$ est une densité sur Z, puisque c'est une section de $|T_Z| = |T_X| \otimes |N_Z^*|$. On peut alors l'intégrer sur Z. Quand $Z = X$, on a $N_Z^* = \{0\}$ et $|N_Z^*|$ a une section canonique, de telle manière que le courant associé à σ est juste donné par (5). Quand $Z = \text{pt}$ est un point singulier $x \in X$, une section généralisée de L donnée par une distribution de Dirac en x nécessite non seulement un vecteur $\xi_x \in L_x$ mais également une densité duale, i.e. un volume multi-vectoriel $v \in |T_x^*|$.

Maintenant, soit $\varphi : X \to Y$ avec Z une sous-variété de Y et σ comme dans (11).

Assumons que φ est transverse à Z, de telle sorte que pour tout $x \in X$ avec $y = \varphi(x) \in Z$, on ait

$$\varphi_*(T_x) + T_{\varphi(x)}(Z) = T_y\, Y\,. \tag{12}$$

Soit

$$\tau_x = \{X \in T_x\ ,\ \varphi_*(X) \in T_y(Z)\}\,. \tag{13}$$

Alors, φ_* est un isomorphisme canonique,

$$\varphi_* : T_x(X)/\tau_x \simeq T_y(Y)/T_y(Z) = N_y(Z)\,. \tag{14}$$

Et $\varphi^{-1}(Z)$ est une sous-variété de X de la même codimension que Z avec un isomorphisme naturel de fibrés normaux

$$N_{\varphi^{-1}(Z)} \simeq \varphi^*\, N_Z\,. \tag{15}$$

En particulier, si est donnée une δ-section généralisée d'un fibré L à support Z et un symbole $\sigma \in C^\infty(Z, L \otimes |N_Z^*|)$, on a le symbole correspondant sur $\varphi^{-1}(Z)$ qui est donné par

$$\varphi^*\, \sigma(x) = \sigma(\varphi(x)) \in (\varphi^*\, L)_x \otimes |N_x^*| \tag{16}$$

en utilisant l'isomorphisme (15) i.e. $N_x^* \simeq N_{\varphi(x)}^*$.

Maintenant, pour toute δ-section associée à Z, σ, l'ensemble des fronts d'onde est contenu dans le fibré conormal de la sous-variété Z, ce qui montre que si φ est transverse à Z, le pullback $\varphi^*\, \delta_{Z,\sigma}$

de la distribution sur Y associée à Z, σ fait sens, il est égal à $\delta_{\varphi^{-1}(Z),\varphi^*(\sigma)}$.

Formulons alors maintenant le théorème du noyau de Schwartz. On considère une application linéaire continue,

$$T : C_c^\infty(Y) \to C^{-\infty}(X)\,, \tag{17}$$

l'énoncé du théorème peut s'écrire

$$(T\,\xi)\,(x) = \int k(x,y)\,\xi(y)\,dy \tag{18}$$

où $k(x,y)\,dy$ est une section généralisée,

$$k \in C^{-\infty}(X \times Y\ ,\ \mathrm{pr}_Y^*(|T|))\,. \tag{19}$$

Soit $f : X \to Y$ une application lisse, et $T = f^*$ l'opérateur

$$(T\,\xi)\,(x) = \xi\,(f(x)) \qquad \forall\,\xi \in C_c^\infty(Y)\,. \tag{20}$$

Montrons que le k correspondant est la δ-section associée à la sous-variété de $X \times Y$ donnée par

$$\mathrm{Graphe}(f) = \{(x, f(x))\ ;\ x \in X\} = Z \tag{21}$$

et identifions son symbole, $\sigma \in C^\infty(Z, \mathrm{pr}_Y^*(|T|) \otimes |N_Z^*|)$.

Étant donné $\xi \in T_x^*(X)$, $\eta \in T_y^*(Y)$, on a $(\xi,\eta) \in N_Z^*$ ssi il est orthogonal à $(v, f_*\,v)$ pour tout $v \in T_x(X)$, i.e. $\langle v, \xi\rangle + \langle f_*\,v, \eta\rangle = 0$ de telle façon que

$$\xi = -f_*^t\,\eta\,. \tag{22}$$

Ainsi, on a un isomorphisme canonique $j : T_y^*(Y) \simeq N_Z^*$, $\eta \xrightarrow{j} (-f_*^t\,\eta, \eta)$. La transposée $(j^{-1})^t$ est donnée par $(j^{-1})^t(Y) =$ classe de $(0, Y)$ dans N_Z, $\forall\, Y \in T_y(Y)$. Ainsi, on a le choix canonique pour le symbole σ,

$$\sigma = |j^{-1}| \in C^\infty(Z, \mathrm{pr}_Y^*(|T|) \otimes |N_Z^*|)\,. \tag{23}$$

On note la δ-distribution correspondante par

$$k(x,y)\,dy = \delta(y - f(x))\,dy\,. \tag{24}$$

On vérifie alors la formule,

$$\int \delta(y - f(x))\,\xi(y)\,dy = \xi(f(x)) \qquad \forall\,\xi \in C_c^\infty(Y)\,. \tag{25}$$

Considérons maintenant une variété M avec un flot F_t

$$F_t(x) = \exp(t\,v)\,x \qquad v \in C^\infty(M, T_M) \tag{26}$$

et l'application correspondante f,

$$f : M \times \mathbb{R} \to M \ , \ f(x,t) = F_t(x) \, . \tag{27}$$

On applique les éléments ci-dessus avec $X = M \times \mathbb{R}$, $Y = M$. Le graphe de f est la sous-variété Z de $X \times Y$,

$$Z = \{(x,t,y) \ ; \ y = F_t(x)\} \, . \tag{28}$$

Si φ est l'application diagonale,

$$\varphi(x,t) = (x,t,x) \ , \ \varphi : M \times \mathbb{R} \to X \times Y \tag{29}$$

et le premier résultat est la transversalité $\quad \varphi \pitchfork Z$.

Nous avons alors besoin de considérer (12) pour chaque (x,t) tel que $\varphi(x,t) \in Z$, i.e. tel que $x = F_t(x)$. On regarde l'image par φ_* de l'espace tangent $T_x \, M \times \mathbb{R}$ sur $M \times \mathbb{R}$ en (x,t). On prend ∂_t le champ de vecteurs naturel sur $\mathbb{R}$. L'image de $(X, \lambda \, \partial_t)$ est $(X, \lambda \, \partial_t, X)$ pour $X \in T_x \, M, \lambda \in \mathbb{R}$. En divisant l'espace tangentiel de $M \times \mathbb{R} \times M$ par l'image de φ_*, on obtient un isomorphisme,

$$(X, \lambda \, \partial_t, Y) \to Y - X \tag{30}$$

avec $T_x \, M$. L'espace tangent à Z est $\{(X', \mu \, \partial_t, (F_t)_* \, X' + \mu \, v_{F_t(x)}); \ X' \in T_x \, M, \mu \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, la condition de transversalité signifie que tout élément de $T_x \, M$ est de la forme

$$(F_t)_* \, X - X + \mu \, v_x \qquad X \in T_x \, M \ , \ \mu \in \mathbb{R} \, . \tag{31}$$

On a

$$(F_t)_* \, \mu \, v_x = \mu \, v_x \tag{32}$$

de telle manière que $(F_t)_*$ définit une application quotient, l'application inverse de Poincaré

$$P : T_x / \mathbb{R} \, v_x \to T_x / \mathbb{R} \, v_x = N_x \tag{33}$$

et la condition de transversalité (31) signifient exactement,

$$1 - P \qquad \text{est inversible.} \tag{34}$$

Faisons cette hypothèse et calculons le symbole σ de la distribution,

$$\tau = \varphi^*(\delta(y - F_t(x)) \, dy) \, . \tag{35}$$

D'abord, comme ci-dessus, posons $W = \varphi^{-1}(Z) = \{(x,t) \ ; \ F_t(x) = x\}$. La codimension de $\varphi^{-1}(Z)$ dans $M \times \mathbb{R}$ est la même que la codimension de Z dans $M \times \mathbb{R} \times M$, et elle est donc égale à $\dim M$, ce qui montre que $\varphi^{-1}(Z)$ est de dimension 1. Si $(x,t) \in \varphi^{-1}(Z)$ alors $(F_s(x), t) \in \varphi^{-1}(Z)$. Ainsi, si l'on suppose que v ne s'évanouit pas en x, l'application,

$$(x,t) \xrightarrow{q} t \tag{36}$$

est localement constante sur la composante connexe de $\varphi^{-1}(Z)$ qui contient (x,t).

Cela autorise à identifier l'espace transverse à $W = \varphi^{-1}(Z)$ comme le produit

$$N^W_{x,t} \simeq N_x \times \mathbb{R} \tag{37}$$

dans lequel à $(X, \lambda\,\partial_t) \in T_{x,t}(M \times \mathbb{R})$, on associe la paire $(\widetilde{X}, \lambda)$ donnée par la classe de X dans $N_x = T_x/\mathbb{R}\,v_x$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le symbole σ de la distribution (35) est une section lisse de $|N^{W*}|$ tensorisée par le pullback $\varphi^*(L)$ où $L = \mathrm{pr}_Y^*\,|T_M|$, et on a

$$\varphi^*(L) \simeq |p^*\,T_M| \tag{38}$$

où

$$p(x,t) = x \qquad \forall\,(x,t) \in M \times \mathbb{R}\,. \tag{39}$$

Pour calculer σ, on a besoin de l'isomorphisme,

$$N^W_{(x,t)} \overset{\varphi_*}{\to} T_{\varphi(x,t)}(M \times \mathbb{R} \times M)/T_{\varphi(x,t)}(Z) = N^Z\,. \tag{40}$$

L'application $\varphi_* : N^W_{x,t} \to N^Z$ est donnée par

$$\varphi_*(X, \lambda\,\partial_t) = (1 - (F_t)_*)\,X - \lambda\,v \qquad X \in N_x\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{41}$$

et le symbole σ est juste

$$\sigma = |\varphi_*^{-1}| \in |p^*\,T_M| \otimes |N^{W*}|\,. \tag{42}$$

Cela fait sens puisque $\varphi_*^{-1} : p^*\,T_M \to N^W$.

Considérons maintenant la seconde projection,

$$q(x,t) = t \in \mathbb{R} \tag{43}$$

et calculons le pushforward $q_*(\tau)$ de la distribution τ.

Par construction, $\delta(y - F_t(x))\,dy$ est une section généralisée de $\mathrm{pr}_Y^*\,|T|$, de telle façon que τ est une section généralisée de $p^*\,|T| = \varphi^*\,\mathrm{pr}_Y^*\,|T|$.

Ainsi, $q_*(\tau)$ est une fonction généralisée.

On regarde d'abord la contribution d'une orbite périodique, la partie correspondante de $\varphi^{-1}(Z)$ est de la forme,

$$\varphi^{-1}(Z) = V \times \Gamma \subset M \times \mathbb{R} \tag{44}$$

où Γ est un sous-groupe discret cocompact de $\mathbb{R}$, tandis que $V \subset M$ est une sous-variété compacte de M de dimension 1.

Pour calculer $q_*(\tau)$, on définit $h(t)\,|dt|$ comme une 1-densité sur $\mathbb{R}$ et on la pullback par q comme la section sur $M \times \mathbb{R}$ du fibré $q^*\,|T|$,

$$\xi(x,t) = h(t)\,|dt|\,. \tag{45}$$

On a alors besoin de calculer $\int_{\varphi-1(Z)} \xi\,\sigma$. On peut regarder la contribution de chaque composant : $V \times \{T\}$, $T \in \Gamma$.

On obtient

$$T^{\#}\frac{1}{|1-P_T|}\;h(T)\,. \tag{46}$$

où $T^{\#}$ est la longueur de l'orbite primitive, ou, de manière équivalente, le covolume de Γ dans $\mathbb{R}$ pour la mesure de Haar $|dt|$. On peut alors écrire les contributions des orbites périodiques comme

$$\sum_{\gamma_p}\sum_{\Gamma}\mathrm{Covol}(\Gamma)\,\frac{1}{|1-P_T|}\;h(T)\,. \tag{47}$$

où la fonction test h s'évanouit en 0.

Le prochain cas à considérer est celui où le champ de vecteurs v_x a un zéro isolé 0, $v_{x_0} = 0$. Dans ce cas, la condition de transversalité (31) devient

$$1-(F_t)_* \quad \text{inversible (en } x_0)\,. \tag{48}$$

On a $F_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et maintenant, le composant pertinent de $\varphi^{-1}(Z)$ est $\{x_0\} \times \mathbb{R}$. L'espace transverse N^W est identifié à T_x et l'application $\varphi_* : N^W \simeq N^Z$ est donnée par :

$$\varphi_* = 1-(F_t)_*\,. \tag{49}$$

Ainsi, le symbole σ est la fonction scalaire $|1-(F_t)_*|^{-1}$. La section généralisée $q_*\,\varphi^*(\delta(y-F_t(x))\,dy)$ est la fonction, $t \to |1-(F_t)_*|^{-1}$. Nous pouvons alors écrire la contribution des zéros du flot comme,

$$\sum_{z\acute{e}ros}\int \frac{h(t)}{|1-(F_t)_*|}\;dt \tag{50}$$

où h est une fonction test s'évanouissant en 0.

Nous pouvons alors rassembler les contributions (47) et (50) en

$$\sum_{\gamma}\int_{I_\gamma}\frac{h(u)}{|1-(F_u)_*|}\;d^*u \tag{51}$$

où h est comme ci-dessus, I_γ est le groupe d'isotropie de l'orbite périodique γ, la mesure de Haar d^*u sur I_γ est normalisée de telle façon que le covolume I_γ soit égal à 1 et nous remplaçons à nouveau $(F_u)_*$ par sa restriction à l'espace transverse γ.

Bibliographie

[AB] M.F. Atiyah et R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I, *Annals of Math,* **86** (1967), 374-407.

[B] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, *Lecture Notes in Physics,* **263**, Springer (1986).

[Bg] A. Beurling, A closure problem related to the Riemann zeta function, *Proc. Nat. Ac. Sci.* **41** (1955), 312-314.

[B-C] J.-B. Bost et A. Connes, Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, *Selecta Mathematica, New Series* **1**, No.3 (1995), 411-457.

[BG] O. Bohigas et M. Giannoni, Chaotic motion and random matrix theories, *Lecture Notes in Physics,* **209** (1984), 1-99.

[BK] M. Berry et J. Keating, $H = qp$ and the Riemann zeros, "Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder", edited by J.P. Keating, D.E. Khmelnitskii and I.V. Lerner (Plenum Press).

[Br] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques. *Bull. Soc. Math. france.* **89** *(1961), 43-75.*

[C] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press (1994).

[Co] A. Connes, Formule de trace en Géométrie non commutative et hypothèse de Riemann, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* (1996)

[D] C. Deninger, Local L-factors of motives and regularised determinants, *Invent. Math.,* **107** (1992), 135-150.

[G] D. Goldfeld, A spectral interpretation of Weil's explicit formula, *Lecture Notes in Math.,* **1593**, Springer Verlag (1994), 135-152.

[GS] V. Guillemin et S. Sternberg, Geometric asymptotics, *Math. Surveys*, **14**, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.* (1977)

[Gu] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.,* **44**, No.3 (1977), 485-517.

[H] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, *Invent. Math.,* **101** (1990), 697-703.

[J] B. Julia, Statistical theory of numbers, *Number Theory and Physics, Springer Proceedings in Physics,* **47** (1990).

[K] M. Kac, Statistical Independence in Probability, *Analysis and Number Theory, Carus Math. Monographs* **18** (1959).

[KS] N. Katz et P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues and Monodromy, (1996) , Book, to appear.

[KS] N. Katz et P. Sarnak, Zeros of zeta functions, their spacings and spectral nature, (1997), to appear.

[LPS1] D. Slepian et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).

[LPS2] H.J. Landau et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).

[LPS3] H.J. Landau et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, *Bell Syst. Tech. J.* **41** (1962).

[M] H. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic Number Theory,* AMS (1973).

[Me] M.L. Mehta, Random matrices, Academic Press,(1991).

[O] A. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of zeta functions, *Math. Comp.* **48** (1987), 273-308.

[P] G. Pólya, Collected Papers, Cambridge, M.I.T. Press (1974).

[Pat] S. Patterson, An introduction to the theory of the Riemann zeta function, *Cambridge Studies in advanced mathematics*, **14** Cambridge University Press (1988).

[R] B. Riemann, Mathematical Werke, Dover, New York (1953).

[S] E. Seiler, Gauge Theories as a problem of constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Lecture Notes in Physics **159** Springer (1982).

[Se] A. Selberg, *Collected papers*, Springer (1989).

[W1] A. Weil, Basic Number Theory, Springer, New York (1974).

[W2] A. Weil, Fonctions zêta et distributions, *Séminaire Bourbaki*, **312**, (1966).

[W3] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres, *Izv. Mat. Nauk.,* (Ser. Mat.) **36**, 3-18.

[W4] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes,*J. Math. Soc. Japan*, **3**, (1951).

[W5] A. Weil, Sur certains groupes d'operateurs unitaires,*Acta Math.* , **111**, (1964).

[Z] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemannian zeta function, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic,* Tata, Bombay (1979), 275-301.

Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase[1]
avec brisure spontanée de symétrie en théorie des nombres[2]

Jean-Benoît BOST - Alain CONNES

Résumé Dans cet article, nous construisons un système C^*-dynamique naturel, dont la fonction de partition est la fonction ζ de Riemann. Notre construction est générale et associe à une inclusion d'anneaux (sous une condition adéquate de finitude) une inclusion de groupes discrets (les groupes $ax+b$ associés) et les algèbres de Hecke correspondantes de fonctions bi-invariantes. Cette algèbre est munie d'un groupe canonique à un paramètre d'automorphismes qui mesure le manque de normalité du sous-groupe. L'inclusion d'anneaux $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ fournit le système C^*-dynamique souhaité, qui admet la fonction ζ comme fonction de partition et le groupe de Galois $Gal(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ de $\mathbb{Q}$ comme groupe de symétrie. En outre, ce système présente une transition de phase avec brisure spontanée de symétrie à température inverse $\beta = 1$ (cf. [Bos-C]). La motivation initiale de ces résultats vient des travaux de B. Julia [J] (cf. also [Spe]).

1 Description du système et de sa transition de phase

Rappelons d'abord les notions générales de mécanique quantique statistique et des transitions de phase. Un système statistique quantique consiste en :
(α) une C^*-algèbre d'observables : A ;
(β) une évolution dans le temps $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$, qui est un groupe à un paramètre d'automorphismes de A.
Un état d'équilibre, ou état KMS_β, à température inverse β sur (A,σ_t) est un état φ sur A qui satisfait la condition KMS_β condition relativement à σ_t, c'est-à-dire tel que pour tous $x, y \in A$, il existe une fonction bornée holomorphe (continue sur la bande fermée), $F_{x,y}(z), 0 \leq Imz \leq \beta$ telle que

$$F_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$F_{x,y}(t+i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas le plus simple où $A = M_N(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices $N \times N$, tout groupe à un paramètre d'automorphismes $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de A est de la forme

$$\sigma_t(x) = e^{itH} x e^{-itH} \qquad \forall x \in A, t \in \mathbb{R}$$

pour un élément auto-adjoint $H = H^* \in A$. Alors pour tout $\beta \in [0,\infty[$, on a un unique état KMS_β pour σ_t, et il est donné par

$$\varphi_\beta(x) = \frac{\mathrm{Trace}\left(e^{-\beta H}x\right)}{\mathrm{Trace}\left(e^{-\beta H}\right)} \qquad \forall x \in A.$$

Noter ici que la normalisation additive de H peut être fixée en imposant que $H \geq 0$ et $0 \in \mathrm{Sp}H$. Alors le facteur de normalisation $\mathrm{Trace}(\mathrm{e}^{-\beta \mathrm{H}})$ est appelé la fonction de partition de (A,σ_t). La formule suivante est vérifiée :

$$\mathrm{Log\ Trace}\left(e^{-\beta H}\right) = \sup_{\varphi}(S(\varphi) - \beta\varphi(H))$$

[1] J'ai traduit ce texte et cette traduction comporte sûrement des erreurs qui n'engagent que moi.
[2] Selecta Mathematica, New Serie, Vol.1, No.3 (1995), 1995, Birkhäuser Verlag, Basel.

où φ varie sur tous les états de A et $S(\varphi)$ est l'entropie de l'état

$$S(\varphi) = -\text{Trace}(\rho \text{Log} \rho) \qquad \text{pour} \qquad \varphi = \text{Trace}(\rho).$$

Plus généralement, si (A, σ_t) est un système C^*-dynamique quelconque et si φ est un état KMS_β tel que la fermeture faible de A est un facteur de type I, alors les conditions ci-dessus s'appliquent et l'énergie libre $S(\varphi) - \beta\varphi(H)$ est bien définie.

Dans une situation un peu plus contrainte que celle où $A = M_N(\mathbb{C})$, notamment pour les *systèmes sans interaction*, il est encore vrai que pour n'importe quel $\beta \in [0, \infty[$, il existe un unique état KMS_β. Plus précisément, on a comme conséquence immédiate la :

PROPOSITION 1. *Soit $A = \otimes_{\nu \in I} A_\nu$, un produit tensoriel infini d'algèbres de matrices $A_\nu = M_{n_\nu}(\mathbb{C})$, et $\sigma_t = \otimes_{\nu \in I} \sigma_t^\nu$ un produit d'évolutions temporelles. Alors pour tout $\beta \geq 0$, il existe un unique état KMS_β φ_β pour (A, σ_t), et on a $\varphi_\beta = \otimes_\nu \varphi_{\beta,\nu}$, où $\varphi_{\beta,\nu}$ est l'unique état KMS_β pour (A_ν, σ_t^ν).*

Pour les systèmes intéressants *avec interaction*, on s'attend en général à ce que pour les *hautes* températures, i.e. pour les β petits, le désordre prédominera de telle façon qu'il existera seulement un état KMS_β. Pour les températures suffisamment faibles, un certain ordre devrait apparaître qui autorisera l'existence de phases thermodynamiques variées, i.e., d'états KMS_β variés. C'est un fait important très général de la formulation C^*-algébrique de la mécanique quantique statistique qui fait que, pour un certain β donné, tout état KMS_β se décompose *de manière unique* comme une superposition d'états KMS_β *extrêmes* :

PROPOSITION 2. ([Br-R] [H]) *Soit (A, σ_t) un système C^*-dynamique et $\beta \in [0, \infty[$. Alors l'espace des états KMS_β est un simplexe convexe compact de Choquet. Les points extrêmes sont les facteurs d'états KMS_β et, quand ils sont de type I, ils cèdent une énergie libre bien définie.*

Pour un exposé détaillé du lien entre les états KMS_β extrêmes et les phases thermodynamiques, nous renvoyons le lecteur à [H].

Comme exemple simple illustrant la coexistence des phases aux températures basses, on peut penser au diagramme des phases de l'eau et de la vapeur ou mieux aux matériaux ferromagnétiques. Dans ce dernier exemple, quand la température T est supérieure à la température *critique* T_c, de l'ordre de $10^3 K$, le désordre domine, alors que pour $T < T_c$, les moments des spins individuels ont tendance à s'aligner les uns avec les autres, ce qui dans le cas classique à 3 dimensions amène un ensemble de phases thermodynamiques homogènes paramétré par la sphère en 2 dimensions des directions dans l'espace à 3 dimensions.

Cet exemple sert à illustrer le phénomène de *brisure spontanée de symétrie* : le groupe $SO(3)$ des rotations dans $\mathbb{R}^3$ est le groupe de symétrie du système dynamique avec lequel on commence et, pour les grandes valeurs de $T, T > T_c$, l'état d'équilibre est unique et par conséquent invariant par rotation. Pour les petites valeurs de T cependant, $T < T_c$, le groupe $SO(3)$ agit de façon non triviale sur l'ensemble des phases thermodynamiques et le choix d'un état d'équilibre brise la symétrie.

La formulation C^*-algébrique de cela est évidente. On a un groupe (compact) G d'automorphismes de la C^*-algèbre A qui commute avec l'évolution temporelle

$$\alpha_g \in \mathrm{Aut}A, \qquad \forall g \in G, \qquad \alpha_g \sigma_t = \sigma_t \alpha_g \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Un tel groupe agit de façon évidente sur l'espace compact convexe des états KMS_β et par conséquent sur ses points extrêmes.

Nous allons maintenant décrire (la motivation précise sera expliquée ci-dessous) un système C^*-dynamique intimement relié à la distribution des nombres premiers et exhibant le comportement ci-dessus de brisure spontanée de symétrie.

La C^*-algèbre A est une *algèbre de Hecke*, qui contient l'algèbre des opérateurs de Hecke usuels de la théorie des nombres, i.e., ceux qui sont reliés aux correspondances de Hecke pour les treillis dans $\mathbb{C}$ ([Sh], [Ser$_1$]). Cette dernière algèbre est commutative et c'est l'algèbre de composition des classes doubles

$$\gamma \in GL(2,\mathbb{Z})\backslash GL(2,\mathbb{Q})/GL(2,\mathbb{Z}).$$

Plus généralement, étant donné un groupe discret Γ et un sous-groupe Γ_0 qui est *presque normal*, c'est-à-dire qui satisfait la condition que

"les orbites de Γ_0 agissant à gauche sur Γ/Γ_0 sont *finies*",

on définit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ comme l'algèbre de convolution de fonctions ($\mathbb{C}$-valuées pour notre objectif) à support fini sur $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$. Plus spécifiquement, étant données 2 telles fonctions $f, f' \in \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$, leur convolution est

$$(f * f')(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_0\backslash\Gamma} f(\gamma\gamma_1^{-1}) f'(\gamma_1) \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Dans cette formule, f et f' sont vues comme des fonctions Γ_0-bi-invariantes sur Γ et à support fini dans $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$.

Pour compléter $\mathcal{H}$ en une C^*-algèbre, on la ferme en norme dans la *représentation régulière* de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$ (cf. [Bi]) :

Proposition 3. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal du groupe discret Γ. Alors la formule suivante définit une représentation (involutive) λ de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$:

$$(\lambda(f)\xi)(\gamma) = \sum_{\Gamma_0\backslash\Gamma} f(\gamma\gamma_1^{-1})\xi(\gamma_1) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0\backslash\Gamma, \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

On vérifie que $\lambda(f)$ est bornée pour tout $f \in \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$. L'involution sur $\mathcal{H}$ telle que

$$\lambda(f^*) = \lambda(f)^* \qquad \forall f \in \mathcal{H}$$

est donnée par l'égalité suivante :

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0.$$

Alors, prenons A la C^*-algèbre fermée en norme de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$. Une bonne notation pour cette algèbre, compatible avec le cas des groupes discrets est

$$\overline{\mathcal{H}}(\Gamma,\Gamma_0) = C_r^*(\Gamma,\Gamma_0).$$

Définissons maintenant le groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \mathrm{AutA}$. Nous avons d'abord besoin d'introduire les notations. Puisque toute Γ_0 orbite sur Γ/Γ_0 est finie, nous noterons, pour $\gamma \in \Gamma$

$$L(\gamma) = \text{cardinalité de l'image de } \Gamma_0\gamma\Gamma_0 \textit{ dans } \Gamma/\Gamma_0$$
$$R(\gamma) = \text{cardinalité de l'image de } \Gamma_0\gamma\Gamma_0 \textit{ dans } \Gamma_0\backslash\Gamma.$$

Alors, par construction, $L(\gamma) \in \mathbb{N}^*$, $R(\gamma) \in \mathbb{N}^*$, $R(\gamma) = L(\gamma^{-1})$, L et R sont toutes deux des fonctions Γ_0-bi-invariantes.

Proposition 4. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal du groupe discret Γ.
Il existe un seul groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathrm{C_r^*}(\Gamma,\Gamma_0))$ tel que

$$(\sigma_t(f))(\gamma) = \left(\frac{L(\gamma)}{R(\gamma)}\right)^{-it} f(\gamma) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$$

En fait, comme nous le verrons plus tard, σ_{-t} est la réduction du groupe modulaire d'automorphismes σ_t^φ pour l'état sur $M = \lambda(\mathcal{H})''$ donnés par le vecteur unité correspondant à la classe $\Gamma_0 \in \Gamma_0\backslash\Gamma$.
Considérons maintenant l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ pour les groupes :

$$\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \qquad \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$$

où P est le groupe des matrices 2×2 défini par $P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}; aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \right\}$ et où le $+$ indique que nous nous restreignons aux cas pour lesquels $a > 0$. On vérifie que $P_{\mathbb{Z}}^+$ est presque normal dans $P_{\mathbb{Q}}^+$ (cf. Lemme 13).
Nous allons maintenant décrire la transition de phase avec brisure spontanée de symétrie pour le système dynamique correspondant à $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$. Notons par ψ_β la fonction suivante sur le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Etant donné $n = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, avec a premier à $b > 0$, soit

$$b = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{k_p}$$

la décomposition en facteurs premiers de b et posons

$$\psi_\beta(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}, k_p\neq 0} p^{-k_p\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}.$$

L'inclusion du sous-groupe unipotent

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; n \in \mathbb{Q} \right\} \subset P_{\mathbb{Q}}^+$$

definit un plongement $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \subset \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$ et des morphismes injectifs d'algèbres involutives

$$\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$$

et

$$C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_r^*(\Gamma,\Gamma_0).$$

Le résultat principal de cet article est le

THÉORÈME 5. *Soit (A, σ_t) le système C^*-dynamique associé au sous-groupe presque normal $P_{\mathbb{Z}}^+$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$. Alors*

(a) Pour $0 < \beta \leq 1$, il existe un unique état KMS_β φ_β sur (A, σ_t). Sa restriction à $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ est donnée par la fonction ci-dessus de type positif ψ_β sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Chaque φ_β est un facteur d'états et le facteur associé est le facteur hyperfini de type III_1, R_∞.

(b) Pour $\beta > 1$ les états KMS_β sur (A, σ_t) forment un simplexe dont les points extrêmes $\varphi_{\beta,\chi}$ sont paramétrés par les plongements complexes $\chi : \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}} \to \mathbb{C}$ du sous-corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ de $\mathbb{C}$ engendré par les racines de l'unité et dont les restrictions à $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sont données par la formule suivante :

$$\varphi_{\beta,\chi}(\gamma) = \zeta(\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \chi(\gamma)^n$$

Ces états sont des facteurs d'états de type I_∞.

(c) La fonction de partition est la fonction zêta de Riemann.

Le facteur de normalisation est l'inverse de la fonction ζ de Riemann évaluée en β. En d'autres termes, la température critique est ici $T_c = 1$ et à basse température ($\beta > 1$), les phases du système sont paramétrées par tous les plongements possibles de $K = \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ dans le corps des nombres complexes.

Comme nous le verrons ci-dessous, le groupe de Galois $G = Gal(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ agit naturellement comme un groupe d'automorphismes de $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ qui commute avec l'évolution temporelle $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$, et la brisure spontanée de symétrie a lieu pour $\beta > 1$.

Avant que nous ne commencions la démonstration du théorème 5, nous allons expliquer comment le système C^*-dynamique ci-dessus est relié à la distribution des nombres premiers.

2 Seconde quantification des bosons et nombres premiers comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$

E. Nelson a dit que la première quantification est un mystère tandis que la seconde est un *foncteur*. Dans le cas des bosons, ce foncteur $\mathbf{S}$, de la catégorie des espaces de Hilbert vers elle-même, assigne à chaque espace de Hilbert $\mathcal{H}$ un nouvel espace de Hilbert $\mathbf{S}\mathcal{H}$ donné par

$$\mathbf{S}\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{H}$$

où $S^n\mathcal{H}$ est la $n-$ième puissance symétrique de $\mathcal{H}$ munie du produit intérieur suivant :

$$\langle \xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n \rangle = \sum_\sigma \prod_1^n \langle \xi_i, \eta_{\sigma(i)} \rangle \qquad \forall \xi_j, \eta_j \in \mathcal{H}$$

(voir par exemple [G]). Etant donné un opérateur T dans $\mathcal{H}$ (plus généralement $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$), l'opérateur $\mathbf{S}T$ dans $\mathbf{S}\mathcal{H}$ est donné par

$$(\mathbf{S}T)(\xi_1 \dots \xi_n) = (T\xi_1)(T\xi_2) \dots (T\xi_n) \qquad \forall \xi_i \in \mathcal{H}.$$

Même si T est borné, $\mathbf{S}T$ n'est pas borné en général mais si T est auto-adjoint (non-borné), il en est de même de $\mathbf{S}T$. Aussi, nous travaillerons avec de tels opérateurs. On a la formule suivante :

$$\text{Trace}(\mathbf{S}T) = \frac{1}{\det(1-T)} \qquad (*)$$

qui fait sens si $\|T\| < 1$ et $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

Le problème que nous allons maintenant étudier est le suivant : trouver une caractérisation simple des opérateurs auto-adjoints T dans $\mathcal{H}$ dont le spectre est le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ formé de tous les nombres premiers, chacun avec une multiplicité de 1 :

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\} \subset \mathbb{R}.$$

Le problème correspondant pour l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ des entiers naturels, ou pour $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, est plus facile, et a été résolu dans l'article de Dirac [Dir] qui a inauguré la théorie quantique des champs. Dans ce cas, la solution est simplement qu'il existe un opérateur a tel que

$$aa^* - a^*a = 1, \qquad a^*a = T.$$

(Pour $\mathbb{N}^*$, il est nécessaire que aa^* soit égal à T). Etablissons maintenant le résultat pour le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$:

LEMME 6. *Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; alors (en comptant les multiplicités)*

$$\text{Spectrum T} = \mathcal{P} \iff \text{Spectrum } \mathbf{S}\text{T} = \mathbb{N}^*.$$

Preuve. Assumons d'abord que Spectre $\mathbf{S}T = \mathbb{N}^*$. Alors, comme généralement Spec $T \subset$ Spec $\mathbf{S}T$, (en utilisant l'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathbf{S}\mathcal{H}$), on voit que $\sum = \text{Spec}(T) \subset \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P} \subset \sum$. Effectivement, prenons $p \in \mathcal{P}$ et qui n'est pas dans $\sum$. Alors, puisque $\sum \subset \mathbb{N}^*$, on a $p \notin \sum^n$ pour tout n (avec $\sum^n = \{k_1 k_2 \dots k_n;\ k_j \in \sum\}$). Cela montre que $p \notin \text{Spec}(\mathbf{S}T) = \cup \sum^n$, d'où une contradiction. Ainsi $\mathcal{P} \subset \sum$. Si $k \in \sum \backslash \mathcal{P}$, alors puisque $k \in \mathcal{P}^n$ pour un certain $n > 1$, cela signifierait que k n'est pas une valeur propre simple pour $\mathbf{S}T$. Ainsi $\mathcal{P} = \sum$. L'inverse est évident et découle du théorème d'Euclide d'unicité de la factorisation, mais fixons les notations correspondantes : appelons $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathcal{P})$ l'espace de Hilbert de base $(\varepsilon_p)_{p\in\mathcal{P}}$, et identifions-le au sous-espace à une particule de $\mathbf{S}\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathbb{N}^*)$, l'espace de Hilbert des séquences de carré intégrable de nombres complexes, avec la base canonique $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note T l'opérateur :

$$T : \ell^2(\mathcal{P}) \to \ell^2(\mathcal{P})\ ;\ T\varepsilon_p = p\varepsilon_p \qquad \forall p \in \mathcal{P}$$

et $\mathbf{S}T$ l'opérateur correspondant

$$\mathbf{S}T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*)\ ;\ (\mathbf{S}T)\varepsilon_n = n\varepsilon_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $H = \log(\mathbf{S}T)$. C'est le générateur du groupe unitaire à un paramètre $U_t = \exp(itH) = T^{it}$, dont le rôle est rendu clair par le cas particulier suivant de la formule (*) qui est la formule du produit eulérien pour la fonction ζ de Riemann :

$$\text{Pour Re } s > 1\ ;\zeta(s) = \text{Trace}(\mathbf{S}T)^s = \frac{1}{\det(1-T^s)}.$$

La signification du Lemme 6 est que le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ a une définition agréable à condition qu'on soit prêt à utiliser le formalisme de *la théorie quantique des champs de bosons*. Ce formalisme contient *l'algèbre* des opérateurs de création et destruction, respectivement $a^*(\xi)$ et $a(\eta)$, pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, donnés par

$$\begin{aligned} a^*(\xi)\xi_1 \dots \xi_n &= \xi\xi_1 \dots \xi_n \qquad \forall \xi_j \in \mathcal{H} \\ a(\eta) &= (a^*(\eta))^*. \end{aligned}$$

Le formalisme inclut également l'*évolution temporelle*, selon le schéma d'Heisenberg, donné par

$$\sigma_t(x) = U_t \; x \; U_t^* = e^{itH} \; x \; e^{-itH}$$

Dans notre cas, la C^*-algèbre correspondante dans $\mathbf{S}\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ et l'évolution temporelle sont données par la :

Proposition 7.

(a) Pour tout $p \in \mathcal{P}$, soit μ_p l'isométrie dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ donnée par la décomposition polaire de l'opérateur de création associé au vecteur unité $\varepsilon_p \in \mathcal{H}$. La C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les μ_p's est la même que celle engendrée par les isométries $\mu_n, n \in \mathbb{N}^*$, qui est définie par

$$\mu_n \varepsilon_k = \varepsilon_{kn} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

(b) Cette C^*-algèbre est le produit tensoriel infini

$$C^*(\mathbb{N}^*) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \tau_p$$

où chaque τ_p est la C^*-algèbre engendrée par μ_p et est la C^*-algèbre de Toeplitz.

(c) L'égalité $\sigma_t(x) = e^{itH} \; x \; e^{-itH}, \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*), t \in \mathbb{R}$, où $H = \log(\mathbf{S}T)$, définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $C^*(\mathbb{N}^*)$ donné comme

$$\sigma_t = \otimes_{p \in \mathcal{P}} \sigma_{t,p} \; ; \sigma_{t,p}(\mu_p) = p^{it} \mu_p \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Preuve.
(a) Par construction, μ_p est le décalage d'un côté dans l'espace de Hilbert $S\mathbb{C}\varepsilon_p$ tensorisé par l'identité dans chacun des espaces de Hilbert $S\mathbb{C}\varepsilon_q, q \neq p$ dans la décomposition

$$S\mathcal{H} = \bigotimes_{q \in \mathcal{P}} S\mathbb{C}\varepsilon_q.$$

Par rapport aux bases (ε_n) de $S\mathcal{H}$, on a alors

$$\mu_p \varepsilon_n = \varepsilon_{pn} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de telle façon que (a) en découle.

(b) On rappelle que la C^*-algèbre de Toeplitz τ est la C^*-algèbre définie par un générateur unique u satisfaisant la relation $u^*u = 1$. Si u est une quelconque isométrie non-unitaire dans un espace de Hilbert (séparable), la plus petite C^*-algèbre contenant u est isomorphe à τ. Cette C^*-algèbre est nucléaire de telle façon que les produits tensoriels finis $\bigotimes_{p \leq n} \tau_p$, sont définis de manière non-ambigue.

La C^*-algèbre $\bigotimes_{p\in\mathcal{P}} \tau_p$ est leur limite inductive. Maintenant pour chaque p, l'isométrie μ_p engendre τ_p dans $S\mathbb{C}\varepsilon_p$ et puisque les produits tensoriels finis $\bigotimes_{p\leq n} \tau_p$ sont représentés fidèlement dans $\mathcal{H}$, on obtient (b).

(c) découle d'un calcul direct.

Le système C^*-dynamique ainsi obtenu n'est pas très intéressant parce qu'il est sans interaction (voir Proposition 8 (a)). Néanmoins, les uniques états KMS_β associés seront utiles plus tard et sont donnés par le corollaire suivant de la Proposition 1 et par la classification d'Araki-Woods des ITPFI.

Proposition 8.

(a) *Pour tout $\beta > 0$, il existe un unique état KMS_β sur $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$. C'est le produit tensoriel infini*

$$\varphi_\beta = \otimes_{p\in\mathcal{P}}\varphi_{\beta,p}$$

où $\varphi_{\beta,p}$ est l'unique état KMS_β sur $(\tau_p, \sigma_{t,p})$ pour $\sigma_{\beta,p}$. La liste des valeurs propres de $\varphi_{\beta,p}$ est

$$\{(1-p^{-\beta})p^{-n\beta}\ ; n\in\mathbb{N}\}.$$

(b) *Pour $\beta > 1$, l'état φ_β est de type I_∞ et est donné par*

$$\varphi_\beta(x) = \zeta(\beta)^{-1}\mathrm{Trace}(e^{-\beta H}x) \qquad \forall x\in C^*(\mathbb{N}^*).$$

(c) *Pour $\beta = 1$, l'état φ_β est un facteur d'états de type III_1 donné par*

$$\varphi_\beta(x) = \mathrm{Trace}_\omega(e^{-H}x) \qquad \forall x\in C^*(\mathbb{N}^*)$$

où Trace_ω est la trace de Dixmier.

(d) *Pour $0 < \beta \leq 1$, φ_β est un facteur d'états de type III_1, et le facteur associé est le facteur R_∞ d'Araki-Woods.*

L'assertion (d) pour $\beta = 1$ est due à B. Blackadar ([Bl]). Nous renvoyons le lecteur à [Co] IV.2 pour la définition de la trace de Dixmier, dont les propriétés générales rendent clair que l'égalité (c) definit un état KMS_1.

Preuve. (a) Montrons d'abord qu'il existe un unique état KMS_β sur τ_p pour le groupe $\sigma_{t,p}$. On définit τ_p comme la C^*-algèbre dans $\ell^2(\mathbb{N})$ engendrée par le décalage d'un seul côté S, alors que $\sigma_{t,p}(S) = p^{it}S$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes. D'abord soit $\varphi_{\beta,p}$ la restriction à τ_p de l'état sur $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ donnée par

$$\varphi(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_{n,n}\nu(n)$$

où $\nu(n) = p^{-n\beta}\left(\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m\beta}\right)^{-1}$.
On vérifie que $\varphi_{\beta,p}$ est un état KMS_β sur τ_p. Inversement, soit φ un état KMS_β sur τ_p. Alors la condition d'état KMS_β montre que φ s'évanouit sur tout vecteur propre $A\in\tau_p$,

$$\sigma_{t,p}(A) = \lambda^{it}A \qquad \forall t\in\mathbb{R},\ \text{à condition que } \lambda\neq 1.$$

Cela montre aussi que $\varphi(SS^*) = \varphi(S^*\ \sigma_{-i\beta}(S)) = p^{-\beta}\varphi(S^*S) = p^{-\beta}$ de telle manière que $\varphi(1 - SS^*) = 1 - p^{-\beta}$. Plus généralement, on a pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varphi(S^k S^{*\ell}) &= 0 \quad \text{si} \quad k \neq \ell \\ &= p^{-k\beta} \quad \text{si} \quad k = \ell. \end{aligned}$$

Cela montre l'unicité de $\varphi = \varphi_{\beta,p}$ sur l'idéal $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts, $\mathcal{K} \subset \tau_p$.
Ainsi, la différence $\psi = \varphi - \varphi_{\beta,p}$ s'évanouit sur $\mathcal{K}$ et est une forme linéaire continue sur la C^*-algèbre quotient $\tau_p/\mathcal{K} = C(S^1)$. Nous avons vu que $\varphi(S^n) = \varphi_{\beta,p}(S^n) = 0$ pour tout $n > 0$ et similairement pour $(S^*)^n$ de telle manière que $\psi = 0$ et $\varphi = \varphi_{\beta,p}$.
L'unicité de φ_β découle alors d'un argument général pour les produits tensoriels : Soit (A, σ_t^A) et (B, σ_t^B) des systèmes C^*-dynamiques et φ un état KMS_β sur $(A \otimes B, \sigma_t^A \otimes \sigma_t^B)$. Alors pour tout $b \in B$, la fonctionnelle sur A

$$\varphi_b(a) = \varphi(a \otimes b)$$

est KMS_β sur A. Par conséquent, pour tout $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_t^A(x)y \otimes b) &= \varphi(\sigma_t^{A\otimes B}(x \otimes 1)(y \otimes b)) \\ \varphi(y\sigma_t^A(x) \otimes b) &= \varphi(y \otimes b)\sigma_t^{A\otimes B}(x \otimes 1)). \end{aligned}$$

(b) On utilise la finitude de $\mathrm{Trace}(e^{-\beta H})$ pour $\beta > 1$.

(c) Par construction, on a un produit tensoriel infini de facteurs de type I avec comme liste de valeurs propres

$$\lambda_{p,n} = p^{-n\beta}(1 - p^{-\beta})\ ;$$

et ainsi, l'assertion (c) découle de [A-W].

(d) On vérifie directement la condition KMS_1, et les mêmes arguments que ceux utilisés pour (c) montrent que φ_1 est de type III_1.

3 Produits d'arbres et algèbres de Hecke non-commutatives

Dans cette section, nous allons relier le système C^*-dynamique $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ de la section 2 avec des notions de la théorie basique des nombres [We_2] et obtenir le système dynamique de Hecke du Théorème 5.

Soit P le groupe $ax + b$, i.e. le groupe des matrices triangulaires 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, avec a inversible. Nous le voyons comme un groupe algébrique sur $\mathbb{Z}$, i.e. comme un foncteur $A \to P_A$ des anneaux commutatifs vers les groupes. Il joue un rôle important dans la classification élémentaire des corps localement compacts (commutatifs et non discrets) (cf. [We_2]). En effet, étant donné un tel corps K, alors le groupe $G = P_K$ est un groupe *localement compact*, et de ce fait, il a un module

$$\delta : G \to \mathbb{R}_+^*$$

défini par le manque d'invariance de la mesure de Haar à gauche dg sur G par les translations à droite :

$$d(gk) = \delta(k)dg \qquad \forall \in G \tag{1}$$

(ou, de manière équivalente $d(g)^{-1} = \delta(g)^{-1}dg$ comme mesures sur G).

Ce module $\delta : P_K \to \mathbb{R}_+^*$ vaut 1 sur le groupe additif et sa restriction au groupe multiplicatif (étendu par 0 sur $K \backslash K^*$) amène une application multiplicative propre continue

$$\mathrm{mod}_K : K = \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

En fait, si dx désigne la mesure de Haar sur le groupe additif (localement compact) K, on a

$$d(ax) = \mathrm{mod}_K(a)dx \qquad \forall a \in K^*.$$

De plus, les ensembles ouverts $\{k \in K; \mathrm{mod}_K(k) < \varepsilon\}$ forment une base de voisinages de 0. L'image de δ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$ et excepté dans le cas de corps archimédiens $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ce sous-groupe fermé est discret et égal à $\lambda^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$ dont l'inverse $q = \lambda^{-1}$ est appelé le *module* de K. La fonction sur $K \times K$ $d(x,y) := \mathrm{mod}_K(x-y)$ est alors une distance ultramétrique qui donne en retour la topologie de K ([We$_2$]). En d'autres mots, on a la :

Proposition 9. *(cf. [We$_2$]) Soit K un corps localement compact non-discret commutatif, $K \neq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors il existe un nombre premier p tel que $\mathrm{mod}_K(p) < 1$. Appelons R, R^* et P les sous-ensembles de K définis respectivement par*

$$\begin{aligned} R &= \{x \in K; \mathrm{mod}_K(x) \leq 1\}, \\ R' &= \{x \in K; \mathrm{mod}_K(x) = 1\}, \\ J &= \{x \in K; \mathrm{mod}_K(x) < 1\}. \end{aligned}$$

Alors R est le sous-anneau compact maximal de K; R^* est le groupe des éléments inversibles de R ; J est l'unique idéal maximal de R, et il existe $\pi \in J$ tel que $J = \pi R = R\pi$. La topologie sur le groupe topologique K est l'unique topologie (ultramétrique) telle que les idéaux $\pi^n R$ forment une base de voisinages de 0. De plus, le corps de restes $k = R/J$ est un corps fini de caractéristique p ; si q est le nombre de ses éléments, l'image de K^* dans R_+^* sous mod_K est le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par q.

Etant donné $x \in K$, l'entier $v(x)$ tel que $\mathrm{mod}_K(x) = q^{-v(x)}$ est appelé la *valuation* de x.

Comme exemple basique, le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques est défini (étant donné p un nombre premier quelconque), comme la complétion du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels pour la fonction de distance :

$$d(x,y) = |x-y|_p \tag{3}$$

où pour $x \in \mathbb{Q}, x = p^n \frac{a}{b}$ (avec n, a, b des nombres entiers et a, b premiers à p), on pose

$$|x|_p = p^{-n} \tag{4}$$

Le sous-anneau maximal R de $K = \mathbb{Q}_p$ est l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques et le corps résiduel $k = R/J$ est le corps fini $\mathbb{F}_p$.

De cette manière, on obtient, avec l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, toutes les inclusions $\mathbb{Q} \subset K$ du corps des nombres rationnels comme un sous-corps dense d'un corps local K. De telles inclusions (ou plutôt, en général, les classes d'équivalence des complétions) sont appelées *places* et pour distinguer les places réelles $Q \subset \mathbb{R}$ des autres, ces dernières sont appelées *places finies*.

En mettant ensemble les inclusions de $\mathbb{Q}$ dans ses complétions $\mathbb{Q}_v = K$ paramétrisées par les places de $\mathbb{Q}$, on obtient une seule inclusion de $\mathbb{Q}$ dans l'anneau commutatif *localement compact* des *adèles* qui est le produit restreint des corps $\mathbb{Q}_v$. Plus spécifiquement, cet anneau est le produit $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$ où l'anneau $\mathcal{A}$ des adèles *finies* est obtenu comme suit :

(a) Les éléments x de $\mathcal{A}$ sont les familles arbitraires $(x_p)_{p\in\mathcal{P}}$ avec $x_p \in \mathbb{Q}_p$, telles que $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour tout p sauf pour un nombre fini.

(b) $(x+y)_p = x_p + y_p \,; (xy)_p = x_p y_p$ définit l'addition et le produit dans $\mathcal{A}$.

(c) Finalement, $\mathcal{A}$ a l'unique topologie d'un anneau localement compact tel que le sous-anneau

$$\mathcal{R} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p,$$

est ouvert et fermé et hérite de la topologie de produit compact.

Nous allons maintenant relier le système C^*-dynamique $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ de la section 2 avec l'anneau localement compact $\mathcal{A}$ des adèles finies.

Nous avons seulement besoin de rappeler que, un groupe G quelconque localement compact étant donné, avec une fonction modulaire $\delta : G \to \mathbb{R}^*_+$, on a un groupe naturel à un paramètre d'automorphismes σ_t de $C^*(G)$ donné par la formule suivante valide sur $L^1(G)$:

$$(\sigma_t(f))(g) = \delta(g)^{-it} f(g) \qquad \forall g \in G, t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Ce groupe d'automorphismes définit aussi un groupe d'automorphismes de la C^*-algèbre réduite $C^*_r(G)$, et le groupe σ_{-t} est le groupe modulaire d'automorphismes du poids de Plancherel sur $C^*(G)$.

Proposition 10. *Soit $\mathcal{A}$ l'anneau des adèles finies sur $\mathbb{Q}$, et $\mathcal{R}$ son sous-anneau compact maximal (ouvert). Soit G le groupe localement compact $G = P_{\mathcal{A}}$, et $e \in C^*(G)$ la fonction caractéristique du sous-groupe compact et ouvert $P_{\mathcal{R}} \in P_{\mathcal{A}}$. Alors :*

(1) On a $e = e^* = e^2$, et la C^*-algèbre réduite $C^*(G)_e = \{x \in C^*(G) \,; ex = xe = x\}$ est canoniquement isomorphe à la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ de la section 2.

(2) On a $\sigma_t(e) = e \quad \forall t \in \mathbb{R}$, et la restriction de σ_t à la C^*-algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*)$ est l'évolution temporelle de la section 2.

Nous pensons à la fonction caractéristique de $P_{\mathcal{R}}$ comme à un élément de $L^1(G, dg) \subset C^*(G)$, avec dg l'unique mesure de Haar à gauche qui attribue la mesure 1 à $P_{\mathcal{R}}$. Le groupe G est résoluble et par conséquent moyennable de telle manière qu'il n'y a pas de différence entre $C^*(G)$ et la C^*-algèbre réduite $C^*_r(G)$.

La preuve de la Proposition 10 se réduit immédiatement à une assertion *locale*, notamment : si $K = \mathbb{Q}_p$ et $R \subset K$ est le sous-anneau compact maximal, le système C^*-dynamique $(C^*(P_K), \sigma_t)$ donné par (5), réduit par la projection e_p définie comme la fonction caractéristique de P_R, est isomorphe à la C^*-algèbre de Toeplitz τ_p, avec l'évolution temporelle $\sigma_{t,p}$ de la Proposition 7 (c).

Pour vérifier cela, on utilise les isomorphismes

$$C^*(P_K) \cong C^*(K) \rtimes K^* \cong C_0(K) \rtimes K^*$$

donnés par l'identification du groupe additif K avec son dual de Pontrjagin (cf. [We$_2$] ; nous utilisons dans la suite les mêmes normalisations pour la mesure de Haar et la transformation de Fourier sur K que dans *loc.cit.*, notamment la mesure de Haar de $R = \mathbb{Z}_p$ vaut 1, et l'identification de K à son dual de Pontrjagin est telle que $R^\perp = R$). Alors, à e_p correspond l'élément du produit croisé donné par $\int_{R^*} 1_R U_g dg$. La C^*-algèbre réduite $C^*(PK)_{e_p}$ est alors engendrée par l'isométrie $\mu_p, \mu_p \in C^*(P_{\mathbb{Q}_p})_{e_p}$, donnée la par la fonction L^1 suivante :

$$\mu_p(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}) = 1 \text{ si } b \in \mathbb{R}, \ \text{val}(a) = 1, \text{ et est égal à } 0 \text{ sinon.} \tag{6}$$

Vérifions que μ_p est une isométrie, i.e. que $\mu_p^* \mu_p = e_p$. La mesure de Haar à gauche sur P_K est donnée par $d\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = dbd^*a$ où d^*a est la mesure de Haar multiplicative normalisée de telle manière que $\int_{R^*} d^*a = 1$. Le module δ du groupe localement compact P_K est donné par $\delta\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = |a|$. L'adjoint μ_p^* de μ_p est donné par la fonction

$$\mu_p^*(g) = \overline{\mu_p(g^{-1})}\delta(g^{-1}). \tag{7}$$

Ainsi, la convolution $\mu_p^* * \mu_p$ est donnée par l'intégrale

$$(\mu_p^* * \mu_p)(g) = \int_{P_K} \overline{\mu_p(g_1)}\mu_p(g_1 g) \tag{8}$$

Celle-ci s'évanouit à moins que $g \in P_R$, ce que l'on peut voir en utilisant $g = g_1^{-1} g_2$ pour $\mu_p(g_i) = 1$. Avec $g_i = \begin{bmatrix} 1 & b_i \\ 0 & a_i \end{bmatrix}$, on obtient $g_1^{-1} g_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1^{-1} b_1 \\ 0 & a_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1 \\ 0 & a_1^{-1} a_2 \end{bmatrix} \in P_R$. De plus, l'intégrale $\int_{P_K} \mu_P(g)$ est égale à 1 de telle manière qu'on obtient $\mu_p^* * \mu_p = e_p$.

On a $\sigma_t(\mu_p)(g) = 0$ à moins que $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \text{val}(a) = 1, b \in R$, et pour de tels g, on a $\sigma_t(\mu_p)(g) = \delta(g)^{-it}\mu_p(g) = |a|^{-it}\mu_p(g) = p^{it}\mu_p(g)$. Ainsi $\sigma_t(\mu_p = p^{it}\mu_p$.

Nous pouvons aussi écrire l'état $\varphi_{\beta,p}$ sur $C^*(P_K)_{e_p}$ en termes de fonctions bi-invariantes. On obtient l'identité suivante pour tout $f \in C^*(P_K)_{e_p}$:

$$\varphi_{\beta,p}(f) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \left(\sum_{k>0} p^{k(1-\beta)} f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)(1 - p^{\beta-1}) \tag{9}$$

(Observer que les éléments de $C^*(P_K)$ peuvent être identifiés à des fonctions P_R-bi-invariantes dans $L^2(P_K)$, et par conséquent à des fonctions localement constantes sur P_K ; en particulier, elles ont des valeurs bien définies sur les points de P_K). Selon la Proposition 8 (a) et sa preuve, pour démontrer (9), on a seulement besoin de vérifier que la fonctionnelle linéaire sur $C_c(P_K)_{e_p}$, définie par le côté droit de (9), satisfait la condition KMS$_\beta$; cela découle d'un calcul évident.

Le système C^*-dynamique $(C^*(P_\mathcal{A}), \sigma_t)$ de la Proposition 10 est sans interaction, exactement comme $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ (Proposition 8), et il y a l'exacte analogue de la Proposition 8, qui établit l'existence

et l'unicité (à un facteur d'échelle près) des *poids* KMS_β sur le système ci-dessus. On a besoin d'utiliser les poids car on travaille avec des C^*-algèbres non unitaires. D'un point de vue technique, de tels poids doivent être semi-continus et semi-finis (pour la topologie de la norme) (cf. [Com]). C'est cependant instructif de travailler sur la formule explicite pour ces poids KMS_β. En utilisant l'isomorphisme naturel du dual de Pontrjagin $\widehat{\mathcal{A}}$ du groupe additif $\mathcal{A}$ à lui-même (cf. [We_2]), on obtient un isomorphisme

$$C^*(P_{\mathcal{A}}) = C_0(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{A}^* \tag{10}$$

où le groupe multiplicatif $\mathcal{A}^*$ des idèles finies agit par des homothéties dans l'espace localement compact $\mathcal{A}$. Le poids KMS_β sur $C^*(P_{\mathcal{A}}), \sigma_t$ est alors le poids dual de la mesure suivante μ_β sur $\mathcal{A}$:

$$\mu_\beta(f) = \zeta(\beta)^{-1} \int_{\mathcal{A}^*} |j|^\beta f(j) d^*j \tag{11}$$

Ici d^*j est la mesure de Haar measure sur le groupe multiplicatif $\mathcal{A}^*, j \to |j|$ est le module, et la formule fait sens ainsi pour $\beta > 1$, et par prolongement analytique pour $0 < \beta < 1$ (cf. [T], [We_1], [Web_2]).

Il est clair que pour obtenir un système C^*-dynamique *avec interaction*, nous avons besoin d'utiliser non seulement l'anneau localement compact $\mathcal{A}$ mais également l'inclusion fondamentale

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{A}. \tag{12}$$

Nous utiliserons l'inclusion correspondante $P_{\mathbb{Q}} \subset P'_{\mathcal{A}} = G$ et l'action de $P_{\mathcal{A}}$ sur le C^*-module $\mathcal{E} = C^*(G)e$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ donné par l'isomorphisme de la Proposition 10 : $C^*(G)_e = C^*(\mathbb{N}^*)$. En effet, quelle que soit la C^*-algèbre B et la projection (auto-adjointe) $e \in B$, l'espace $\mathcal{E} = Be = \{x \in B \ ; xe = x\}$ est de manière naturelle un C^*-module (à droite) sur la C^*-algèbre réduite $B_e = \{x \in B; ex = xe = x\}$. Ainsi, on définit

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^* \eta \in B_e, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E} = Be \tag{13}$$

$$\xi a \in \mathcal{E}, \qquad \forall \xi \in \mathcal{E}, \qquad a \in B_e.$$

Ce C^*-module a de plus une structure naturelle à gauche de B-module, donnée par $(b, \xi) \to b\xi \in \mathcal{E}, \forall b \in B, \xi \in \mathcal{E}$.

Dans notre cas, $\mathcal{E} = C^*(G)e$ est un espace de fonctions sur G qui sont invariantes par multiplications à droite par des éléments de $P_{\mathcal{R}} \subset G$, ou, en d'autres termes, c'est un espace de fonctions sur l'espace homogène

$$\Delta = G/P_{\mathcal{R}}. \tag{14}$$

Cet espace Δ est par construction le produit restreint des espaces

$$\Delta_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p} \tag{15}$$

relativement au point de base donné par $P_{\mathbb{Z}_p}$.

PROPOSITION 11. *L'espace homogène $\Delta_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p}$ sur le groupe $P_{\mathbb{Q}_p} \subset GL(2,\mathbb{Q}_p)$ est naturellement isomorphe à l'(ensemble des sommets de l')arbre de $SL(2,\mathbb{Q}_p)$. Le groupe $P_{\mathbb{Q}_p}$ agit par les isométries de Δ_p, et préserve un point à l'∞.*

Rappelons (cf. [Ser$_2$]) que l'arbre de $SL(2,K)$, où K est un corps local, est défini en termes de classes d'équivalence des treillis dans un espace vectoriel de dimension 2 noté V sur K. Avec les notations de la Proposition 9, un treillis $L \subset V$ est un R-sous-module de V qui est de type fini et engendre V comme un espace vectoriel. Le groupe multiplicatif K^* opère sur l'ensemble des treillis par $(L,x) \to xL$ pour $x \in K^*$, et on définit T comme l'ensemble des orbites de cette action de K^*. Etant donné un treillis $L \subset V$ et une classe $\Lambda' \in T$, il existe un unique représentant $L' \in \Lambda'$ tel que $L' \subset L$ et $L' \not\subset \pi L$ (avec π donné par la Proposition 9). Alors $L/L' = R/\pi^n R$ et l'entier n, qui dépend seulement des classes de L et L', définit une distance d sur T, par l'égalité

$$d(\text{ classe de } L, \text{ classe de } L') = n. \tag{16}$$

En utilisant l'ensemble des paires à distance mutuelle égale à 1 pour définir un complexe simplicial à une dimension, on obtient un arbre, l'arbre de $SL(2,K)$, et la distance ci-dessus est la longueur de l'unique plus court chemin injectif joignant les deux éléments de cet arbre (cf. [Ser$_2$]). Le groupe $GL(V)$ des automorphismes de l'espace vectoriel V agit sur l'ensemble des treillis par

$$(L,g) \to gL \qquad \forall g \in GL(V), \tag{17}$$

et, comme cette action commute avec celle de K^*, elle donne une action, par isométries, de $GL(V)$ sur l'arbre T. Identifions V avec K^2, $GL(V)$ avec $GL(2,K)$, et considérons P_K comme un sous-groupe de $GL(2,K)$: $P_K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \; ; a \in K^*, b \in K \right\}$. Soit L_0 le treillis $R^2 \subset K^2$. Alors on vérifie que P_K agit transitivement sur T et que le stabilisateur de la classe de L_0 est P_R. Nous obtenons ainsi une identification canonique $T = P_K/P_R$. En prenant $K = \mathbb{Q}_p$, on aboutit à la conclusion.

PROPOSITION 12.

(1) *L'espace homogène $G/P_{\mathcal{R}} = \Delta$ équipé du point de base $P_{\mathcal{R}}$ est canoniquement isomorphe au produit restreint des arbres T_p équipé des points de base $P_{\mathbb{Z}_p}$, et l'action de G sur Δ est simpliciale.*

(2) *Le sous-groupe $P^+_{\mathbb{Q}} \subset P_{\mathcal{A}} = G$ agit transitivement sur Δ, et le sous-groupe d'isotropie du point de base $*$ est $P^+_{\mathbb{Z}}$.*

Preuve. (1) Puisque à la fois P_A et P_R sont des produits restreints, la preuve de (1) est évidente.

(2) D'abord, $\mathbb{Q}$ est dense dans le groupe additif $\mathcal{A}$ des adèles (si on enlève la place à l'∞), (cf. [Ser$_1$]).

Le sous-groupe $\mathbb{Q}^*_+$ de $\mathcal{A}^*$ est discret et on a $\mathcal{A}^* = \mathbb{Q}^*_+ \mathcal{R}^*$ où $\mathcal{R}^* = \{(x_p) \; ; \text{val}(x_p) = 0 \;\; \forall p\}$ est un sous-groupe compact de $\mathcal{A}^*$ (cf. [We$_2$]).

Considérons la séquence exacte de groupes

$$0 \to \mathcal{A} \to P_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}^* \to 1. \tag{18}$$

La fermeture de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $P_{\mathcal{A}}$ est donnée par $\rho^{-1}(\mathbb{Q}_+^*)$. Ainsi, $\overline{P}_{\mathbb{Q}}^+ = \mathcal{A} \rtimes \mathbb{Q}_+^*$. Etant donné $g = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} \in P_{\mathcal{A}}$, on peut écrire $h = rs$ avec $r \in \mathbb{Q}_+^*, s \in \mathcal{R}^*$, alors

$$g = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ns^{-1} \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \overline{P}_{\mathbb{Q}}^+ P_{\mathcal{R}}$$

Ainsi $g \in P_{\mathbb{Q}}^+ P_{\mathcal{R}}$ et puisque $P_{\mathcal{R}}$ est ouvert dans $P_{\mathcal{A}}$, on obtient $g \in P_{\mathbb{Q}}^+ P_{\mathcal{R}}$. Ainsi $P_{\mathcal{A}} = P_{\mathbb{Q}}^+ P_{\mathcal{R}}$ et $P_{\mathbb{Q}}^+$ agit transitivement sur Δ.

Finalement, le sous-groupe d'isotropie du point de base $* = P_{\mathcal{R}}$ est donné par $P_{\mathbb{Q}}^+ \cap P_{\mathcal{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\} = P_{\mathbb{Z}}^+$

Nous pouvons alors identifier Δ avec $P_{\mathbb{Q}}^+ / P_{\mathcal{Z}}$, et nous allons maintenant obtenir l'algèbre de Hecke du Théorème 5 du commutant de l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans l'espace des fonctions sur Δ. Nous avons besoin pour cela de considérer l'espace de Hilbert $\ell^2(\Delta) = \ell^2(P_{\mathbb{Q}}^+ / P_{\mathcal{Z}})$.

Posons $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+ \subset P_{\mathbb{Q}}^+$. Vérifions d'abord le

LEMME 13. L'action de $\Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$ sur Γ / Γ_0 a seulement des orbites finies.

Preuve. Soit $g = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & k \end{bmatrix} \in P_{\mathbb{Q}}^+$. Alors

$$g\Gamma_0 = \left\{ g \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n+a \\ 0 & k \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+a+n_1 k \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Quand n_1 varie, $n_1 k$ prend seulement un nombre fini de valeurs modulo $\mathbb{Z}$, leur nombre dépendant du dénominateur de k. Ainsi on voit qu'on obtient par exemple une orbite finie de cardinalité le dénominateur de k.

LEMME 14.

(a) Tout élément T du commutant de Γ agissant dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ est caractérisé par la fonction Γ_0-bi-invariante $f_T(g) = \langle T\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e \rangle$.

(b) On a $\sum_{g \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} |f_T(g)|^2 < \infty$.

(c) On a $f_{T^*}(g) = \overline{f_T}(g^{-1})$.

(d) La fonction f_{T_1,T_2} Γ_0-bi-invariante , associée au produit de deux éléments T_1 et T_2 dans son commutant est donnée par

$$f_{T_1,T_2}(g) = \sum_{\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1) f_{T_2}(g_1^{-1}).$$

Preuve. (a) Tout élément de Γ agit par permutation de la base $\varepsilon_x, x \in \Gamma/\Gamma_0$ de $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$. Puisque T commute avec Γ, il est caractérisé par $T\varepsilon_e$ qui est déterminé par f_T. On a $f_T(g) =$

$\langle Tg\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle$ de telle façon que f_T est Γ_0-bi-invariante.

(b) Evident.

(c) $f_{T^*}(g) = \langle T^*\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e\rangle = \langle g\varepsilon_e, T\varepsilon_e\rangle = \overline{\langle T\varepsilon_e, g\varepsilon_e\rangle}$

(d)

$$\begin{aligned} f_{T_1T_2}(g) &= \langle T_1T_2\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e\rangle = \langle T_2\varepsilon_e, g^{-1}T_1^*\varepsilon_e\rangle \\ &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} \langle T_2\varepsilon_e, g_1\varepsilon_e\rangle\langle g_1\varepsilon_e, g^{-1}T_1^*\varepsilon_e\rangle \\ &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1)f_{T_2}(g_1^{-1}) \end{aligned}$$

On peut écrire (d) comme

$$f_{T_1T_2}(g) = \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1^{-1})f_{T_2}(g_1)$$

La condition (b) montre que $f_T(g) = 0$ à moins qu'il existe un ensemble fini $F \subset \Gamma$ avec

$$\Gamma_0\, g\, \Gamma_0 \subset F\, \Gamma_0$$

i.e., si $g\ \Gamma_0$ appartient à une orbite *finie* de Γ_0 sur Γ/Γ_0. Par le Lemme 13, on peut prendre une base de fonctions Γ_0-bi-invariantes, e_X, où X parcourt les classes doubles $X \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0, e_X(g) = 0$ si $g \notin X, e_X(g) = 1$ si $g \in X$. Pour toute telle classe, on a deux entiers finis associés :

(19)

$$\begin{aligned} L(X) &= \text{cardinalité de l'image de } X \text{ dans } \Gamma/\Gamma_0 \\ R(X) &= \text{cardinalité de l'image de } X \text{ dans } \Gamma_0\backslash\Gamma. \end{aligned}$$

En fait, à chaque classe double X correspond un nombre rationnel *positif* donné par k pour tout $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & k \end{bmatrix} \in X$, et $L(X)$ est le dénominateur de k, alors que $R(X)$ est le numérateur de k.

PROPOSITION 15.

(a) *Soit f une fonction Γ_0-bi-invariante sur Γ de support fini dans $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$. Alors il existe un unique élément $r(f)$ du commutant de Γ dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ tel que*

$$f(g) = \langle r(f)\ \varepsilon_e, g^{-1}\ \varepsilon_e\rangle \qquad \forall g \in \Gamma.$$

(b) *L'application r s'étend à un isomorphisme de $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ avec la C^*-algèbre $C = C_{\mathbb{Q}}$ engendrée par $r(f)$ dans $\ell^2(\Delta)$.*

Preuve. (a) Soit X une classe double, $X \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$ et e_X la fonction Γ_0-bi-invariante correspondante. Soit T la matrice définie par

$$\langle Tg_1\ \varepsilon_e, g_2\ \varepsilon_e\rangle = e_X(g_2^{-1}\ g_1).$$

On a, par le Lemme 13, l'inégalité

$$sup_\alpha \sum_\beta |T_{\alpha,\beta}| \le L(X), \qquad sup_\beta \sum_\alpha |T_{\alpha,\beta}| \le R(X)$$

qui montre que T définit un opérateur borné dans $\ell^1(\Delta)$ et dans $\ell^\infty(\Delta)$, et donc dans $\ell^2(\Delta)$. L'unicité est évidente.

(b) découle du Lemme 14 (d) et des définitions de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ et $C_r^*(\Gamma,\Gamma_0)$ (cf. Proposition 3).

Ensuite, soit φ l'état sur $C_{\mathbb{Q}}$ défini par

$$\varphi(T) = \langle T\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle. \tag{20}$$

LEMME 16. φ est un état KMS_1 sur C relativement au groupe à un paramètre σ_t,

$$\sigma_t(e_X) = k^{it} e_X, \qquad k = \frac{R(X)}{L(X)}.$$

Preuve. Le produit des fonctions Γ_0-bi-invariantes est donné par

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1} g).$$

On a

$$\varphi(f_1 * f_2) = (f_1 * f_2)(e) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1})$$
$$\varphi(e_X * f) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} e_X(g_1) f(g_1^{-1})$$
$$\varphi(f * e_X) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f(g_2) e_X(g_2^{-1}).$$

Soit $g \in \Gamma$ avec $X = \Gamma_0\, g\, \Gamma_0$ une classe double fixe ; alors puisque f est Γ_0-bi-invariante, les deux expressions ci-dessus sont des multiples de $f(g^{-1})$:

$$\varphi(e_X * f) = L(X) f(g^{-1}), \varphi(f * e_X) = R(X) f(g^{-1}).$$

Ainsi $\varphi(e_X * f) = \frac{L(X)}{R(X)} \varphi(f * e_X)$. Cela montre que eX est un vecteur propre du groupe modulaire d'automorphismes de l'état normal fidèle

$$T \to \langle T\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle$$

sur la fermeture faible C'' de C agissant dans $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$. Il découle alors de cela que φ est un état KMS_1 pour le groupe $\sigma_t = \sigma_{-t}^{\varphi}$. Le vecteur $\varepsilon_e \in \ell^2(\Delta)$ est toujours séparateur pour la fermeture faible de $C_{\mathbb{Q}}$ parce qu'il est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$ par la Proposition 12 (2). Le sous-espace $\mathcal{H}_r$ de $\ell^2(\Delta)$ donné par

$$\mathcal{H}_r = \overline{C_{\mathbb{Q}} \varepsilon_e}$$

est dans le bicommutant de l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ sur Δ et nous allons le calculer.

LEMME 17. *Soit $\xi \in \ell^2(\Delta)$; alors $\xi \in \mathcal{H}_r$ ssi ξ est fixe par $\Gamma_0 \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ agissant à gauche sur $\Delta = P_{\mathbb{Q}}^+/\Gamma_0$.*

Preuve. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ fixe par Γ_0. Alors la fonction $f(g) = \langle \xi, \varepsilon_g\rangle, g \in \Gamma/\Gamma_0$ est Γ_0-bi-invariante. Pour montrer que $\xi \in \mathcal{H}_r$, on peut assumer, en utilisant une décomposition orthogonale, que f est la fonction caractéristique d'une classe double, $f = e_X$. Nous obtenons comme ci-dessus que $e_X^*\, \varepsilon_e = \sum_{g \in F} g\, \varepsilon_e$ où $X = F\Gamma_0$, de telle manière que toutes les fonctions caractéristiques des classes doubles appartiennent à $\mathcal{H}_r$. Inversement, si $\xi \in \mathcal{H}_r$, et $\xi = T\, \varepsilon_e$ pour un opérateur T qui commute avec $P_{\mathbb{Q}}^+$, alors puisque T commute avec $\Gamma_0 \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ et $g\, \varepsilon_e = \varepsilon_e \quad \forall g \in \Gamma_0$, on obtient que ξ reste fixe par Γ_0.

4 Présentation de la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C_r^*(P_{\mathbb{Q}}^+, P_{\mathbb{Z}}^+)$

Considérons d'abord l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ où $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$ sont définis comme ci-dessus. C'est une algèbre involutive sur $\mathbb{C}$ avec une base linéaire e_X, indexée par les classes doubles $X \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$. Nous utiliserons les notations suivantes :

(α) Pour $n \in \mathbb{N}^*, \mu_n = n^{-1/2} e_{X_n}$ où X_n est la classe double de l'élément $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$.

(β) Pour $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, e(\gamma) = e_{X^\gamma}$ où X^γ est la classe double de l'élément $\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+ / P_{\mathbb{Z}}^+$.

Proposition 18. Les éléments $\mu_n, e(\gamma), n \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ engendre l'algèbre involutive $\mathcal{H}$ et les relations suivantes donnent une présentation de $\mathcal{H}$.
(a) $\mu_n^* \mu_n = 1 \quad \forall n$
(b) $\mu_{nm} = \mu_n \mu_m \quad \forall n, m$
(c) $\mu_n \mu_m^* = \mu_m^* \mu_n \quad$ si $(n, m) = 1$
(d) $e(\gamma)^* = e(-\gamma), e(\gamma_1 + \gamma_2) = e(\gamma_1) e(\gamma_2) \qquad \forall \gamma, \gamma_1, \gamma_2$
(e) $e(\gamma)\mu_n = \mu_n e(n\gamma) \quad \forall n, \forall \gamma$
(f) $\mu_n e(\gamma) \mu_n^* = \frac{1}{n} \sum_{n\delta = \gamma} e(\delta) \quad \forall n, \forall \gamma.$

Preuve. Nous devons d'abord vérifier que les relations (a)-(f) sont respectées en utilisant les définitions du produit et de l'involution dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que :

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1)\, f_2(g_1^{-1} g) \tag{1}$$

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la classe à droite $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \Gamma_0$ est déjà une classe double : X_n. Cela montre que pour toute fonction Γ_0-bi-invariante $f \in \mathcal{H}$:

$$n^{1/2}(\mu_n * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} g \right) \qquad \forall g \in \Gamma. \tag{3}$$

De façon similaire, la classe à droite $\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Gamma_0, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est déjà une classe double X^γ de telle sorte que

$$(e(\gamma) * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g \right) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{4}$$

et en utilisant l'égalité $\Gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = X^\gamma$,

$$(f * e(\gamma))(g) = f\left(g \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \forall g \in \Gamma. \tag{5}$$

En utilisant (3), (4), (5), on prouve directement les relations (b), (d) et (e). La multiplication à gauche par μ_n^* est donnée par

$$n^{1/2}(\mu_n^* * f)(g) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & n \end{bmatrix} g\right) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{6}$$

où la bi-invariance de f montre que $f\left(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & n \end{bmatrix} g\right)$ dépend seulement de k modulo n, puisque

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+nb \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

L'égalité (a) découle directement de (6). Soient n, m des entiers tels que $(n, m) = 1$; en utilisant (3), on obtient que la fonction bi-invariante $n^{1/2}m^{1/2}\mu_n * \mu_m^*$ est la fonction caractéristique des classes doubles $\Gamma_0 : \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z}/m \\ 0 & n/m \end{bmatrix}$. En utilisant (6), on obtient que

$$m^{1/2}\mu_m^* * \mu_n(g) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_n\left(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & m \end{bmatrix} g\right).$$

Soit $g = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \Gamma$. Alors le $(k+1)$-ième terme du côté droit s'évanouit à moins que $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & m \end{bmatrix} g \in \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & n \end{bmatrix}$ i.e. à moins que $\alpha = n/m, \beta + \frac{nk}{m} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le côté gauche s'évanouit à moins que $\beta \in \mathbb{Z}/m$ et est égal à $n^{-1/2}$ si $\beta \in \mathbb{Z}/m$ puisque, comme $(n, m) = 1$, seule une valeur de k contribuera à la somme. Cela prouve la relation (c). Pour prouver (f), on combine (3) et (4), ce qui donne

$$n^{1/2}(\mu_n * e(\gamma) * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & -\gamma n^{-1} \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} g\right) \qquad \forall g \in \Gamma$$

que l'on applique à $f = \mu_n^*$. On a $f(g) = n^{1/2}$ si $g \in \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z}/n \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$ et $f(g) = 0$ sinon. Cela montre que $(\mu_n * e(\gamma) * \mu_n^*)(g)$ s'évanouit à moins que $g = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec

$$\begin{bmatrix} 1 & -\gamma n^{-1} \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z}/n \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix}$$

i.e. $n\beta = \gamma$ modulo n. Puisque cette équation a n solutions $\beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on obtient (f).

Nous avons ainsi démontré les relations (a)-(f). Inversement, soit $\mathcal{A}$ l'algèbre involutive engendrée par les éléments $(\mu_n), (e_\gamma)$ satisfaisant (a)-(f). Nous allons montrer que les monômes de la forme

$$t_{n,m,\gamma} = \mu_n e(\gamma)\mu_m^*, \qquad n, m \in \mathbb{N}^*, (n, m) = 1, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

forment un ensemble de générateurs de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$. Il suffit pour cela d'exprimer l'adjoint et les produits de tels monômes comme des éléments de leur enveloppe linéaire $\mathcal{L}$.
D'abord, si nous continuons en notant $t_{n,m,\gamma}$ l'expression $\mu_n e(\gamma)\mu_m^*$ quand n, m ne sont pas premiers entre eux mais s'ils sont tels que $(n, m) = q > 1$, nous pouvons écrire

$$t_{n,m,\gamma} = \mu_{n/q}\mu_q e(\gamma)\mu_q^*\mu_{m/q}^*$$

et utiliser (f) pour l'exprimer comme un élément de $\mathcal{L}$. Il est clair que $(t_{n,m,\gamma})^* = t_{m,n,-\gamma}$ de telle sorte que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Calculons maintenant le produit : $t_{n_1,m_1,\gamma_1} t_{n_2,m_2,\gamma_2}$. Soit $q = (m_1, n_2)$, alors $\mu^*_{m_1}\mu_{n_2} = \mu^*_{m_1/q}\mu^*_q\mu_q\mu_{n_2/q} = \mu^*_{m_1/q}\mu_{n_2/q} = \mu_{n_2/q}\mu^*_{m_1/q}$ en utilisant (a), (b), (c).

Ainsi $t_{n_1,m_1,\gamma_1} t_{n_2,m_2,\gamma_2} = \mu_{n_1} e(\gamma_1)\mu_{n_2/q}\mu^*_{m_1/q} e(\gamma_2)\mu^*_{m_2}$. En utilisant (e) et son adjoint, on obtient alors

$$t_{n_1,m_1,\gamma_1} t_{n_2,m_2,\gamma_2} = \mu_{n_1 n_2/q} e\left(\frac{n_2}{q}\gamma_1 + \frac{m_1}{q}\gamma_2\right)\mu^*_{m_1 m_2/q}$$

qui est un $t_{n,m,\gamma}$ avec (n, m) non nécessairement égal à 1 et peut être exprimé comme ci-dessus comme un élément de $\mathcal{L}$.

Nous avons montré que l'enveloppe linéaire $\mathcal{L}$ des $t_{n,m,\gamma}$ est une algèbre involutive et ainsi que $\mathcal{L} = \mathcal{A}$. Dans l'algèbre $\mathcal{H}$, les $t_{n,m,\gamma}$ sont donnés par

$$t_{n,m,\gamma} = (nm)^{-1/2} e_X, \qquad X = \text{classe double de } \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & n/m \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ainsi, ils sont linéairement indépendants dans $\mathcal{H}$ et cela suffit pour conclure que (a)-(f) est une présentation de $\mathcal{H}$.

Il est crucial que la présentation de $\mathcal{H}$ ci-dessus soit définie sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, puisque cela permettra l'action naturelle du groupe de Galois G de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{\text{cycl}}$ de $\mathbb{Q}$ sur certaines représentations de $\mathcal{H}$ que nous construirons plus tard en Section 6.

Un résultat similaire à la Proposition 18 est obtenu pour la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$ et du fait de la moyennabilité de $\Gamma = P^+_{\mathbb{Q}}$, la nuance entre $C^*(\Gamma, \Gamma_0)$, la C^*-algèbre universelle engendrée par les (μ_n, e_γ) avec les relations ci-dessus, et $C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$ ne se lève pas. On a $C^*(\Gamma, \Gamma_0) = C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$.

Proposition 19. *Soit π une représentation involutive de $\mathcal{H}$ comme opérateurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors π s'étend uniquement par continuité à une représentation de $C^*_r(\Gamma, \Gamma_0) = C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. Les relations (a) et (d) montrent que $\pi(\mu_n)$ est une isométrie et $\pi(e(\gamma))$ est unitaire. Ainsi on a

$$\|\pi(\mu_n e(\gamma)\mu^*_m)\| \leq 1 \qquad \forall n, m, \gamma.$$

Cela montre que $\pi(f)$ est borné pour tout $f \in \mathcal{H}$, avec

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$$

où

$$\|f\|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} \delta(\gamma)^{-1/2} |f(\gamma)|, \qquad \delta(\gamma) = \frac{L(\gamma)}{R(\gamma)}.$$

Il suit alors que l'égalité suivante définit une norme sur $\mathcal{H}$ dont la complétion est une C^*-algèbre :

$$\|f\|_{max} = \text{Sup}\{\|\pi(f)\| \,; \pi \in \text{Rep}\mathcal{H}\} \tag{8}$$

où $\text{Rep}\mathcal{H}$ est la classe de toutes les représentations involutives de $\mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert séparable fixé.

Montrons que

$$\|f\|_{\max} = \|f\|_{C_r^*(\Gamma,\Gamma_0)} \qquad \forall f \in \mathcal{H} \tag{9}$$

qui est une assertion de *moyennabilité* de la paire (Γ, Γ_0). Prouvons d'abord (9) pour les éléments de l'anneau de groupes $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$, i.e. les combinaisons linéaires des $e_\gamma, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
En utilisant les représentations de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$, on a

$$\|f\|_{\max} \geq \|f\|_{C_r^*} \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{10}$$

Ainsi, nous avons seulement besoin de prouver l'autre inégalité. La moyennabilité du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ montre que

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_{C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \qquad \forall f \in \mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \tag{11}$$

pour toute représentation unitaire π de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Observons que dans la représentation de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$, la restriction à $\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ définit une représentation fidèle de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Par exemple, la restriction de l'action de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à l'orbite de $\varepsilon_0 = \Gamma_0$, est isomorphe à la représentation régulière de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, d'où découle le résultat. Cela prouve (9) pour les éléments de $\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ et nous autorise à voir $\mathbb{C}^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ comme une C^*-sous-algèbre de la C^* complétion $C^*(\Gamma, \Gamma_0)$ de $\mathcal{H}$ pour la norme (8). Identifions le dual du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avec le groupe additif $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ en utilisant l'égalité $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathcal{A}/\mathcal{R}$ et l'identification du groupe additif $\mathcal{A}$ avec son dual de Pontrjagin. Considérons maintenant le groupoïde localement compact $\mathcal{G}$ défini comme suit. Puisque l'espace localement compact $\mathcal{G}$ est le sous-ensemble suivant de $\mathcal{R} \times \mathbb{Q}_+^*$,

$$\mathcal{G} = \{(b, a) \in \mathcal{R} \times \mathbb{Q}^* \,;\, ab \in \mathcal{R}\} \tag{12}$$

qui peut être identifié à une union dénombrable d'ensembles ouverts et fermés de $\mathcal{R}$.
On a $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{R} \times 1 = \mathcal{R}$ et les applications image et antécédent sont

$$r(b, a) = ab, \qquad s(b, a) = b \tag{13}$$

tandis que la composition est donnée par

$$(b_1, a_1) \circ (b_2, a_2) = (b_2, a_1 a_2). \tag{14}$$

Par construction, les fibres $\mathcal{G}^x$ et $\mathcal{G}_x, x \in \mathcal{R}$ de r et s sont des ensembles discrets dénombrables et les C^*-algèbres $C^*(\mathcal{G})$ et $C_r^*(\mathcal{G})$ de ce groupoïde localement compact font bien sens. Ce sont les complétions de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ des fonctions continues à support compact sur G,

$$(f_1 * f_2)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) \tag{15}$$

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \tag{16}$$

sous les normes respectives suivantes :

$$\|f\|_{\max} = \sup\{\|\pi(f)\| \,;\, \pi \in \operatorname{Rep} \mathcal{G}\} \tag{17}$$

(18) $$\|f\|_r = \sup_{x\in\mathcal{G}^{(0)}} \|\lambda_x(f)\|$$

où λ_x est la représentation régulière à gauche de f dans $\ell^2(\mathcal{G}^x)$ donnée par :

(19) $$(\lambda_x(f)\xi)(\gamma) = \sum_{r(\gamma_1)=x} f(\gamma_1)\xi(\gamma_1^{-1}\gamma).$$

Maintenant, puisque le groupe $\mathbb{Q}_+^*$ est moyennable, il s'ensuit que le groupoïde localement compact $\mathcal{G}$ est moyennable au sens de [Ren], de telle façon que les normes (17) et (18) coïncident.

Maintenant, étant donnée une représentation π de $\mathcal{H}$, nous obtenons une représentation $\widetilde{\pi}$ de $C_c(\mathcal{G})$ comme suit. Nous identifions $\mathcal{H}$ avec une sous-algèbre de $C_c(\mathcal{G})$ en vérifiant que les éléments suivants $\widetilde{e}(\gamma), \widetilde{\mu}_n$ de $C_c(\mathcal{G})$ satisfont la présentation de la Proposition 18,

(20)
$$\begin{array}{ll} \widetilde{e}(\gamma)(b,a) = 0 & \text{à moins que } a = 1, \\ \widetilde{e}(\gamma)(b,1) = \langle b,\gamma\rangle & \end{array}$$

(où $\langle b,\gamma\rangle$ est l'appariement entre $\mathcal{R}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ donné par la dualité de Pontrjagin des groupes abéliens)

(21) $$\widetilde{\mu}_n(b,a) = 0 \text{ à moins que } a = n^{-1}\,; \widetilde{\mu}_n(b,n^{-1}) = 1 \qquad \forall b \in \mathcal{R}.$$

On vérifie directement les relations (a)-(f) de la présentation de $\mathcal{H}$ en utilisant en particulier l'égalité

(22) $$\langle n\gamma, b\rangle = \langle \gamma, nb\rangle \qquad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall b \in \mathcal{R} \text{ tel que } nb \in \mathcal{R}.$$

Alors soit π une représentation involutive de $\mathcal{H}$. Nous avons montré ci-dessus que la restriction de π à l'anneau de groupes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ s'étend à une représentation de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Il découle alors de cela, en utilisant $\widetilde{\mu}_n$ qui, avec $C(\mathcal{R})$, engendre $C_c(\mathcal{G})$, que π s'étend à une représentation $\widetilde{\pi}$ de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ du groupoïde localement compact $\mathcal{G}$. La moyennabilité de $\mathcal{G}$ amène alors

(23) $$\|\pi(f)\| \leq \sup_{x\in\mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\| \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

L'homomorphisme $h : \mathcal{G} \to \mathbb{Q}_+^*, h(b,a) = a$, amène pour chaque $x \in \mathcal{R}$, une injection de $\mathcal{G}^x$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ qui nous autorise à considérer le corps continu d'espaces de Hilbert $\ell^2(\mathcal{G}^x), x \in \mathcal{R}$ comme un sous-corps du corps des constantes avec comme fibre $\ell^2(\mathbb{Q}_+^*)$. Pour tout $f \in \mathcal{H}$, l'application $x \to \lambda_x(\widetilde{f})$ est alors fortement continue avec des valeurs dans $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Q}_+^*))$. Cela peut être vérifié directement pour les $\widetilde{\mu}_n$ et pour les éléments de $C(\mathcal{R})$.
Il s'ensuit que pour toute $f \in \mathcal{H}$, la fonction sur $\mathcal{R}$, définie par $x \to \|\lambda_x(\widetilde{f})\|$, est semi-continue par le bas dans le sens où $\{x\,; \|\lambda_x(\widetilde{f}) > \alpha\}$ est un ensemble ouvert pour tout α. Ainsi

(24) $$\sup_{x\in\mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\| = \text{Ess Sup}_{x\in\mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\|$$

et le côté droit est égal à $\|f\|_{C_r^*}(\Gamma,\Gamma_0)$ de telle façon que l'égalité (9) en découle.

5 Action de $W \times \mathbb{R}$ sur la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}}$

Soit $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ l'action de $\mathbb{R}$ sur la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C^*(P^+_{\mathbb{Q}}, P^+_{\mathbb{Z}})$ définie dans la proposition 4. En fonction des classes doubles X dans $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0, \Gamma = P^+_{\mathbb{Q}}, \Gamma_0 = P^+_{\mathbb{Z}}$, on a

$$\sigma_t(e_X) = k^{-it} e_X, \qquad k = \frac{R(X)}{L(X)}$$

et pour la classe double de $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in P^+_{\mathbb{Q}}$, on a

$$k = a. \tag{1}$$

Par rapport à la présentation de $C_{\mathbb{Q}}$ (Proposition 18), on a

$$\sigma_t(\mu_n) = n^{it}\mu_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sigma_t(e(\gamma)) = e(\gamma) \tag{2}$$

quelque soit $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et quelque soit $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 20.

(a) La C^*-sous-algèbre de $C_{\mathbb{Q}}$ donnée par les points fixes de σ, $C^\sigma_{\mathbb{Q}} = \{x \in C_{\mathbb{Q}}\,; \sigma_t(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$ est l'image de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ par l'isomorphisme associé à l'homomorphisme $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to e(\gamma) \in C_{\mathbb{Q}}$.

(b) Le centralisateur de l'état φ sur $C_{\mathbb{Q}}$ donné par le Lemme 16 est égal à $C^\sigma_{\mathbb{Q}} = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Preuve. (a) Par construction, $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C^\sigma_{\mathbb{Q}}$. L'action σ de $\mathbb{R}$ sur $C_{\mathbb{Q}}$ est presque-périodique et diagonale dans la base linéaire (e_X) de $\mathcal{H}$. La projection P sur les points fixes de σ, donnée par la moyenne presque-périodique des σ_t est l'identité sur les classes doubles $e_{X^\gamma}, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et elle s'évanouit, $P(e_X) = 0$, sur les classes doubles de tout $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, a \neq 1$. La conclusion en découle puisque $\mathcal{H}$ est dense sur $C_{\mathbb{Q}}$ et P est de norme continue.

(b) découle de (a) et du Lemme 16.

Nous allons maintenant définir une action naturelle par les automorphismes de $C_{\mathbb{Q}}$, du groupe des classes d'idèles $W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}^*_+$. Rappelons d'abord que nous avons obtenu $C_{\mathbb{Q}}$ dans la Proposition 15 du commutant de $P^+_{\mathbb{Q}}$ dans $\ell^2(\Delta)$ où $\Delta = P_{\mathcal{A}}/P_{\mathcal{R}} = P^+_{\mathbb{Q}}/P^+_{\mathbb{Z}}$. Montrons que $W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}^*_+$ agit de façon naturelle sur le commutant de $P^+_{\mathbb{Q}}$ dans $\ell^2(\Delta)$. Le groupe $P_{\mathcal{A}}$ agit sur Δ et sur $\ell^2(\Delta)$ et ainsi le commutant de $P^+_{\mathbb{Q}}$ est le même que le commutant de sa fermeture $\overline{P}^+_{\mathbb{Q}}$ dans $P_{\mathcal{A}}$. On a (cf. Proposition 12) $\overline{P}^+_{\mathbb{Q}} = \mathcal{A} \rtimes \mathbb{Q}^*_+$ qui est un *sous-groupe normal* de $P_{\mathcal{A}}$. Ainsi le groupe quotient

$$W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}^*_+ = P_{\mathcal{A}}/\overline{P}^+_{\mathbb{Q}} \tag{3}$$

agit naturellement sur le commutant $P^{+\prime}_{\mathbb{Q}}$ de $P^+_{\mathbb{Q}}$ dans $\ell^2(\Delta)$, par

$$\theta_u(x) = uxu^* \qquad \forall x \in P^{+\prime}_{\mathbb{Q}}, \qquad \forall u \in W. \tag{4}$$

(Le choix du représentant $u \in P_{\mathcal{A}}$ de la classe de u est sans importance). Cela définit une action fortement continue du groupe compact W sur l'algèbre de von Neumann $P^{+\prime}_{\mathbb{Q}}$.

PROPOSITION 21.

(a) L'action θ de W sur $P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}$ laisse la C^*sous-algèbre dense globalement invariante et est de norme ponctuelle continue (elle converge simplement en norme) sur $C_{\mathbb{Q}}$.

(b) La sous-algèbre point fixe $C_{\mathbb{Q}}^W$ est la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les $\mu_n \in C_{\mathbb{Q}}$.

(c) L'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$ préserve l'état φ et commute avec l'action $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Preuve. Montrons d'abord que μ_n, i.e. la convolution à droite $r(f)$ dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ par $f = n^{-1/2}e_{X_n}$, appartient non seulement au commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ (Proposition 15) mais également au commutant de $P_{\mathcal{A}}$. Par construction, on a

$$\langle \mu_n^* \varepsilon_e, g\varepsilon_e\rangle = f(g) = n^{-1/2}e_{X_n}(g) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{5}$$

et puisque les $g\varepsilon_e,\ g \in \Gamma/\Gamma_0$ forment une base de $\ell^2(\Delta)$, nous obtenons

$$\mu_n^*\varepsilon_e = n^{-1/2}g_n\varepsilon_e, \qquad g_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \in \Gamma. \tag{6}$$

Supposons que $n = p$ est un nombre premier et montrons que $p^{1/2}\mu_p^*$ coïncide avec l'opérateur dans $\ell^2(\Delta) = \bigotimes_q(\ell^2(T_q), *)$ donné par $\widetilde{t}_p = 1 \otimes t_p \otimes 1 \otimes \ldots$, où t_p est la translation hyperbolique d'une unité de longueur vers le point à l'∞ dans l'arbre T_p de la Proposition 12.

Notons que cette translation hyperbolique est exactement p vers un de telle façon que $p^{-1/2}t_p$ est une co-isométrie sur $\ell^2(T_p)$. Maintenant, on a à la fois μ_p^* et t_p qui commutent avec l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ sur $\ell^2(\Delta)$, et ε_e est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$. Ainsi l'égalité

$$p^{1/2}\mu_p^*\varepsilon_e = \widetilde{t}_p\varepsilon_e$$

implique l'égalité des opérateurs

$$\mu_p^* = p^{-1/2}\widetilde{t}_p. \tag{7}$$

Puisque $\widetilde{t}_p$ appartient au commutant de $P_{\mathcal{A}}$, par construction, on obtient ainsi que $\mu_p \in (P_{\mathcal{A}})'$ et

$$\theta_u(\mu_n) = \mu_n \qquad \forall u \in W, n \in \mathbb{N}^*. \tag{8}$$

Pour prouver 21 (a), nous avons seulement besoin de montrer que l'action θ de W laisse la C^*-sous-algèbre $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ de $C_{\mathbb{Q}}$ globalement invariante et qu'elle est de norme ponctuelle continue sur $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cela va découler de l'assertion plus précise suivante :

LEMME 22. *Soit $f \in C(\mathcal{R}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_{\mathbb{Q}}$. Alors*

$$\theta_u(f)(b) = f(ub) \qquad \forall b \in \mathcal{R}, u \in \mathcal{R}^* = W.$$

Preuve. Considérons (cf. [We$_2$] p. 257) la décomposition en produit direct :

$$\mathcal{A}^* = \mathbb{Q}_+^* \times \left(\prod_p \mathbb{Z}_p^*\right) = \mathbb{Q}_+^* \times \mathcal{R}^*$$

où le morphisme $r : \mathcal{A}^* \to \mathbb{Q}_+^*$ est donné par

$$r(z) = \prod_p |z_p|_p^{-1} = \prod_p p^{\mathrm{val}(z_p)}$$

Par construction, r est l'identité sur $\mathbb{Q}_+^*$ et son noyau est $\prod_p \mathbb{Z}_p^* = \mathcal{R}^*$; ainsi, r est la projection sur le premier terme de cette décomposition comme un produit. Nous utilisons la seconde projection pour identifier W et $\mathcal{R}^*$.
L'égalité des groupes abéliens $\mathcal{A}/\mathcal{R} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ montre que la multiplication par un élément $u \in \mathcal{R}^*$ définit un automorphisme m_u de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et pour prouver le Lemme 22, on a juste à montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a

$$\theta_u(e(\gamma)) = e(m_{u^{-1}}\gamma) \qquad \forall u \in \mathcal{R}^* \tag{9}$$

Puisque ε_e est séparateur pour $P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}$, il suffit de vérifier que $\theta_u(e(\gamma))\ \varepsilon_e = e(m_{u^{-1}}\gamma)\ \varepsilon_e$, i.e. que

$$u\ e(\gamma)\ u^*\ \varepsilon_e = e(m_{u^{-1}}\gamma)\ \varepsilon_e. \tag{10}$$

Puisque ε_e est laissé fixe par $P_{\mathcal{R}} \subset P_{\mathcal{A}}$, il est fixe par l'action de $u^* \in \mathcal{R}^* \subset P_{\mathcal{R}}$. De plus, pour tout $\delta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, l'action de $e(\delta)$ sur ε_e donne simplement $\begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_e$. Ainsi (10) découle de l'égalité

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta u^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cela complète la preuve du Lemme 22 et de la Proposition 21 (a). Pour prouver la Proposition 21 (c), noter que l'action de $\mathcal{R}^*$ dans $\ell^2(\Delta)$ fixe le vecteur ε_e, ce qui prouve que l'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$ préserve l'état φ. Il commute trivialement avec σ_t en tous cas. Prouvons la Proposition 21 (b). Puisque W est un groupe compact, nous pouvons considérer la projection naturelle E de $C_{\mathbb{Q}}$ sur $C_{\mathbb{Q}}^W$ donnée par

$$E(x) = \int_W \theta_u(x) du \tag{11}$$

Par construction, E est de norme continue et satisfait

$$E(axb) = a\ E(x)\ b \qquad \forall x \in C_{\mathbb{Q}},\ \ a, b \in C_{\mathbb{Q}}^W. \tag{12}$$

Puisque par (8), on a $C^*(\mathbb{N}^*) \subset C_{\mathbb{Q}}^W$, il suffit d'utiliser la base linéaire $\mu_n\ e(\gamma)\ \mu_m^*$ de $\mathcal{H}$, pour montrer que

$$E(e(\gamma)) \in C^*(\mathbb{N}^*) \qquad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{13}$$

pour conclure que $C^*(\mathbb{N}^*) = C_{\mathbb{Q}}^W$.
Finalement, pour prouver (13), noter que $E(e(\gamma)) \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ est donné par une fonction $f \in C(\mathcal{R})$ telle que

$$f(ub) = f(b) \qquad \forall u \in \mathcal{R}^*, \forall b \in \mathcal{R}. \tag{14}$$

Cette égalité définit une C^*-sous-algèbre de $C(\mathcal{R}) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} C(\mathcal{R}_p)$, qui est identique à $C^*(\mathbb{N}^*) \cap C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cela peut se voir localement en montrant que

$$f \in C(\mathcal{R}_p),\ \ f(ub) = f(b) \qquad \forall u \in \mathcal{R}_p^*, b \in \mathcal{R}_p \tag{15}$$

implique que f est une fonction de $|\ |_p$.

6 Classification des états $\mathbf{KMS}_\beta$ pour $\beta > 1$

Nous allons d'abord construire des représentations involutives π_α de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ étiquetées par le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ du sous-corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ de $\mathbb{C}$ engendré par toutes les racines de l'unité.
Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}^*)$, avec sa base orthonormale canonique $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition 23. Les égalités suivantes définissent une représentation involutive π_1 de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$,

(α) $\pi_1(\mu_n)\,\varepsilon_k = \varepsilon_{nk} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$

(β) $\pi_1(e(\gamma))\,\varepsilon_k = \exp(2\pi i k\gamma)\,\varepsilon_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$

Proof. Nous avons juste besoin de vérifier que les relations (a)-(f) sont respectées par les opérateurs $\mu'_n = \pi_1(\mu_n)$ et $e'(\gamma) = \pi_1(e(\gamma))$ définis par $(\alpha), (\beta)$. Puisque l'application $k \to nk$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ est injective, la relation (a) est vérifiée et de plus, l'adjoint μ'^*_n est donné par

$$\mu'^*_n \varepsilon_k = \varepsilon_{k/n} \quad \text{if } n|k \text{ et } 0 \text{ sinon.} \tag{1}$$

La relation (b) est évidente. Pour vérifier (c), noter que si $(n, m) = 1$, alors $m|k \iff m|nk$ et quand on l'applique à ε_k, à la fois $\mu'_n \mu'^*_m$ et $\mu'^*_m \mu'_n$ s'évanouissent ou sont égaux à $\varepsilon_{nk/m}$. La relation (d) est évidente ainsi que (e),

$$e'(\gamma)\,\mu'_n\,\varepsilon_k = e'(\gamma)\,\varepsilon_{nk} = \exp 2\pi i(nk\gamma)\,\varepsilon_{nk} = \mu'_n\,e'(n\gamma)\,\varepsilon_k. \tag{2}$$

Vérifions (f). Les deux côtés appliqués à ε_k s'évanouissent à moins que $n|k$. C'est clair pour le côté gauche par (1), et c'est vrai pour le côté droit parce qu'il est de la forme

$$e'(\delta_0)\,\frac{1}{n}\sum_{n\delta=0} e'(\delta), \qquad n\delta_0 = \gamma$$

et $\sum_{n\delta=0} e'(\delta)\,\varepsilon_k = 0$ à moins que $n|k$. Ensuite, quand $n|k$ de telle façon que $k = qn$, on a :

$$\mu'_n\,e'(\gamma)\,\mu'^*_n\,\varepsilon_k = \exp(2\pi i q\gamma)\,\varepsilon_k$$
$$e'(\delta_0)\,\varepsilon_k = \exp(2\pi i k\delta_0)\,\varepsilon_k = \exp(2\pi i q\gamma)\,\varepsilon_k$$

pour tout $\delta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que $n\delta_0 = \gamma$.

Proposition 24.

(1) Pour $\alpha \in G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$, les égalités suivantes définissent une représentation involutive π_α de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$:
(α) $\pi_\alpha(\mu_n)\,\varepsilon_k = \varepsilon_{nk} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$
(β) $\pi_\alpha(e(\gamma))\,\varepsilon_k = \alpha(\exp 2\pi i k\gamma)\,\varepsilon_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$

(2) Pour tout élément $x \in \mathcal{H}(\mathbb{Q})$ de la $\mathbb{Q}$ algèbre engendrée par les μ_n et les $e(\gamma)$, les éléments de la matrice $\pi_\alpha(x)$ satisfont

$$\langle \pi_\alpha(x)\,\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}\rangle = \alpha\langle \pi_1(x)\,\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}\rangle \quad \forall k_j.$$

Preuve. (1) La preuve ci-dessus de la Proposition 23 marche sans changement. Le seul point important est de vérifier (d), notamment que $\pi_\alpha(e(\gamma))^* = \pi_\alpha(e(-\gamma))$. Cela est vrai car la conjugaison complexe $z \to \overline{z}$ commute avec tout $\alpha \in G$.

(2) Par construction, les éléments de la matrice des π_α des générateurs satisfont la relation souhaitée qui est stable par les opérations algébriques sur des matrices n'impliquant que des sommes finies de produits.

Définissons H comme l'opérateur positif dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ correspondant à l'évolution temporelle décrite dans la Section 2, notamment

$$H_{\varepsilon_n} = (\log n)\ \varepsilon_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Nous avons déjà vu dans la Section 2 que

$$e^{itH}\ x\ e^{-itH} = \sigma_t(x) \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Puisqu'il est évident que H commute avec $\pi_\alpha(y)$ pour tout $y \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_{\mathbb{Q}}$, nous obtenons alors

$$e^{itH}\ \pi_\alpha(x)\ e^{-itH} = \pi_\alpha(\sigma_t(x)) \qquad \forall x \in C_{\mathbb{Q}}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

Théorème 25. Soit $\widetilde{\pi}_\alpha$ l'extension canonique de la représentation π_α de $\mathcal{H}$ à la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}}$, et soit $\beta > 1$.

(a) L'égalité suivante définit un état KMS_β sur $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$:

$$\varphi_{\beta,\alpha}(x) = \zeta(\beta)^{-1}\mathrm{Trace}(\widetilde{\pi}_\alpha(x)\ e^{-\beta H}) \qquad \forall x \in C_{\mathbb{Q}}.$$

(b) L'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est un homomorphisme du groupe de Galois G de $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ avec l'espace des points extrêmes du simplexe de Choquet des états KMS_β sur $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$.

Preuve. (a) D'abord, par la Proposition 19, nous savons que la représentation π_α s'étend à une représentation de $C_{\mathbb{Q}}$ et l'égalité (5) avec la finitude de $\mathrm{Trace}(e^{-\beta H}) = \zeta(\beta)$ donne (a).

(b) Fixons $\beta > 1$ et montrons d'abord que l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est injective.
Pour montrer cela, noter que chacune des représentations π_α de $C_{\mathbb{Q}}$ est irréductible et par construction, chaque $\varphi_{\beta,\alpha}$ est un facteur d'état de type I_∞. Aussi sa construction GNS détermine canoniquement l'opérateur positif $H, 0 \in \mathrm{Sp}H$, comme un opérateur non-borné associé à la fermeture faible de $C_{\mathbb{Q}}$: en particulier, $\varphi_{\beta,\alpha}$ détermine canoniquement l'état à température 0,

$$\varphi_{\infty,\alpha}(x) = \langle \pi_\alpha(x)\ \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle. \tag{6}$$

Quand on restreint cet état $\varphi_{\infty,\alpha}$ à l'anneau de groupes $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à coefficients rationnels, on trouve le plongement du corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$:

$$\varphi_{\infty,\alpha}(\sum \lambda_j \gamma_j) = \alpha(\sum \lambda_j \exp(2\pi i \gamma_j)) \tag{7}$$

qui bien sûr détermine $\alpha \in G$ de manière unique.

Ensuite, chaque $\varphi_{\beta,\alpha}$ est un facteur d'état et ainsi, est un point extrême de l'ensemble convexe faiblement compact K_β d'états KMS$_\beta$. Soit $\mathcal{E}(K_\beta)$ l'espace des points extrêmes de K_β. Nous avons montré que l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est une injection de G dans $\mathcal{E}(K_\beta)$.
Cette application est faiblement continue puisque, comme $\beta > 1$, la série $\sum \alpha(\exp 2\pi ik\gamma)k^{-\beta}$ est uniformément convergente. Il reste à montrer que cette application est surjective. Noter d'abord que pour tout élément u de W, il existe un élément correspondant $\alpha(u)$ de G tel que

$$\varphi_{\beta,1} \circ \theta_u = \varphi_{\beta,\alpha(u)} \tag{8}$$

et l'application $u \to \alpha(u)$ est un isomorphisme entre W et G. Ensuite, il existe sur $C_\mathbb{Q}$ un unique état KMS$_\beta$ qui est W-invariant. Cela est vrai pour toute valeur $\beta \in]0, \infty[$ et cela découle de la Proposition 21 (b) et de la Proposition 8 (a). En effet, étant donné un tel état φ, on a $\varphi = \varphi \circ E$ où E est la projection $E = \int_W \theta_u du\ \varphi$ de $C_\mathbb{Q}$ sur $C_\mathbb{Q}^W$ et la restriction de φ à $C_\mathbb{Q}^W = C^*(\mathbb{N}^*)$ est unique. Alors soit ψ est un état KMS$_\beta$; on a

$$\int_W \psi \circ \theta_u du = \int_W \varphi_{\beta,\alpha(u)} du \tag{9}$$

puisque les deux côtés sont des états KMS$_\beta$ W-invariants. Maintenant, si $\psi \in \mathcal{E}(K_\beta)$ est un point extrême, cette égalité (9) donne deux décompositions du même état comme barycentre des mesures sur $\mathcal{E}(K_\beta)$, qui est un simplexe de Choquet (Proposition 2), de telle sorte que

$$\psi \circ \theta_u \in \{\varphi_{\beta,\alpha(v)}\ ; v \in W\} \quad \text{pour presque tout } u. \tag{10}$$

Finalement, cela implique que $\psi = \varphi_{\beta,\alpha(v)} \circ \theta_u^{-1}$ pour un $u, v \in W$ et ψ est dans l'image de l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$. Puisque l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est continue et bijective et puisque G est compact, il est homéomorphe à son image $\mathcal{E}(K_\beta)$ et cela prouve le Théorème 25.

Remarques 26.

(1) Nous donnerons dans la section prochaine la formule générale (pour toutes les valeurs de β) pour l'état KMS$_\beta$ W-invariant φ_β sur $C_\mathbb{Q}$, mais nous pouvons trouver la formule pour $\beta > 1$ d'ores et déjà en utilisant l'égalité (9). D'abord, en utilisant la base linéaire $(t_{n,m,\gamma})$ de $H \subset C_\mathbb{Q}$ décrite dans la Section 4, on a

$$\varphi(t_{n,m,\gamma}) = 0 \text{ si } \ n/m \neq 1 \ \ \forall \varphi \in K_\beta. \tag{11}$$

Ainsi, cela suffit pour déterminer la restriction de φ_β à $C_\mathbb{Q}$. Pour cela, on peut par exemple utiliser le côté droit de (9) et la formule du Théorème 25 (a) pour $\varphi_{\beta,\alpha}$. Soit $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$\int_G \alpha(\exp 2\pi in\gamma)\ d\alpha = \frac{\mu(b/d)}{\varphi(b/d)} \tag{12}$$

où $\gamma = \frac{a}{b}, (a,b) = 1$ et $(n,b) = d$ est le p.g.c.d de n et b. De plus, μ est la fonction de Moebius et φ est l'indicateur d'Euler. Définissons ρ_β comme la fonction multiplicative telle que

$$\sum_{(n,b)=1} n^{-\beta} = \rho_\beta(b)\ \zeta(\beta). \tag{13}$$

On a $\rho_\beta(b) = \prod_{p|b,\ p\ premier} (1-p^{-\beta})$.

L'unique état KMS_β W-invariant, donné par (9) satisfait

$$\varphi_\beta(e(\gamma)) = \sum_{d|b} \frac{\mu(b/d)}{\varphi(b/d)} \rho_\beta(b/d) d^{-\beta} \tag{14}$$

où b est le dénominateur de la fraction irréductible $\gamma = \frac{a}{b}$. Le côté droit de (14) est une fonction multiplicative de b et il est aussi donné par

$$\varphi_\beta(e(\gamma)) = b^{-\beta} \prod_{p|b,\ p\ premier} (1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1} \tag{15}$$

comme cela peut être constaté en calculant le côté droit de (14) quand b est une puissance de premier. Nous donnerons une autre preuve de (15) dans la prochaine section.

(2) L'énoncé du Théorème 25 (b) s'applique aussi aux états à température 0 notés $\varphi_{\infty,\alpha}$. Pour de tels états extrêmes, l'application $\varphi_{\infty,\alpha}$ restreinte à $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ donne l'appariement associé au corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$, comme nous l'avons vu plus haut.

(3) Le Théorème 25 montre que la fonction de partition du système C^*-dynamique $(C_\mathbb{Q}, \sigma_t)$ est la fonction zêta de Riemann.

7 Unicité des états KMS_β pour $\beta \in]0,1]$

Dans cette section, nous allons montrer que pour $\beta \in]0,1]$, il existe un unique état KMS_β sur la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q}$. Nous avons vu dans la Section 5, Proposition 21, que la C^*-sous-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*) \subset C_\mathbb{Q}$ engendrée par les μ_n est l'algèbre point fixe de l'action de W sur $C_\mathbb{Q}$:

$$C^*(\mathbb{N}^*) = C_\mathbb{Q}^W \tag{1}$$

Puisque W est un groupe abélien compact, son action sur $C_\mathbb{Q}$ a un spectre discret, et nous pouvons considérer pour chaque caractère χ de W le sous-espace spectral correspondant (cf. [Ped]),

$$C_{\mathbb{Q},\chi} = \{x \in C_\mathbb{Q}\ ; \theta_u(x) = \chi(u)\, x \qquad \forall u \in W\} \tag{2}$$

Pour prouver l'unicité des états KMS_β sur $C_\mathbb{Q}$ pour $0 < \beta \leq 1$, nous allons analyser les automorphismes partiels des facteurs de type III_1 associés à $(C^*(\mathbb{N}^*), \varphi_\beta)$ et à un caractère non trivial fixe χ de W.

Nous montrerons que ces automorphismes partiels sont extérieurs. Etant donné un élément V de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ (resp. un caractère χ de W), nous dirons que V (resp. χ) est localisé dans un sous-ensemble F de $\mathcal{P}$, l'ensemble des places finies de $\mathbb{Q}$, ssi

$$V \in (\otimes_{p\in F} C(R_p)) \otimes 1 \subset C(\mathcal{R}) \tag{3}$$

(resp. si χ, vu comme un caractère de $\mathcal{A}^*$, se factorise à travers la projection $W \to \prod_{p\in F} \mathbb{Q}_p^*$).

Enonçons le lemme principal.

LEMME 27. *Soient $\beta \in]0,1]$ et ψ un état KMS$_\beta$ sur le système C^*-dynamique $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$. Alors :*

(a) La restriction de ψ à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est égale à φ_β.

(b) Soit χ un caractère non trivial de W et $V \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ une isométrie partielle tous deux localisés dans un ensemble fini $F \subset \mathcal{P}$, tels que

$$\theta_g(V) = \chi(g)V \qquad \forall g \in W.$$

Alors $\psi(Vx) = 0 \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$.

(c) La restriction de ψ aux sous-espaces spectraux $C_{\mathbb{Q},\chi}, \chi \neq 1$ est égale à 0.

Preuve. (a) Puisque la restriction de σ_t à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes de la Proposition 8, la restriction de ψ à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est un état KMS$_\beta$ et la conclusion découle de la Proposition 8 (a).
(b) Soit $E = V^*V$. Comme $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est commutatif, on a $E = VV^*$; aussi E appartient à l'algèbre $C_{\mathbb{Q}}^W = C^*(\mathbb{N}^*)$. Soit α l'automorphisme de l'algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*)_E$ déterminé par l'égalité

$$\alpha(x) = V\ x\ V^* \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)_E. \tag{4}$$

Soit M le facteur (de type III_1) qui est la fermeture faible de $C^*(\mathbb{N}^*)$ dans la représentation G.N.S. de φ_β. Identifions $C^*(\mathbb{N}^*)$ avec une sous-algèbre faiblement dense de M et étendons l'état φ_β à un état normal $\widetilde{\varphi}_\beta$ sur M. Puisque V appartient à l'algèbre point fixe de σ_t, il appartient au centralisateur de ψ. Il suit de là que l'automorphisme α de $C^*(\mathbb{N}^*)_E$ préserve $\widetilde{\varphi}_\beta$ et s'étend à un automorphisme de M_E. Montrons que pour $\beta \in]0,1]$, cet automorphisme est extérieur. Pour tout $q \in \mathcal{P}\backslash F$, on a

$$E\mu_q \in M_E, \ \ \alpha(E\mu_q) = \chi(g_q)\ E\ \mu_q \tag{5}$$

où $g_q \in \mathcal{R}^* = \prod \mathbb{Z}_p^*$ est donné par ses composants

$$(g_q)_p = q \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}_p^* \quad \text{si } q \neq p, (g_q)_q = 1. \tag{6}$$

Pour prouver (5), notons que pour tout $f \in C(\mathcal{R}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a (cf. Proposition 18 (e))

$$f\mu_n = \mu_n f_n, \quad \text{où} f_n(b) = f(nb) \qquad \forall b \in \mathcal{R}. \tag{7}$$

Ainsi, si f est localisé dans $F \subset P$ et $q \notin F$, on obtient $\theta_{g_q}(f) = f_q$,

$$f\ \mu_q = \mu_q\ \theta_{g_q}(f). \tag{8}$$

En appliquant cela à $f = V$, on obtient $V\mu_q = \chi(g_q)\ \mu_q\ V$, i.e. on obtient (5). Voyons χ comme un caractère de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ où les facteurs premiers de m appartiennent tous à F. Alors nous pouvons simplement écrire $\chi(q)$ plutôt que $\chi(g_q)$, pour $q \notin F$. Il découle de (5) que, modulo les automorphismes intérieurs, l'automorphisme α est le produit tensoriel infini

$$\alpha = \bigotimes_{q \notin F} \rho_{q,\chi(q)} \quad \text{dans} \quad M_{F^c} = \bigotimes_{q \notin F} (M_q, \varphi_{\beta,q}) \tag{9}$$

où pour tout nombre complexe $\lambda, |\lambda| = 1$, on définit $\rho_{p,\lambda}$ comme l'automorphisme de τ_p, tel que

$$\rho_{p,\lambda}(\mu_p) = \lambda\mu_p. \tag{10}$$

Cet automorphisme est un cas particulier de $\sigma_{t,p}$ et il préserve l'état $\varphi_{\beta,p}$ par construction.
Pour tout $\chi \in \widehat{W}$ localisé sur F, appelons $\widetilde{\theta}_\chi$ l'élément de $\mathrm{Ext}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Int}(M)$ déterminé par la classe de

$$\left(\bigotimes_{q\in F} \mathrm{id}\right) \bigotimes \bigotimes_{q\notin F} \rho_{q,\chi(q)} \tag{11}$$

LEMME 28. $\widetilde{\theta}_\chi$ est intérieur relativement à φ_β ssi le produit infini suivant converge absolument en valeur absolue

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} (1-p^{-\beta})(1-\chi(p)\,p^{-\beta})^{-1}.$$

Preuve. On a, dans le facteur M_p de type I_∞, associé à $(\tau_p, \varphi_{\beta,p})$, un facteur unitaire implémentant l'automorphisme $\rho_{p,\chi(p)}$; il est donné par l'opérateur diagonal qui a pour valeurs propres les $\chi(p)^j$, $j \in \mathbb{N}$. Evaluer l'état $\varphi_{\beta,p}$ sur cet unitaire donne

$$(1-p^{-\beta})\sum_0^\infty \chi(p)^n\, p^{-n\beta} = (1-p^{-\beta})(1-\chi(p)\,p^{-\beta})^{-1}$$

et le résultat suit de critères généraux (cf. [Co]). Cela montre en utilisant le théorème de Dirichlet [Ser$_1$] que $\widehat{\theta}_\chi$ est extérieur (χ non trivial) quand $\beta \leq 1$ et est intérieur (puisque φ_β est un facteur d'états de type I_∞) pour $\beta > 1$.
Ce lemme montre que, pour $\beta \in]0,1]$, l'automorphisme α de M_E donné par (4) est extérieur :

$$\{y \in M_E\,; \quad y\,\alpha(x) = xy \quad \forall x \in M_E\} = \{0\}. \tag{12}$$

Maintenant, soit L la forme linéaire sur M_E donnée par

$$L(x) = \psi(Vx) \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)_E. \tag{13}$$

L'inégalité de Schwartz $|L(x)|^2 < \psi(E)\,\psi(x^*x)$ montre que c'est une fonctionnelle linéaire normale sur M_E. Soit u l'isométrie partielle, $u \in M_E$, de sa décomposition polaire $L = u\,|L|$. La condition KMS$_\beta$ pour ψ appliquée à la paire Vx, y ; $x \in C^*(\mathbb{N}^*), y \in C^*(\mathbb{N}^*)$, montre que L satisfait la condition KMS$_\beta$ α-twistée, où $L(\sigma_t(y)\,x)$ est remplacé par $L(\sigma_t(y)\,\alpha(x))$. Maintenant puisque à la fois V et ψ sont σ_t invariants, L l'est aussi et par conséquent, u et $|L|$ le sont aussi. Il suit de ça que la dérivée de Radon-Nikodym $(D|L| : D\widetilde{\varphi}_\beta)_t$ appartient au centralisateur de $\widetilde{\varphi}_\beta$ et est de la forme h^{it} avec

$$|L|(x) = \widetilde{\varphi}_\beta(hx) \quad \forall x \in M_E. \tag{14}$$

De la condition KMS$_\beta$ twistée, on obtient

$$z\,hu = hu\,\alpha(z) \quad \forall z \in M_E \tag{15}$$

ce qui implique par (12) que $hu = 0$ et que $L = 0$.
Cela prouve le Lemme 27 (b). Prouvons 27 (c). Il suffit pour cet objectif, étant donné un caractère $\chi \in \widehat{W}$ localisé dans $F \subset \mathcal{P}$, de trouver une séquence V_n d'isométries partielles $V_n \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$, localisée dans F et telle que

$$\theta_g(V_n) = \chi(g)V_n \quad \forall g \in W\,;\ \varphi_\beta(V_nV_n^*) \underset{n\to\infty}{\to} 1. \tag{16}$$

Alors, $a \in C_{\mathbb{Q},\chi}$ étant donné, on a :

$$\psi(a) = \lim_{n\to\infty} \psi(V_n\, V_n^*\, a) = 0$$

parce que $V_n^*\, a \in C_{\mathbb{Q},1} = C^*(\mathbb{N}^*)$ et le Lemme 27 (b) s'applique. Finalement la construction des V_n se réduit par le Lemme 22 à la construction de fonctions continues $V_n \in C(\prod_{p\in F} \mathbb{Z}_p)$ telles que

$$V_n(gb) = \chi(g) V_n(b) \qquad \forall b \in \prod_F \mathbb{Z}_p, g \in \prod_F \mathbb{Z}_p^* \tag{17}$$

et telles que les $|V_n|$ sont uniformément bornées et convergent ponctuellement vers 1 ; ceci est immédiat et l'existence des isométries partielles V_n en découle.

COROLLAIRE 29. *Pour tout $\beta \in]0,1]$, il existe au moins un état KMS$_\beta$ sur $C_\mathbb{Q}$.*

Preuve. Le groupe W est un groupe compact tel que la somme directe des sous-espaces spectraux $C_{\mathbb{Q},\chi}$, est dense dans $C_\mathbb{Q}$ et cela détermine ψ de manière unique par le Lemme 27.

Nous allons maintenant construire cet unique état KMS$_\beta$ ψ_β sur $C_\mathbb{Q}$ de manière géométrique en utilisant l'action du produit d'arbres de la Section 3. La construction va découler du lemme général suivant, appliqué au C^*-module $\mathcal{E} = C^*(G)e$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et à l'évolution temporelle σ_t de $C^*(\mathbb{N}^*)$.

LEMME 30. *Soit C une C^*-algèbre unitaire, $\mathcal{E}$ un C^*-module sur C, $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de C, $\beta \in]0,\infty[$, φ_β un état KMS$_\beta$ sur C, et $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$ l'espace de Hilbert de la construction GNS pour φ_β.*

(a) *Soit $\mathcal{H}_\beta$ la complétion de $\mathcal{E}$ pour le produit intérieur donné par*

$$\langle \xi, \eta \rangle_\beta = \varphi_\beta(\langle \xi, \eta \rangle) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E}.$$

Alors, l'action des endomorphismes $\mathrm{End}_C(\mathcal{E})$ *sur $\mathcal{E}$ s'étend par continuité à $\mathcal{H}_\beta$.*

(b) *Il existe une représentation unique ρ de C^0 (l'algèbre opposée de C) dans $\mathcal{H}_\beta$ telle que pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\beta$ et $a \in C$ dans le domaine de $\sigma_{i\beta/2}$, on a*

$$\rho(a)\xi = \xi \sigma_{i\beta/2}(a).$$

Cette représentation commute avec l'action à gauche de $\mathrm{End}_C(\mathcal{E})$.

Preuve. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ est le produit tensoriel des C^*-modules

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{E} \otimes_C \mathcal{H}_{\varphi_\beta} \tag{18}$$

de telle sorte que la première assertion en découle. La seconde assertion en découle également, en utilisant $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$, comme une algèbre de Hilbert gauche et le théorème de stabilisation de Kasparov [Ka].
Nous appliquons ce lemme avec $C = C^*(\mathbb{N}^*)$, $\mathcal{E} = C^*(G)e$, et $\sigma_t \in \mathrm{Aut}\ C$ donné par l'évolution temporelle (Proposition 7 (c)) de $C^*(\mathbb{N}^*)$. Comme $\mathcal{E}$ est un espace de fonctions sur Δ, il en est de même de chaque $\mathcal{H}_\beta$, et pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous prenons ε_α la fonction caractéristique de $\{\alpha\} \subset \Delta$.

Les vecteurs $\varepsilon_\alpha, \alpha \in \Delta$ sont de longueur unité dans chaque $\mathcal{H}_\beta$ et fibrent toujours un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\beta$. Pour $\beta = 1$, ils forment une base orthonormée de telle sorte que $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\Delta)$. Pour calculer le produit intérieur $\langle \varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha'} \rangle_\beta$ dans $\mathcal{H}_\beta$, nous allons d'abord travailler localement, i.e. nous fixons le corps local $K = \mathbb{Q}_p$, et appliquons le Lemme 30 à $C = C^*(P_K)_e$ la C^*-algèbre réduite de P_K relative à la projection $e = 1_{P_R}$, alors que le C^*-module est $\mathcal{E} = C^*(P_K)e$. Nous utilisons sur C l'état $\varphi_{\beta,p}$.

Alors le Lemme 30 fournit un produit intérieur sur l'espace des fonctions à support fini sur l'arbre $T_P = P_K/P_R$.

Calculons maintenant explicitement ce produit intérieur sur l'arbre T associé à n'importe quelle valeur β. Ainsi, K est un corps local, $K = \mathbb{Q}_p$, et nous notons d'abord qu'en transportant $\varphi_{\beta,p}$ par l'isomorphisme canonique entre τ_p et la C^*-algèbre réduite $C^*(P_K)_e$, sa valeur sur une fonction P_R-bi-invariante $f(s), s \in P_K$ est donnée par (cf. formula (9) de la Section 3),

$$\varphi_{\beta,p}(f) = \left(\sum_{k>0} p^{k(1-\beta)} f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) (1 - p^{\beta-1}) + f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \tag{19}$$

Soit $g \in P_K, g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix}$. Le produit intérieur $\langle g\, \varepsilon_0,\, \varepsilon_0 \rangle_\beta$, avec ε_0 correspondant au point de base, est égal à $\varphi_{\beta,p}(f)$, où la fonction f est associée par la formule (13) de la section 3 aux classes à droite P_R et $g\, P_R$ dans P_K/P_R :

$$f(s) = m(gP_R \cap P_R s^{-1}) \qquad \forall s \in P_K \tag{20}$$

où m est la mesure de Haar à gauche sur P_K. Nous avons juste besoin d'évaluer $f(s)$ pour $s = \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} P_R\, s^{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;\, \mathrm{val}(n) \geq 0, \mathrm{val}(h) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} + n \\ 0 & h \end{bmatrix} ;\, \mathrm{val}(n) \geq 0, \mathrm{val}(h) = 0 \right\} \end{aligned} \tag{21}$$

Tous ses éléments $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & a \end{bmatrix}$ satisfont $\mathrm{val}(a) = 0$. Cela implique que $P_R\, s^{-1} \cap g\, P_R \neq 0$ seulement si $\mathrm{val}(h_0) = 0$. Ainsi

$$\langle g\, \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle = 0 \qquad \text{si} \qquad \mathrm{val}(h_0) \neq 0 \quad \left(\text{pour } \; g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix} \in P_K \right). \tag{22}$$

Supposons maintenant que $\mathrm{val}(h_0) = 0$; en remplaçant g par $g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_0^{-1} \end{bmatrix}$, nous pouvons supposer que $ho = 1$ sans changer $g\, \varepsilon_0$. On a

$$\begin{aligned} g\, P_R &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} ;\, \mathrm{val}(n_1) \geq 0, \mathrm{val}(h_1) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n_1 + h_1 n_0 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} ;\, \mathrm{val}(n_1) \geq 0, \mathrm{val}(h_1) = 0 \right\} \end{aligned} \tag{23}$$

On a $g\, P_R \cap P_R\, s^{-1} \neq 0$ seulement si $\mathrm{val}(n_0) = -k$. Supposons que $\mathrm{val}(n_0) = -k$. Alors nous avons besoin de calculer la mesure de Haar multiplicative sur l'ensemble de $h_1 \in R^*$ telle que $h_1 n_0 = p^{-k} \bmod R$. Cela est vérifié ssi $h_1 \in p^{-k}\, n_0^{-1} + n_0^{-1}\, R = p^k\, n_0^{-1} + p^k\, R$. Les mesures de Haar

additive et multiplicative coïncident sur R^* à un coefficient global près $d^*h = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} dh$. Ainsi nous obtenons l'égalité, avec $g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= (1-p^{-1})^{-1} p^{-k} \qquad \text{si } \ k = -\mathrm{val}(n_0) \\ f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } k \neq -\mathrm{val}(n_0) \end{aligned} \tag{24}$$

Ceci avec la formule (19) donne l'égalité

$$\varphi_{\beta,p}(f) = p^{-k\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}, \quad k = -\mathrm{val}(n_0) \tag{25}$$

i.e.

$$\langle g\, \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle_\beta = p^{-k\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}, \tag{26}$$

où $g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, k = -\mathrm{val}(n_0)$.

L'étape suivante consiste à comprendre la signification géométrique de l'orbite de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0 \right\}$ dans l'arbre T_p et de la valeur $k = -\mathrm{val}(n)$. Puisque l'action de P_K sur l'arbre T_p fixe un point à l'∞, elle préserve les horocycles correspondant à ce point. Ces horocycles sont les classes d'équivalence de la relation $R_\infty : L \sim L'$ ssi $\exists q$ tel que $t^q\, L = t^q\, L'$ où t est la translation hyperbolique d'une unité vers le point à l'∞.

Nous vérifions d'abord que les deux treillis L, L' sont R_∞ équivalents ssi ils sont sur la même orbite du sous-groupe $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, n \in K$ de P_K. Ce sous-groupe est un sous-groupe normal et par conséquent, il définit une relation d'équivalence qui est stable par l'action à gauche de P_K. L'application t est donnée par

$$t(g\, L_0) = g\, g_p\, L_0 \qquad \forall g \in P_K \qquad \text{avec } g_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \tag{27}$$

Plus généralement, $t^q(g\ L_0) = g\ g_p^q\ L_0 \quad \forall g \ \in \ P_K$. Ainsi $g_1\ L_0 \ \sim \ g_2\ L_0(R_q)$ ssi $g_1\ g_p^q\ L_0 = g_2\ g_p^q\ L_0$, i.e.

$$g_2^{-1}\ g_1 \ \in \ g_p^q\ P_R\ g_p^{-q}. \tag{28}$$

Cela est vérifié ssi $g_2^{-1} g_1$ est de la forme $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & h \end{bmatrix}, \mathrm{val}(h) = 0, \mathrm{val}(m) \geq -q$. Ainsi $g_1 L_0 \sim g_2\ L_0(R_\infty)$ ssi $g_2^{-1} g_1 \in K \rtimes R^*$. Les deux treillis $g\ L_0$ et $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g\ L_0$ satisfont trivialement cette relation et inversement, si $g_1\ L_0 \sim g_2 L_0(R_\infty)$, nous pouvons écrire g_2 comme $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ g_1$ sans affecter $g_j\ L_0$.

Interprétons maintenant la valeur de $-\mathrm{val}(m)$ as comme une fonction de distance entre L_0 and $L = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0$. Soit $k = -\mathrm{val}(m)$. Nous savons que $t^k(L_0) = t^k(L)$ et que cela n'est pas vrai pour $k-1$. Ainsi $d(L_0, L) = 2k$. On obtient

LEMME 31. Soit $L, L' \in T$ deux treillis.

(a) S'ils appartiennent à des classes d'équivalence d'horocycles différents, ils sont orthogonaux pour $\langle\ \rangle_\beta$.

(b) S'ils appartiennent à des classes de même horocycle à distance $d(L, L') = 2k > 0$, on a

$$\langle \varepsilon_L, \varepsilon_{L'} \rangle_\beta = p^{-k\beta}(1 - p^{\beta-1})(1 - p^{-1})^{-1}.$$

(c) Si $L = L'$, alors $\langle \varepsilon_L, \varepsilon_{L'} \rangle_\beta = 1$.

Remarques.

(a) Pour $\beta \to +\infty$, le produit intérieur ci-dessus converge vers une valeur non nulle seulement si $L = L'$ ou si $L \neq L'$ mais $L \sim L'(R_1)$, auquel cas il tend vers $-p^{-1}(1 - p^{-1})^{-1}$.

(b) Pour $\beta = 0$, le produit intérieur converge vers 1 sur la classe d'équivalence de chaque horocycle, qui se réduisent alors à un seul point dans $\mathcal{H}_\beta, \beta = 0$.

Calculons maintenant le produit intérieur correspondant sur $\Delta = \prod(T_p, L_0) = P^+_{\mathbb{Q}}/P^+_{\mathbb{Z}}$. Appelons à nouveau L_0 le point de base. Etant donnée $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} = g, n \in \mathbb{Q}, h \in \mathbb{Q}^*_+$, pour obtenir un produit intérieur non nul, $\langle g\ L_0, L_0 \rangle$, nous avons besoin qu'en chaque place $p, g_p\ L_0 \sim L_0(R_\infty)$ et ainsi que $\mathrm{val}(g_p) = 0$. Alors $h = 1$. Posons alors $N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Q} \right\}$ et essayons de comprendre le produit intérieur sur l'orbite $N\ L_0$. Nous avons une base ε_x paramétrée par $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0.$$

Le produit intérieur $\langle \varepsilon_x, \varepsilon_0 \rangle_\beta$ est alors donné, en utilisant le Lemme 31, par

$$\langle \varepsilon_x, \varepsilon_0 \rangle_\beta = \prod_{\substack{p \in P \\ k_p \neq 0}} p^{-k_p\beta}(1 - p^{\beta-1})(1 - p^{-1})^{-1}$$

où $x = a/b, (a, b) = 1$ et $b = \prod_p p^{k_p}$ est la decomposition de b comme produit de puissances de premiers. Plus généralement, elle est invariante par translations, i.e. $\langle \varepsilon_x, \varepsilon_y \rangle_\beta = \langle \varepsilon_{x-y}, \varepsilon_0 \rangle_\beta$; ainsi la positivité qui en découle est le fait que la fonction donnée par (29) est de type positif sur le groupe des racines de l'unité $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Cette fonction est la fonction ψ_β du Théorème 5.

On a $\langle g_1\ L_0, g_2\ L_0 \rangle_\beta = 0$ si $g_2^{-1} g_1 \notin N$.

Prenons alors une orbite arbitraire $N\ g\ L_0, g \in P^+_{\mathbb{Q}}$. Nous avons besoin de calculer $\langle (1, x)\ g\ L_0, (1, y)\ g\ L_0 \rangle_\beta$ où $x, y \in \mathbb{Q}$ et $(1, x)$, $(1, y)$ sont les éléments correspondant de N. On a $\langle (1, x)\ g\ L_0, (1, y)\ g\ L_0 \rangle = (\langle g\ \varepsilon_{x'}, g\ \varepsilon_{y'} \rangle = \langle \varepsilon_{x'-y'}, \varepsilon_0 \rangle$ où $(1, x') = g^{-1}(1, x)g$ et $(1, y') = g^{-1}(1, y)g$. Ainsi, nous voyons que les orbites $N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \varepsilon_0$, $k \in \mathbb{Q}^*_+$, sont orthogonaux deux à deux pour $\langle\ \rangle_\beta$ et le produit intérieur est, à un renommage près, donné par (29) sur chacun d'eux.

Nous sommes maintenant prêts à décrire les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ associés par le Lemme 30 au C^*-module $\mathcal{E} = Be$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et les états KMS φ_β, et alors à obtenir le commutant de $P^+_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{H}_\beta$ comme une représentation unitaire de la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}}$.

PROPOSITION 32.

(a) *Soit $\mathcal{H}_\beta$ la complétion de l'espace de Hilbert du C^*-module $C^*(P_A)e$, sur $eC^*(P_A)e = C^*(\mathbb{N}^*)$, avec l'état φ_β. Alors $\mathcal{H}_\beta$ a une base naturelle indexée par $P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$, et son produit intérieur est invariant par translations à gauche par $P_{\mathbb{Q}}^+$ et donné par*

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_e, \varepsilon_e \right\rangle = 0 \qquad \text{à moins que } a = 1$$
$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_e, \varepsilon_e \right\rangle = \psi_\beta(b)$$

où ψ_β est la fonction de type positif définie dans le Théorème 5.

(b) *La C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}}^0$ admet une représentation dans $\mathcal{H}_\beta$ donnée par la convolution droite avec $\delta^{\beta/2} f$ pour toute fonction $P_{\mathbb{Z}}^+$-bi-invariante f sur $P_{\mathbb{Q}}^+$.*

(c) *Le vecteur ε_0 = classe de $P_{\mathbb{Z}}^+$ est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$, séparateur pour $C_{\mathbb{Q}}$, $\overline{C_{\mathbb{Q}}\varepsilon_0}$ est l'ensemble des points fixes de $P_{\mathbb{Z}}^+ \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ et $(C_{\mathbb{Q}})''$ est le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $\mathcal{H}_\beta$.*

(d) *Le vecteur ε_0 définit un état KMS_β sur $C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. La preuve de (a) découle de (29). Définissons $\mathcal{H}_{\beta,1}$ comme le sous-espace de $\mathcal{H}_\beta$ engendré par l'orbite $N\varepsilon_0$ de ε_0 sous le sous-groupe normal N de $P_{\mathbb{Q}}^+$. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{Q}_+^*$, nous prenons

$$\mathcal{H}_{\beta,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \mathcal{H}_{\beta,1}. \tag{30}$$

Les sous-espaces $\mathcal{H}_{\beta,k}$ sont orthogonaux deux à deux et $\mathcal{H}_\beta$ est leur somme directe.
Prouvons (b). Nous savons que l'action par convolution droite de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ d'une fonction $P_{\mathbb{Z}}^+$-bi-invariante sur $P_{\mathbb{Q}}^+$ amène une représentation de $\mathcal{H}^0$ sur l'enveloppe linéaire de la base naturelle $\varepsilon_x, x \in P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$ de $\mathcal{H}_\beta$. Cela est encore vrai si l'on twiste cette action par l'automorphisme (non involutif) de $\mathcal{H}$ donné par la multiplication par $\delta^{\beta/2}$. Nous avons alors seulement besoin de montrer que la nouvelle représentation de $\mathcal{H}^0$ dans $\mathcal{H}_\beta$ est *involutive*. Quand nous restreignons cette représentation à l'anneau de groupes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, nous obtenons (comme $\delta = 1$ sur les classes doubles dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) que la représentation correspondante de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est donnée par

$$\rho(\gamma) \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_0 = \begin{bmatrix} 1 & b+\gamma \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_0. \tag{31}$$

Ainsi $\rho(\gamma)$ est diagonal dans la décomposition $\mathcal{H}_\beta = \oplus \mathcal{H}_{\beta,k}$, et sa restriction à $\mathcal{H}_{\beta,k}$ est unitaire puisque l'action gauche de N sur $\mathcal{H}_{\beta,k}$ est unitaire.

Quand nous restreignons la représentation ρ de $\mathcal{H}^0$ à la sous-algèbre involutive engendrée par les μ_n, son unitarité découle du Lemme 30 (b). Le calcul explicite de l'isométrie $U_p = \rho(\mu_p^*)$ dans $\mathcal{H}_\beta$ associée à μ_p^*, p un nombre premier, est le suivant. Nous appelons comme ci-dessus t_p la translation hyperbolique d'une unité de longueur vers le point à l'∞ dans l'arbre T_p. Nous le faisons agir trivialement sur les autres arbres. On obtient alors

$$U_p\, \varepsilon_\alpha = p^{\beta/2-1} \sum_{t_p(\alpha')=\alpha} \varepsilon_{\alpha'}. \tag{32}$$

On peut vérifier directement en utilisant le Lemme 31 que U_p est effectivement une isométrie.
Nous avons ainsi montré que ρ est une représentation involutive de $\mathcal{H}^0$ dans $\mathcal{H}_\beta$ et par la Proposition 19, elle s'étend à une représentation de $C^0_\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{H}_\beta$. Cela prouve (b). Par construction, ε_0 est cyclique pour $P^+_\mathbb{Q}$. Puisque l'action ci-dessus de $\mathcal{H}^0$ (et $C^0_\mathbb{Q}$) commute avec $P^+_\mathbb{Q}$, le vecteur ε_0 est séparateur pour $C^0_\mathbb{Q}$. La preuve de la dernière assertion de (c) est la même que dans le cas $\beta = 1$ (cf. Lemme 17). La preuve de (d) est la même que celle du Lemme 16.
En combinant le Corollaire 29 et la Proposition 32 (d), nous obtenons que pour $\beta \in]0,1]$, l'état sur $C_\mathbb{Q}$ donné par

$$\varphi(x) = \langle \rho(x)\varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle \qquad \forall x \in C_\mathbb{Q} \tag{33}$$

est le seul état KMS_β. Ceci combiné à 32 (a) complète la preuve du Théorème 5.

Remarques 33.

(a) Soient $\mathcal{H}_\beta$, Δ l'opérateur de multiplication par k^β sur $\mathcal{H}_{\beta,k}$. Il existe un unique poids ψ_β (à une constante multiplicative près) sur $(P^+_\mathbb{Q})''$ à groupe modulaire d'automorphismes

$$\sigma^{\psi_\beta}_t(.) = \Delta^{it}.\Delta^{-it}. \tag{34}$$

Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $\varepsilon_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix} \varepsilon_d$ est séparateur pour $C''_\mathbb{Q}$ mais non cyclique. Son extension cyclique $\overline{C_\mathbb{Q}\varepsilon_n}$, définit une projection $E_m \in (P_\mathbb{Q})''$ qui appartient au centralisateur de ψ_β et sur lequel ψ_β est fini. Sur le sous-espace E_m, l'opérateur modulaire de la paire ($P''_\mathbb{Q}/E_m, C''_\mathbb{Q}$ et vecteur ε_m) est la restriction de Δ. Le sous-espace E_m est l'espace des points fixes du sous-groupe $\begin{bmatrix} 1 & m\mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P^+_\mathbb{Q}$. Ces sous-espaces forment une famille imbriquée (i.e. $E_m \subset E_{m'}$ si m divise m') qui est totale dans $\mathcal{H}_\beta$.

(b) Nous avons utilisé tout au long de cet article la paire de groupes $P^+_\mathbb{Q}, P^+_\mathbb{Z} \subset P^+_\mathbb{Q}$ plutôt que la paire $P_\mathbb{Q}, P_\mathbb{Z} \subset P_\mathbb{Q}$. La relation entre les systèmes C^*-dynamiques correspondant $C^*(P^+_\mathbb{Q},\ P^+_\mathbb{Q}), \sigma_t$ et $C^*(P_\mathbb{Q}, P_\mathbb{Z}), \sigma_t$ est assez simple. En effet, le dernier est juste la C^*-algèbre des points fixes de l'involution α du premier donné par la conjugaison complexe $z \to \overline{z}$ vue comme un élément de $W = Gal(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$.

Ceci est facile à vérifier parce que la classe double X modulo $P_\mathbb{Z}$ d'un élément $g \in P_\mathbb{Q}, g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ est la même que la double classe modulo $P_\mathbb{Z}$ de $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \varepsilon = \mathrm{Sign}(a)$, ce qui nous autorise à supposer que $a > 0$. Cela montre que les fonctions $P_\mathbb{Z}$-bi-invariantes sur $P_\mathbb{Q}$ incluent toutes les fonctions $P^+_\mathbb{Z}$ invariantes sur $P^+_\mathbb{Q}$, qui sont invariantes sous l'involution

$$g \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad g \in P^+_\mathbb{Q}. \tag{35}$$

On obtient ainsi l'égalité σ_t équivariante

$$C^*(P_\mathbb{Q}, P_\mathbb{Z}) = C^*(P^+_\mathbb{Q}, P^+_\mathbb{Z})^\alpha \tag{36}$$

et on peut réécrire le théorème principal de notre article en fonction de $C^*(P_\mathbb{Q}, P_\mathbb{Z})$.

(c) Dans cet article, nous avons ignoré la place à l'infini dans notre traitement des états ou des poids KMS_β et dans la construction de $C_{\mathbb{Q}}$ à partir de l'action sur le produit d'arbres (Section 2). Nous avons obtenu, pour les places finies, l'action de P_K sur l'arbre de $SL(2,K)$ ainsi que le produit intérieur adéquat sur les fonctions sur l'arbre (Section 5) à partir de la compréhension des poids KMS_β sur $C^*(P_K)$ et de la réduction par la projection $e \in C^*(P_K), e = 1_{P_R}$.

A la place infinie, le système C^*-dynamique en jeu est $C^*(P_{\mathbb{R}}), \sigma_t$ où $P_{\mathbb{R}}$ est le groupe de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad ; \qquad b \in \mathbb{R}, \ \ a \in \mathbb{R}^* \tag{37}$$

et où σ_t est donné par le module δ de $P_{\mathbb{R}}$,

$$\sigma_t(f)(g) = \delta(g)^{-it} f(g) \qquad \forall f \in L^1(P_{\mathbb{R}}), \ t \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

La C^*-algèbre de $P_{\mathbb{R}}$ est, en utilisant l'identification de $\mathbb{R}$ avec son groupe dual de Pontrjagin, donnée par

$$C^*(P_{\mathbb{R}}) = C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^* \tag{39}$$

où l'action de $\mathbb{R}^*$ se fait par homothéties. Cette action a deux orbites, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\{0\}$ et à la séquence exacte équivariante de C^*-algèbres

$$0 \to C_0(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \to 0 \tag{40}$$

correspond la séquence exacte de produits croisés :

$$0 \to \mathcal{K} \to C^*(P_{\mathbb{R}}) \to C^*(\mathbb{R}^*) \to 0 \tag{41}$$

similaire à la séquence exacte de la C^*-algèbre de Toeplitz . Ici l'idéal à deux côtés $\mathcal{K}$ est la C^*-algèbre élémentaire d'opérateurs compacts. La théorie de la représentation de $C^*(P_{\mathbb{R}})$ découle immédiatement de (7) et en plus des caractères de $C^*(\mathbb{R}^*)$ qui fournissent des représentations à une dimension de $C^*(P_{\mathbb{R}})$, on a une unique représentation irréductible de dimension infinie π. Cette représentation peut être décrite comme suit.
On pose $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ avec

$$(\pi(g)\xi)(t) = |a|^{1/2} \xi(at - b) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}) \tag{42}$$

où $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ comme ci-dessus, appartient à $P_{\mathbb{R}}$.
Pour chaque $\beta \in]0, \infty[$, il existe, à normalisation près, un unique poids KMS_β sur $C^*(P_{\mathbb{R}})$, donné par

$$\varphi_\beta(f) = \mathrm{Trace}(\pi(f)\Delta^{-\beta/2}) \qquad \forall f \in C^*(P_{\mathbb{R}})^+ \tag{43}$$

où $\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ est le Laplacien, un opérateur auto-adjoint non-borné dans $L^2(\mathbb{R})$.
Par construction, φ_β est le poids du facteur de type I_∞ qui est le poids dominant ([C|], [C-T]) sur le facteur de type I_∞ correspondant. Il découle de cela que pour tout facteur M de poids ψ, le centralisateur de $\psi \otimes \varphi_\beta$ est l'algèbre de von Neumann semi-finie associée de la décomposition continue de M, i.e. le produit croisé par le groupe modulaire d'automorphismes σ_ψ,

$$(M \otimes I_\infty)_{\psi \otimes \varphi_\beta} = M \rtimes_{\sigma^\psi} \mathbb{R}. \tag{44}$$

Dans notre cas, avec $\beta \in]0,1]$, il est naturel de prendre pour M le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ agissant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ (cf. Proposition 32). Pour obtenir le produit croisé (44), il est alors naturel d'utiliser à la place infinie l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta^\infty$ de la construction GNS du poids φ_β sur $C^*(P_{\mathbb{R}})$. Dans le produit tensoriel $\mathcal{H}_\beta \otimes \mathcal{H}_\beta^\infty$, on a une action naturelle de produit du groupe P_A sur les adèles $A = \mathcal{A} \times \mathbb{R}$. Le produit croisé (44) est alors contenu dans le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ qui est un *sous-groupe discret* de P_A.

Bibliographie

[A-W] H. Araki and E.J. Woods. A classification of factors. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., **4** (1968), 51-130.

[Bi] M. Binder. Induced factor representations of discrete groups and their type. Jour. Functional Analysis, to appear.

[Bl] B.E. Blackadar. The regular representation of restricted direct product groups. Jour. Functional Analysis, **25** (1977), 267-274.

[Bos-C] J.-B. Bost and A. Connes. Produits eulériens et facteurs de type III. C.R. Acad. Sci. Paris, **315** (I) (1992), 279-284.

[Br-R] O. Bratteli and D.W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics I, IT. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[Com] F. Combes. Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. Compos. Math. **23** (1971), 49-77.

[C] A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

[Co] A. Connes. Une classification des facteurs de type III. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) **6** (1973), 133-252.

[C-T] A. Connes and M. Takesaki. The flow of weights on factors of type III. Tohoku Math. J., **29** (1977), 473-575.

[Dir] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. Proc. Royal Soc. London, **A114** (1927), 243-265.

[G] A. Guichardet. Symmetric Hilbert spaces and related topics. Lecture Notes in Mathematics, **261**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.

|H] R. Haag. Local quantum physics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1992.

[J] B. Julia. Statistical theory of numbers. in Number Theory and Physics, Les Houches Winter School, J.-M. Luck, P. Moussa et M. Waldschmidt eds., Springer-Verlag, 1990.

[P] G.K. Pedersen. C^*-algebras and their automorphism groups. Academic Press, London-New Vork-San Francisco, 1979.

[Ren] J. Renault. A groupoid approach to C^*-algebras. Lecture Notes in Mathematics, **793** (1980), Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

[Ser_1] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique. P.U.F. Paris, 1970.

[Ser_2] J.-P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2. Astérisque, **46** (1977).

[Sh] G. Shimura. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton University Press, 1971.

[Spe] D. Spector. Supersymmetry and the Möbius inversion function. Commun. Math. Phys., **127** (1990), 239-252.

[T] J. Tate. Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta function. in Algebraic Number Theory, J.W.S. Cassels et A. Frölich eds. Academic Press, 1967.

[We_1] A. Weil. Fonction zêta et distributions. Séminaire Bourbaki n°312, juin 1966.

[We_2] A. Weil. Basic number theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

J.-B. Bost and A. Connes
Institut des Hautes Études Scientifiques,
35, route de Chartres,
F-91440 Bures-sur-Yvette, France

La théorie quantique de l'émission et de l'absorption de radiation

P. A. M. Dirac
St. John's College, Cambridge, et Institut de Physique Théorique, Copenhague

Communiquée par N. Bohr, For. Mem. R.S. Reçue le 2 février 1927 [1]

1 Introduction et résumé

La nouvelle théorie quantique, basée sur la supposition que les variables dynamiques n'obéissent pas à la loi commutative de la multiplication, s'est maintenant développée suffisamment pour former une théorie complète de la dynamique. Elle permet de traiter mathématiquement le problème de n'importe quel système dynamique composé d'un certain nombre de particules et des forces instantanées agissant entre elles, lorsque ce système est décrit par une fonction hamiltonienne, et on peut interpréter les mathématiques d'un point de vue physique par une méthode assez générale. D'autre part, presque rien n'a été fait jusqu'à présent sur l'électrodynamique quantique. Les questions du traitement correct d'un système dans lequel les forces se propagent à la vitesse de la lumière plutôt qu'instantanément, de la production d'un champ électromagnétique par un électron en mouvement, et de la réaction de ce champ sur l'électron n'ont pas encore été traitées. De plus, il y a une sérieuse difficulté pour faire que la théorie satisfasse toutes les exigences du principe restreint de la relativité, puisqu'alors une fonction hamiltonienne ne peut plus être utilisée. Cette question de la relativité est, bien sûr, liée aux précédentes, et il sera impossible de répondre à aucune de ces questions sans répondre à toutes. Pourtant, il semble possible de construire une théorie satisfaisante de l'émission de radiation et de la réaction du champ de la radiation sur le système l'émettant sur la base d'une cinématique et d'une dynamique qui ne soient pas strictement relativistes. C'est le principal objectif de cet article. La théorie est non-relativiste seulement par le fait que le temps est toujours compté via un c-nombre, plutôt que d'être traité symétriquement avec l'espace des coordonnées. La variation de la relativité de la masse avec la vitesse est prise en compte sans difficulté.

Les idées sous-tendant la théorie sont très simples. Considérons un atome interagissant avec un champ de radiation, que l'on peut supposer pour sa définissabilité comme étant enfermé dans une boîte de telle sorte à n'avoir qu'un ensemble discret de degrés de liberté. En résolvant la radiation en ses composantes de Fourier, on peut considérer l'énergie et la phase de chacun des composants comme étant des variables dynamiques décrivant le champ de radiation. Ainsi, si E_r est l'énergie d'un composant appelé r et si θ_r est la phase correspondante (définie comme la durée depuis laquelle l'onde est dans une phase standard), on peut supposer chaque E_r et θ_r comme formant une paire de variables canoniquement conjuguées. En l'absence de toute interaction entre le champ et l'atome, le système complet champ plus atome sera décrit par l'hamiltonien

$$H = \Sigma_r E_r + H_0 \tag{1}$$

égal à l'énergie totale, H_0 étant l'hamiltonien pour l'atome seul, puisque les variables E_r, θ_r satisfont trivialement leurs équations canoniques de mouvement

$$\dot{E}_r = -\frac{\partial H}{\partial \theta_r} = 0, \qquad \dot{\theta}_r = -\frac{\partial H}{\partial E_r} = 1.$$

[1] J'ai traduit ce texte en français et cette traduction comporte sûrement des erreurs qui n'engagent que moi, Denise Vella-Chemla.

Quand il y a interaction entre le champ et l'atome, cela pourrait être pris en compte par la théorie classique par une addition d'un terme d'interaction à l'hamiltonien (1), qui pourrait être une fonction des variables de l'atome et des variables E_r, θ_r, qui décrivent le champ. Ce terme d'interaction donnerait l'effet de la radiation sur l'atome, et également la réaction de l'atome sur le champ de radiation.

Pour qu'une méthode analogue puisse être utilisée en théorie quantique, il est nécessaire de supposer que les variables E_r, θ_r, sont des q-nombres satisfaisant les conditions quantiques standard $\theta_r E_r - E_r\theta_r = ih$ etc., où h est $(2\pi)^{-1}$ fois la constante de Planck habituelle, comme les autres variables dynamiques du problème. Cette supposition donnent immédiatement à la radiation des propriétés quantiques lumineuses[2]. Car si ν_r est la fréquence du composant r, $2\pi\nu_r\theta_r$ est une variable d'angle, de telle façon que son conjugué canonique $E_r/2\pi\nu_r$ peut seulement prendre un ensemble discret de valeurs différant par des multiples de h, ce qui signifie que E_r peut uniquement varier par multiples entiers du quantum $(2\pi h)\nu_r$. Si maintenant on ajoute un terme d'interaction (pris en compte par la théorie classique) à l'hamiltonien (1), le problème peut être résolu selon les règles de la mécanique quantique, et l'on s'attend à obtenir les résultats corrects pour l'action de la radiation et de l'atome l'un sur l'autre. Nous montrerons que nous obtenons effectivement les lois correctes pour l'émission et l'absorption de radiation, et les valeurs correctes pour les A et B d'Einstein. Dans la théorie précédente de l'auteur[3], où les énergies et les phases des composants de la radiation étaient des c-nombres, seuls les B pouvaient être obtenus, et la réaction de l'atome sur la radiation ne pouvait pas être prise en compte.

Il sera également montré que l'hamiltonien qui décrit l'interaction de l'atome et des ondes électromagnétiques peut être rendu identique à l'hamiltonien pour le problème de l'interaction d'un atome avec un ensemble de particules en mouvement à la vitesse de la lumière et satisfaisant les statistiques d'Einstein-Bose, par un choix judicieux de l'énergie d'interaction pour les particules. Le nombre de particules ayant n'importe quelle direction de mouvement et d'énergie, qui peut être utilisé comme une variable dynamique dans l'hamiltonien pour les particules, est égal au nombre de quanta d'énergie de l'onde correspondante dans l'hamiltonien des ondes. Il y a ainsi une harmonie complète entre les descriptions ondulatoire et lumineuse quantique de l'interaction. Nous allons effectivement construire la théorie à partir du point de vue quantique et montrer que l'hamiltonien se transforme naturellement en une formule qui ressemble à la formule pour les ondes.

Le développement mathématique de la théorie a été rendu possible par une théorie générale de l'auteur de transformation des matrices quantiques[4]. Comme nous comptons le temps comme un c-nombre, nous pouvons utiliser la notion de valeur de toute variable dynamique à tout instant. Cette valeur est un q-nombre, qui peut être représenté par une "matrice" généralisée selon de nombreux modèles matriciels différents, certains d'entre eux pouvant avoir des intervalles continus pour les colonnes et les lignes, et pouvant nécessiter que les éléments des matrices appartiennent à certaines sortes d'infinités (du type donné par les fonctions δ)[5]. Un modèle de matrices peut être trouvé dans lequel tous les ensembles souhaités de constantes d'intégration du système dynamique qui commutent sont représentés par des matrices diagonales, ou dans lequel les variables qui commutent sont représentées par des matrices qui sont diagonales à un temps spécifié[6]. Les valeurs des

[2] Des suppositions similaires ont été utilisées par Born and Jordan [*Z. f. Physik*, vol. 34, p. 886 (1925)] dans le but de prendre en charge la formule classique de l'émission de radiation par un dipole en théorie quantique, et par Born, Heisenberg and Jordan [*Z. f. Physik.* vol. 35, p. 606 (1925) pour calculer les fluctuations d'énergie dans le champ de radiation du corps noir.]

[3] *Roy. Soc. Proc.* A, vol. 112, p. 661, §5 (1926). Cela est cité ensuite dans *loc. cit.*, I.

[4] *Roy. Soc. Proc.* A, vol. 113, p. 621 (1927). Cela est cité ensuite par *loc. cit.*, II. Une théorie globalement équivalente a été obtenue indépendamment par Jordan [*Z. f. Physik.* vol. 40, p. 809 (1997). Voir aussi F. London, *Z. f. Physik.* vol. 40, p. 193 (1926)

[5] *Loc. cit. II,* §2.

[6] On peut utiliser un modèle de matrices dans lequel les variables qui commutent sont à tout instant représentées

éléments diagonaux d'une matrice diagonale représentant un q-nombre quelconque sont les valeurs caractéristiques de ce q-nombre. Les coordonnées cartésiennes ou le moment auront en général toutes les valeurs caractéristiques de $-\infty$ à $+\infty$, alors qu'une variable d'action prend seulement un ensemble discret de valeurs caractéristiques. (Nous prendrons pour règle d'utiliser des lettres sans prime ($'$) pour dénoter les variables dynamiques ou q-nombres, et les mêmes lettres avec prime ($'$) ou double prime ($''$) pour dénoter leurs valeurs caractéristiques. Les fonctions de transformation ou fonctions propres sont des fonctions des valeurs caractéristiques et non les q-nombres eux-mêmes, de telle sorte qu'elles peuvent toujours s'écrire en termes de variables avec prime ($'$ ou $''$).)

Si $f(\xi, \eta)$ est n'importe quelle fonction des variables canoniques ξ_k, η_k, la matrice représentant f à tout instant dans le modèle de matrices dans lequel les ξ_k à l'instant t sont des matrices diagonales peut s'écrire sans aucun problème, puisque les matrices représentant les ξ_k et les η_k eux-mêmes au temps t sont connues, notamment,

(2)
$$\begin{cases} \xi_k(\xi'\xi'') = \xi'_k\delta(\xi'\xi'') \\ \eta_k(\xi'\xi'') = -ih\delta(\xi'_1 - \xi''_1)\dots\delta(\xi'_{k-1} - \xi''_{k-1})\delta'(\xi'_k - \xi''_k)\delta(\xi'_{k+1} - \xi''_{k+1})\dots \end{cases}$$

Ainsi, si l'hamiltonien H est défini comme une fonction des ξ_k et des η_k, on peut immédiatement écrire la matrice $H(\xi'\xi'')$. On peut ainsi obtenir la fonction de transformation, disons (ξ'/α'), qui se transforme en un modèle de matrice (α) dans lequel l'hamiltonien est une matrice diagonale, puisque (ξ'/α') doit satisfaire l'équation intégrale

(3)
$$\int H(\xi'\xi'')d\xi''(\xi''/\alpha') = W(\alpha').(\xi'/\alpha'),$$

dans lequel les valeurs caractéristiques $W(\alpha')$ sont les niveaux d'énergie. Cette équation est juste l'équation d'onde de Schrödinger pour les fonctions propres (ξ'/α'), qui devient une équation différentielle ordinaire quand H est une fonction algébrique simple des ξ_k et des η_k selon les équations spéciales (2) des matrices représentant les ξ_k et les η_k. L'équation (3) peut s'écrire sous la forme plus générale

(3′)
$$\int H(\xi'\xi'')d\xi''(\xi''/\alpha') = ih\partial(\xi'/\alpha')/\partial t,$$

forme dans laquelle elle peut s'appliquer à des systèmes pour lesquels l'hamiltonien fait intervenir le temps explicitement.

On peut avoir un système dynamique spécifié par un hamiltonien H qui ne peut pas être exprimé comme une fonction algébrique d'un quelconque ensemble de variables canoniques, mais qui peut être représenté par une matrice $H(\xi'\xi'')$. Un tel problème peut encore être résolu par la méthode présente, puisqu'on peut encore utiliser l'équation (3) pour obtenir les niveaux d'énergie et les fonctions propres. Nous trouverons que l'hamiltonien qui décrit l'interaction d'un quantum lumineux et d'un système atomique est de ce type plus général, de telle sorte que l'interaction peut être traitée mathématiquement, bien que l'on ne puisse pas alors parler d'énergie potentielle d'interaction au sens usuel.

Il faudrait observer qu'il y a une différence entre une onde lumineuse et l'onde de de Broglie ou Schrödinger associée aux quanta lumineux. D'abord, l'onde lumineuse est toujours réelle, alors que l'onde de de Broglie associée à un quantum lumineux se déplaçant dans une direction définie doit

par des matrices diagonales si l'on sacrifie la condition que les matrices satisfont les équations du mouvement. La fonction de transformation d'un tel modèle dans un modèle dans lequel les équations du mouvement sont satisfaites utilisera le temps explicitement. Voir p. 628 in *loc. cit.* II.

faire intervenir une exponentielle imaginaire. Une différence plus importante est que leurs intensités doivent être interprétées de façons différentes. Le nombre de quanta lumineux par unité de volume associés à une onde lumineuse mono-chromatique est égal à l'énergie par unité de volume de l'onde divisée par l'énergie $(2\pi h)\nu$ d'un quantum lumineux simple. D'un autre côté, une onde de de Broglie mono-chromatique d'amplitude a (multipliée par le facteur exponentiel imaginaire) doit être interprétée comme représentant a^2 quanta lumineux par unité de volume pour toutes les fréquences. C'est un cas spécial de la règle générale pour interpréter l'analyse des matrices[7] selon lequel, si (ξ'/α') ou $\psi_{\alpha'}(\xi'_k)$ est la fonction propre des variables ξ_k de l'état α' d'un système atomique (ou particule simple), $|\psi_{\alpha'}(\xi'_k)|^2$ est la probabilité que chaque ξ_k ayant la valeur ξ'_k, [ou $|\psi_{\alpha'}(\xi'_k)|^2 d\xi'_1 d\xi'_2 \ldots$ soit la probabilité de chaque ξ_k se trouvant entre les valeurs ξ'_k et $\xi'_k + d\xi'_k$, quand les ξ_k parcourent des intervalles continus de valeurs caractéristiques] selon la supposition que toutes les phases du système sont équiprobables. L'onde dont l'intensité doit être interprétée de la première de ces deux manières apparaît dans la théorie seulement quand on traite un assemblage de particules associées satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose. Il n'y a alors pas de telle onde associée aux électrons.

2 Perturbation d'un assemblage de systèmes indépendants

Nous allons maintenant considérer les transitions produites dans un système atomique par une perturbation arbitraire. La méthode que nous adopterons sera celle précédemment fournie par l'auteur[8] qui amène simplement aux équations qui déterminent la probabilité du système d'être dans un état stationnaire quelconque du système non perturbé à tout instant[9]. Cela, bien sûr, fournit immédiatement le nombre probable de systèmes dans cet état à cet instant pour un assemblage de systèmes qui sont indépendants les uns des autres et sont tous perturbés de la même manière. L'objet de la présente section est de montrer que les équations pour les niveaux de transition pour ces nombres probables peuvent être mises sous forme hamiltonienne de manière simple, ce qui autorisera des développements plus avant dans la théorie à construire.

Soit H_0 l'hamiltonien du système non perturbé et V l'énergie perturbante, qui peut être une fonction arbitraire des variables dynamiques et peut ou peut ne pas faire intervenir le temps explicitement, de telle sorte que l'hamiltonien pour le système perturbé soit $H = H_0 + V$. Les fonctions propres du système perturbé doivent satisfaire l'équation d'onde

$$ih\partial\psi/\partial t = (H_0 + V)\psi,$$

où $(H_0 + V)$ est un opérateur. Si $\psi = \Sigma_r a_r \psi_r$ est la solution de l'équation qui satisfait les conditions initiales elles-mêmes, où les ψ_r sont des fonctions propres du système non perturbé, chacune associée à un état stationnaire indicé par r, et si les a_r sont des fonctions du temps seulement, alors $|a_r|^2$ est la probabilité que le système soit dans l'état r à tout moment. Les a_r doivent être initialement normalisés, et resteront du coup toujours normalisés. La théorie s'appliquera directement à un assemblage de N systèmes indépendants similaires si nous multiplions chacun de ces a_r par $N^{1/2}$ de manière à rendre $\Sigma_r |a_r|^2 = N$. Nous aurons maintenant que $|a_r|^2$ est le nombre probable de systèmes dans l'état r.

L'équation qui détermine le niveau de transition des a_r est [10]

$$ih\dot{a}_r = \Sigma_s V_{rs} a_s, \tag{4}$$

[7] *Loc. cit. II.* §§6, 7

[8] *Loc. cit. I.*

[9] La théorie a été récemment étendue par Born [*Z. f. Physik,* vol. 40, p. 167 (1926)] de manière à prendre en compte les transitions adiabatiques dans les états stationnaires qui pourraient être produits par la perturbation aussi bien que par les transitions. Cette extension n'est pas utilisée dans le présent article.

[10] *Loc. cit.* I, equation (25)

où les V_{rs}'s sont les éléments de la matrice représentant V. L'équation imaginaire conjuguée est

$$-ih\dot{a}_r^* = \Sigma_r V_{rs}^* a_s^* = \Sigma_s a_s^* V_{sr} \tag{4'}$$

Si l'on regarde a_r et iha_r^* comme des conjugués canoniques, les équations (4) et (4') prennent la forme hamiltonienne avec la fonction hamiltonienne $F_1 = \Sigma_{rs} a_r^* V_{rs} a_s$, notamment,

$$\frac{da_r}{dt} = \frac{1}{ih}\frac{\partial F_1}{\partial a_r^*}, \qquad ih\frac{da_r^*}{dt} = -\frac{\partial F_1}{\partial a_r}.$$

Nous pouvons transformer en variables canoniques N_r, ϕ_r, par la transformation de contact

$$a_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{-i\phi_r/h}, \qquad a_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\phi_r/h}.$$

Cette transformation rend les nouvelles variables N_r et ϕ_r réelles, N_r étant égal à $a_r a_r^* = |a_r|^2$, le nombre probable de systèmes dans l'état r, et ϕ_r/h étant la phase de la fonction propre qui les représente. L'hamiltonien F_1 devient maintenant

$$F_1 = \Sigma_{rs} V_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\phi_r - \phi_s)/h,}$$

et les équations qui déterminent le niveau auquel les transitions ont lieu ont la forme canonique

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi_r}, \qquad \dot{\phi}_r = \frac{\partial F_1}{\partial N_r}.$$

Une manière plus pratique de mettre les équations de transition dans une forme hamiltonienne peut être obtenue à l'aide des quantités

$$b_r = a_r e^{-iW_r t/h}, \qquad b_r^* = a_r^* e^{iW_r t/h},$$

W_r étant l'énergie de l'état r. On a $|b_r|^2$ égal à $|a_r|^2$, le nombre probable de systèmes dans l'état r. Pour $\dot{b}_r$, on trouve

(5)

$$\begin{aligned} ih\dot{b}_r &= W_r b_r + ih\dot{a}_r e^{-iW_r t/h} \\ &= W_r b_r + \Sigma_s V_{rs} b_s e^{i(W_s - W_r)t/h} \end{aligned}$$

avec l'aide de (4). Si on pose $V_{rs} = v_{rs} b_s e^{i(W_r - W_s)t/h}$ de telle sorte que v_{rs} est une constante quand V ne fait pas intervenir le temps explicitement, cela se réduit à

$$\begin{aligned} ih\dot{b}_r &= W_r b_r + \Sigma_s v_{rs} b_s \\ &= \Sigma_s H_{rs} b_s, \end{aligned}$$

où $H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs}$, est un élément de la matrice de l'hamiltonien global $H = H_0 + V$ avec le facteur temps $e^{i(W_r - W_s)t/h}$ éliminé, de telle façon que H_{rs} est une constante quand H ne fait pas intervenir le temps explicitement. L'équation (5) est de la même forme que l'équation (4), et peut être mise sous forme hamiltonienne de la même manière.

On devrait remarquer que l'équation (5) est obtenue directement si l'on écrit l'équation de Schrödinger sur un ensemble de variables qui spécifient les états stationnaires du système non perturbé. Si ces variables sont ξ_h, et si $H(\xi'\xi'')$ dénote un élément matriciel de l'hamiltonien global H dans le modèle (ξ), cette équation de Schrödinger serait

$$ih\partial\psi(\xi')/\partial t = \Sigma_{\xi''} H(\xi'\xi'')\psi(\xi''), \tag{6}$$

comme l'équation (3'). Elle diffère de l'équation précédente (5) seulement dans la notation, un simple suffixe r étant utilisé là pour dénoter un état stationnaire plutôt qu'un ensemble de valeurs

numériques ξ'_k pour les variables ξ_k, et b_r étant utilisé à la place de $\psi(\xi')$. L'équation (6), et par conséquent également l'équation (5), peuvent encore être utilisées quand l'hamiltonien est du type plus général qui ne peut pas être exprimé comme une fonction algébrique d'un ensemble de variables canoniques, mais peut encore être représenté par une matrice $H(\xi'\xi'')$ ou H_{rs}.

Prenons maintenant b_r et ihb^*_r des variables canoniquement conjuguées plutôt que a_r et iha^*_r. L'équation (5) et son équation conjuguée imaginaire prendra maintenant la forme hamiltonienne avec la fonction hamiltonienne

$$F = \Sigma_{rs} b^*_r H_{rs} b_s. \tag{7}$$

En procédant comme précédemment, on effectue la transformation de contact

$$b_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h}, \qquad b^*_r = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h}, \tag{8}$$

sur les nouvelles variables canoniques N_r, θ_r, où N_r est, comme précédemment, le nombre probable de systèmes dans l'état r, et θ_r est une nouvelle phase. L'hamiltonien F deviendra alors

$$F = \Sigma_{rs} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h},$$

et les équations pour les niveaux de transitions des N_r et θ_r prendront la forme canonique

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F}{\partial \theta_r}, \qquad \dot{\theta}_r = \frac{\partial F}{\partial N_r}$$

L'hamiltonien peut alors s'écrire

$$F = \Sigma_r W_r N_r + \Sigma_{rs} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} N_s^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}. \tag{9}$$

Le premier terme $\Sigma_r W_r N_r$ est l'énergie propre totale de l'assemblage, et le second terme peut être vu comme l'énergie additionnelle due à la perturbation. Si la perturbation est nulle, les phases θ_r augmenteront linéairement avec le temps, tandis que les phases précédentes ϕ_r seront constantes dans ce cas.

3 Perturbation d'un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose

Selon la section précédente, nous pouvons décrire l'effet d'une perturbation sur un assemblage de systèmes indépendants au moyen de variables canoniques et d'équations hamiltoniennes du mouvement. Le développement de la théorie qui nous vient naturellement à l'esprit consiste à faire de ces variables canoniques des q-nombres satisfaisant les conditions quantiques habituelles plutôt que des c-nombres, de telle façon que leurs équations hamiltoniennes du mouvement deviennent de vraies équations quantiques. La fonction hamiltonienne va maintenant fournir une équation d'onde de Schrödinger, qui doit être résolue et interprétée de la façon habituelle. L'interprétation donnera non seulement le nombre probable de systèmes dans n'importe quel état, mais également la probabilité d'une distribution quelconque donnée des systèmes parmi les différents états, cette probabilité étant, en fait, égale au carré du module de la solution normalisée de l'équation d'onde qui satisfait les conditions initiales adéquates. Nous pourrions, bien sûr, calculer directement à partir de considérations élémentaires la probabilité de toute distribution donnée quand les systèmes sont indépendants, puisque nous connaissons la probabilité de chaque système d'être dans un état donné particulier. Nous trouverions que la probabilité calculée directement de cette manière n'est pas en accord avec celle obtenue par l'équation d'onde, excepté dans le cas particulier où il y a seulement un seul système dans l'assemblage. Dans le cas général, il sera montré que l'équation d'onde amène

à la valeur correcte pour la probabilité de n'importe quelle distribution donnée quand les systèmes, plutôt que d'être indépendants, obéissent aux statistiques de Einstein-Bose.

Supposons que les variables b_r, ihb_r^* du §2 sont des q-nombres canoniques satisfaisant les conditions quantiques

$$b_r.ihb_r^* - ihb_r^*.b_r = ih$$

ou

$$b_r b_r^* - b_r^* b_r = 1$$

et

$$\begin{array}{ll} b_r b_s - b_s b_r = 0, & b_r^* b_s^* - b_s^* b_r^* = 0, \\ b_r b_s^* - b_s^* b_r = 0 & (s \neq r). \end{array}$$

Les équations de transformation (8) doivent maintenant être écrites sous forme quantique

(10)
$$\left\{ \begin{array}{l} b_r = (N_r + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h} = e^{-i\theta_r/h} N_r^{\frac{1}{2}} \\ b_r^* = N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} = e^{i\theta_r/h} (N_r + 1)^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

de telle façon que les N_r, θ_r puissent aussi être des variables canoniques. Ces équations montrent que les N_r peuvent seulement avoir des valeurs caractéristiques entières non négatives[11], ce qui nous fournit une justification de la supposition que les variables sont des q-nombres tels que nous les avons choisis. Les nombres de systèmes dans les différents états sont maintenant des nombres quantiques ordinaires.

L'hamiltonien (7) devient alors

(11)
$$\begin{array}{rl} F & = \Sigma_{rs} b_r^* H_{rs} b_s = \Sigma_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} H_{rs} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h} \\ & = \Sigma_{rs} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h} \end{array}$$

dans lequel les H_{rs} sont toujours des c-nombres. Nous pouvons écrire ce F dans la forme correspondant à (9)

(11')
$$F = \Sigma_r W_r N_r + \Sigma_{rs} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$$

dans laquelle il est à nouveau composé d'un terme correspondant à l'énergie propre $\Sigma_r W_r N_r$ et d'un terme correspondant à l'énergie d'interaction.

L'équation d'onde écrite en fonction des variables N_r est[12]

(12)
$$ih \frac{\partial}{\partial t} \psi(N_1', N_2', N_3' \ldots) = F\psi(N_1', N_2', N_3' \ldots),$$

où F est un opérateur, chaque θ_r apparaissant dans F étant interprété comme signifiant $ih\partial/\partial N_r'$.

Si nous appliquons l'opérateur $e^{\pm i\theta_r/h}$ à n'importe quelle fonction $f(N_1', N_2', \ldots N_r', \ldots)$ des variables $N_1', N_2', \ldots$, le résultat est

$$\begin{array}{rl} e^{\pm i\theta_r/h} f(N_1', N_2', \ldots N_r' \ldots) & = e^{\mp \delta/\delta N_r'} f(N_1', N_2' \ldots N_r' \ldots) \\ & = f(N_1', N_2', \ldots N_r' \mp 1, \ldots). \end{array}$$

[11] Voir §8 de l'article de l'auteur *Roy. Soc. Proc.* A, vol. 111, p. 281 (1926). Ce qu'on appelait les valeurs d'un c-nombre, et qui sont ici les valeurs qu'un q-nombre peut prendre, se verront donner le nom plus précis de valeurs caractéristiques de ce q-nombre.

[12] On suppose pour la définissabilité que l'indice r des états stationnaires prend les valeurs 1, 2, 3,...

Si nous utilisons cette règle dans l'équation (12) et que nous utilisons l'expression (11) pour F, nous obtenons[13]

(13)
$$ih\tfrac{\partial}{\partial t}\psi(N'_1, N'_2, N'_3 \ldots) = \Sigma_{rs} H_{rs} N_r'^{\frac{1}{2}} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} \psi(N'_1, N'_2 \ldots N'_r - 1, \ldots N'_s + 1, \ldots).$$

Nous voyons du côté droit de cette équation que dans la matrice représentant F, le terme de F faisant intervenir $e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$ contribuera seulement aux éléments de la matrice qui représentent les transitions dans lesquelles N_r décroît d'une unité et N_s croît d'une unité, i.e. aux éléments de la matrice de la forme $F(N'_1, N'_2 \ldots N'_r \ldots N'_s; N'_1, N'_2 \ldots N'_r - 1 \ldots N'_s + 1 \ldots)$. Si nous trouvons une solution $\psi(N'_1, N'_2 \ldots)$ de l'équation (13) qui est normalisée [i.e. une solution pour laquelle $\Sigma_{N'_1, N'_2 \ldots} |\psi(N'_1, N'_2 \ldots)|^2 = 1$] et qui satisfait les conditions propres initiales, alors $|\psi(N'_1, N'_2 \ldots)|^2$ sera la probabilité de cette distribution dans laquelle N'_1 systèmes sont dans l'état 1, N_2 dans l'état 2, ... à tout instant.

Considérons d'abord le cas où il y a un seul système dans l'assemblage. La probabilité qu'il soit dans l'état q est déterminée par la fonction propre $\psi(N'_1, N'_2, \ldots)$ dans laquelle tous les N' sont égaux à zéro sauf N'_q, qui est égal à l'unité. Nous noterons cette fonction propre $\psi\{q\}$. Quand elle est substituée dans le côté gauche de (13), tous les termes de la somme du côté droit s'évanouissent sauf ceux pour lesquels $r = q$, et il reste

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi\{q\} = \Sigma_r H_{qs}\psi\{s\}$$

qui est la même équation que (5) avec $\psi\{q\}$ jouant le rôle de b_q. Cela établit le fait que la théorie présente est équivalente à celle de la section précédente quand il y a seulement un système dans l'assemblage.

Maintenant prenons le cas général d'un nombre arbitraire de systèmes dans l'assemblage, et supposons qu'ils obéissent à la mécanique statistique de Einstein-Bose. Cela nécessite que, dans le traitement habituel du problème, seules les fonctions propres qui sont symétriques entre tous les systèmes doivent être prises en compte, ces fonctions propres étant par elles-mêmes suffisantes pour donner une solution quantique complète du problème[14]. Nous allons maintenant obtenir l'équation pour le niveau de transition de l'une de ces fonctions propres symétriques, et montrer qu'elle est identique à l'équation (13).

Si nous indiçons chaque système par un nombre n, alors le hamiltonien pour l'assemblage sera $H_A = \Sigma_n H(n)$, où $H(n)$ est le H du §2 (égal à $Ho + V$) exprimé en fonction des variables du n-ième système. Un état stationnaire de l'assemblage est défini par les nombres $r_1, r_2 \ldots r_n \ldots$ qui sont les indices des états stationnaires dans lesquels stagnent les systèmes séparés. L'équation de Schrödinger pour l'assemblage en un ensemble de variables qui spécifient les états stationnaires sera de la forme (6) [avec H_A plutôt que H], et nous pouvons l'écrire dans la notation de l'équation (5) ; ainsi :

(14)
$$ih\dot{b}(r_1 r_2 \ldots) = \Sigma_{s_1 s_2 \ldots} H_A(r_1 r_2 \ldots; s_1 s_2 \ldots) b(s_1 s_2 \ldots),$$

où $H_A(r_1 r_2 \ldots; s_1 s_2 \ldots)$ est l'élément de la matrice globale de H_A [en enlevant le facteur temps]. Cet élément matriciel s'évanouit quand plus d'un s_n diffère du r_n correspondant ; il est égal à $H_{r_m s_m}$ quand s_m diffère de r_m et que tous les autres s_n sont égaux aux r_n : et il est égal à $\Sigma_n H_{r_n r_n}$ quand tout s_n est égal à r_n. En substituant ces valeurs dans (14), nous obtenons

(15)
$$ih\dot{b}(r_1 r_2 \ldots) = \Sigma_m \Sigma_{s_m \neq r_m} H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \ldots r_{m-1} s_m r_{m+1} \ldots) + \Sigma_n H_{r_n r_n} b(r_1 r_2 \ldots).$$

[13] où $s = r, \psi(N'_1, N'_2 \ldots N'_r - 1 \ldots N'_s + 1)$ doit être pris comme signifiant $\psi(N'_1 N'_2 \ldots N'_r \ldots)$.
[14] *Loc. cit.* §3

Nous devons maintenant contraindre $b(r_1 r_2 \ldots)$ à être une fonction symétrique des variables $r_1, r_2, \ldots$ de façon à obtenir les statistiques de Einstein-Bose. Cela est rendu possible puisque si $b(r_1 r_2 \ldots)$ est symétrique à tout instant, alors l'équation (15) montre que $\dot{b}(r_1 r_2 \ldots)$ est aussi symétrique à cet instant, de telle sorte que $b(r_1 r_2 \ldots)$ restera symétrique.

Notons N_r le nombre de systèmes dans l'état r. Alors un état stationnaire de l'assemblage décrivable par une fonction propre symétrique doit être spécifié par les nombres $N_1, N_2, \ldots N_r \ldots$ aussi bien que par les nombres $r_1, r_2 \ldots r_n \ldots$, et nous serons capables de transformer l'équation (15) en les variables $N_1, N_2, \ldots$. Nous ne pouvons pas vraiment prendre la nouvelle fonction propre $b(N_1, N_2 \ldots)$ égale à la précédente $b(r_1 r_2 \ldots)$, mais nous devons en prendre une qui soit un multiple de l'autre de façon à ce que les deux soient correctement normalisées selon leurs variables respectives. Nous devons avoir, en fait,

$$\Sigma_{r_1, r_2 \ldots} |b(r_1 r_2 \ldots|^2 = 1 = \Sigma_{N_1, N_2 \ldots} |b(N_1, N_2 \ldots|^2,$$

et ainsi, nous devons prendre $|b(N_1, N_2 \ldots)|^2$ égal à la somme des $|b(r_1 r_2 \ldots)|^2$ pour toutes les valeurs des nombres $r_1, r_2 \ldots$ de telle façon que N_1 d'entre eux soient égaux à 1, N_2 égaux à 2, etc. Ainsi, il y a $N!/N_1!N_2! \ldots$ termes dans cette somme, où $N = \Sigma_r N_r$ est le nombre total de systèmes, et ils sont tous égaux, puisque $b(r_1 r_2 \ldots)$ est une fonction symétrique de ses variables $r_1, r_2 \ldots$. Par conséquent, nous devons avoir

$$b(N_1, N_2, \ldots) = (N!/N_1!N_2! \ldots)^{\frac{1}{2}} \dot{b}(r_1 r_2 \ldots).$$

Si nous effectuons cette substitution dans l'équation (15), le côté gauche deviendra

$$ih(N_1!N_2! \ldots /N!)^{\frac{1}{2}} \dot{b}(N_1, N_2 \ldots).$$

Le terme $H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \ldots r_{m-1} s_m r_{m+1} \ldots)$ dans la première somme du côté droit deviendra

$$(16) \qquad [N_1!N_2! \ldots (N_r - 1)! \ldots (N_s + 1)! \ldots /N!]^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \ldots N_r - 1 \ldots N_s + 1 \ldots),$$

où nous avons écrit r pour r_m et s pour s_m. Ce terme doit être ajouté pour toutes les valeurs de s sauf r, et doit alors être ajouté pour r prenant chacune des valeurs $r_1, r_2 \ldots$. Ainsi chaque terme (16) se voit répété par le procédé de sommation jusqu'à ce qu'il apparaisse un total de N_r fois, de telle façon qu'il contribue

$$N_r [N_1!N_2! \ldots (N_r - 1)! \ldots (N_s + 1)! \ldots /N!]^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \ldots N_r - 1 \ldots N_s + 1 \ldots)$$
$$N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} (N_1!N_2! \ldots /N!)^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \ldots N_r - 1 \ldots N_s + 1 \ldots)$$

au côté droit de (15). Finalement, le terme $\Sigma_n H_{r_n r_n} b(r_1, r_2, \ldots)$ devient

$$\Sigma_r N_r H_{rr} . b(r_1 r_2 \ldots) = \Sigma_r N_r H_{rr} . (N_1!N_2! \ldots /N!)^{\frac{1}{2}} b(N_1, N_2 \ldots).$$

Par conséquent, l'équation (15) devient, en enlevant le facteur $(N_1!N_2! \ldots /N!)^{\frac{1}{2}}$,

(17)
$$ih\dot{b}(N_1, N_2 \ldots) = \Sigma_r \Sigma_{s \neq r} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1)^{\frac{1}{2}} H_{rs} b(N_1, N_2 \ldots N_r - 1 \ldots N_s + 1 \ldots) + \Sigma_r N_r H_{rr} b(N_1, N_2 \ldots),$$

ce qui est identique à (13) [excepté le fait que dans (17), les primes (') ont été omis pour les N, ce qui est permis quand on n'a pas besoin de faire référence aux N comme à des q-nombres]. Nous avons ainsi établi que l'hamiltonien (11) décrit l'effet d'une perturbation sur un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose.

4 Réaction de l'assemblage sur le système perturbant

Jusqu'à présent, nous avons seulement considéré des perturbations qui peuvent être représentées par une énergie de perturbation V ajoutée à l'hamiltonien du système perturbé, V étant une fonction seulement des variables dynamiques de ce système et peut-être du temps. Il est possible que la théorie s'étende au cas où la perturbation consiste en une interaction avec un système dynamique perturbant, la réaction du système perturbé sur le système perturbant étant prise en compte (la distinction entre le système perturbant et le système perturbé est, bien sûr, non réelle, mais elle sera gardée par facilité).

Nous considérons maintenant un système perturbant, décrit, disons, par les variables canoniques J_k, ω_k, les J étant ses premières intégrales quand il est seul, interagissant avec un assemblage de systèmes perturbés sans interaction mutuelle, qui satisfont les statistiques de Einstein-Bose. L'hamiltonien global sera de la forme

$$H_T = H_P(J) + \Sigma_n H(n),$$

où H_r est l'hamiltonien du système perturbant (une fonction des J seulement) et $H(n)$ est égale à l'énergie propre $H_0(n)$ plus l'énergie de perturbation $V(n)$ du n-ième système de l'assemblage. $H(n)$ est une fonction des seules variables du n-ième système de l'assemblage et des J et w, et ne fait pas intervenir le temps explicitement.

L'équation de Schrödinger correspondant à l'équation (14) est maintenant

$$ih\dot{b}(J', r_1 r_2 \ldots) = \Sigma_{J''}\Sigma_{s_1,s_2} \ldots H_r(J', r_1 r_2 \ldots; J'', s_1 s_2 \ldots) b(J'', s_1 s_2 \ldots),$$

dans laquelle la fonction propre b fait intervenir les variables J'_k.

L'élément matriciel $H_r(J', r_1 r_2 \ldots; J'', s_1 s_2 \ldots)$ est maintenant toujours une constante. Comme précédemment, il s'évanouit quand plus d'un s_n diffère du r_n correspondant. Quand s_m diffère de r_m et que tout autre s_n est égal à r_n, il se réduit à $H(J' r_m; J'' s_m)$, qui est l'élement matriciel $(J' r_m; J'' s_m)$ (avec le facteur temps éliminé) de $H = H_0 + V$, l'énergie propre plus l'énergie de perturbation d'un seul système de l'assemblage ; alors que lorsque tout s_n est égale à r_n, il prend la valeur $Hp(J')\delta_{J'J''} + \Sigma_n H(J' r_n\, ; J'' r_n)$. Si, comme précédemment, nous contraignons les fonctions propres à être symétriques en les variables $r_1, r_2 \ldots$, nous pouvons à nouveau les transformer en les variables $N_1, N_2 \ldots$, ce qui amènera, comme précédemment, au résultat.

(18)
$$\begin{aligned} &ih\dot{b}(J', N'_1, N'_2 \ldots) = H_p(J') b(J', N'_1, N'_2 \ldots) \\ &+\Sigma_{J''}\Sigma_{r,s} N_r'^{\frac{1}{2}} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} H(J' r; J'' s) b(J'', N'_1, N'_2 \ldots N'_r - 1 \ldots N'_s + 1 \ldots) \end{aligned}$$

Ceci est l'équation de Schrödinger correspondant à la fonction hamiltonienne

(19)
$$F = H_P(J) + \Sigma_{r,s} H_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h},$$

dans laquelle H_{rs} est maintenant une fonction des J et des w, telle que quand on le représente par une matrice du modèle (J), son élément $(J'J'')$ est $H(J' r; J'' s)$ (il convient de noter que H_{rs} commute encore avec les N et les θ).

Ainsi l'interaction d'un système perturbant avec un assemblage satisfaisant les statistiques de Einstein-Bose peut être décrit par un hamiltonien de la forme (19). Nous pouvons le mettre dans une forme correspondant à (11') en observant que l'élément matriciel $H(J'_r; J''_s)$ est composé de la somme de deux termes, un terme qui provient de l'énergie propre H_0, qui est égale à W_r quand

$J''_k = J'_k$ et $s = r$ et qui s'évanouit sinon, et un terme qui provient de l'énergie d'interaction V, qui peut être notée $v(J'_r; J''_s)$. Ainsi, nous aurons

$$H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs},$$

où v_{rs} est cette fonction des J et des w qui est représentée par la matrice dont l'élément $(J'J'')$ est $v(J'r; J''s)$, et de ce fait, (19) devient

(20)
$$F = H_P(J) + \Sigma_r W_r N_r + \Sigma_{r,s} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}.$$

L'hamiltonien est ainsi la somme de l'énergie propre du système perturbant $H_P(J)$, de l'énergie propre des systèmes perturbés $\Sigma_r W_r N_r$ et de l'énergie de perturbation $\Sigma_{r,s} v_{rs} N_r^{\frac{1}{2}} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{\frac{1}{2}} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$.

5 Théorie des transitions d'un système d'un état vers d'autres états de même énergie.

Avant d'appliquer les résultats des sections précédentes aux quanta de lumière, nous allons considérer la solution du problème représenté par un hamiltonien du type (19). La caractéristique essentielle de ce problème est qu'il concerne un système dynamique qui peut, sous l'influence d'une énergie de perturbation dans laquelle le temps n'intervient pas explicitement, effectuer des transitions d'un état vers d'autres états de même énergie. Le problème des collisions entre un système atomique et un électron, qui a été traité par Born[15] est un cas particulier de ce type. La méthode de Born consiste à trouver une solution *périodique* de l'équation d'onde qui consiste, aussi loin qu'elle fasse intervenir les coordonnées de l'électron qui percute le système, en des ondes planes, qui représentent l'électron incident, et qui approchent le système atomique, et qui sont éparpillées ou diffractées dans toutes les directions. Le carré de l'amplitude des ondes éparpillées dans n'importe quelle direction avec n'importe quelle fréquence est supposé par Born être la probabilité que l'électron soit éparpillé dans cette direction avec l'énergie correspondante.

Cette méthode ne semble pas pouvoir s'étendre d'une manière simple au problème général des systèmes qui effectuent des transitions d'un état vers d'autres de même énergie. De plus, il n'y a pas à présent de moyen très direct et certain d'interpréter une solution périodique d'une équation d'onde pour l'appliquer à un phénomène physique non périodique tel qu'une collision (la méthode plus précise qui va être donnée maintenant montre que la supposition de Born n'est pas tout à fait correcte, dans la mesure où il est nécessaire de multiplier le carré de l'amplitude par un certain facteur).

Une méthode alternative pour résoudre un problème de collision est de trouver une solution non périodique à l'équation d'onde qui consiste simplement au départ en ondes planes se déplaçant dans l'espace entier dans les directions imposées avec la fréquence imposée pour représenter l'électron incident. Au cours du temps, les ondes se déplaçant dans d'autres directions peuvent apparaître de telle façon que l'équation d'onde reste satisfaite. La probabilité pour l'électron d'être éparpillé dans n'importe quelle direction avec n'importe quelle énergie sera alors déterminée par le niveau de croissance des composants harmoniques correspondant de ces ondes. La manière d'interpréter les mathématiques utilisées par cette méthode est assez bien définie, cette interprétation étant la même que celle du début du §2.

Nous allons appliquer cette méthode au problème général d'un système qui effectue des transitions d'un état à d'autres états de même énergie sous l'action d'une perturbation. Soit H_0 l'hamiltonien

[15] Born, *Z. f. Physik*, vol. 38, p. 803 (1926)

du système non pertubé et V l'énergie perturbante, qui doit ne pas faire intervenir le temps explicitement. Si nous prenons le cas d'une suite continue d'états stationnaires, spécifiée par les premières intégrales, disons α_k, du mouvement non perturbé, alors, en suivant la méthode du §2, nous obtenons

$$ih\dot{a}(\alpha') = \int V(\alpha'\alpha'')d\alpha''.a(\alpha''), \tag{21}$$

correspondant à l'équation (4). La probabilité du système d'être dans un état pour lequel chaque α_k est compris entre α'_k et $\alpha'_k + d\alpha'_k$ à tout instant est $|a(\alpha')|^2 d\alpha'_1.d\alpha'_2 \dots$ quand $a(\alpha')$ est correctement normalisé et satisfait les conditions propres initiales. Si initialement le système est dans l'état α^0, nous devons imposer que la valeur initiale de $a(\alpha')$ soit de la forme $a^0.\delta(\alpha' - \alpha^0)$. Nous laisserons α^0 prendre une valeur arbitraire, parce que ça serait un inconvénient que de normaliser $a(\alpha')$ dans le cas présent. Pour une première approximation, nous pouvons substituer à $a(\alpha'')$ du côté droit de (21) sa valeur initiale. Cela donne

$$ih\dot{a}(\alpha') = a^0 V(\alpha'\alpha^0) = \alpha^0 v(\alpha'\alpha^0) e^{i[W(a')-W(a^0)]t/h},$$

où $v(\alpha'\alpha^0)$ est une constante et $W(\alpha')$ est l'énergie de l'état α'. Par conséquent

$$iha(\alpha') = a^0\delta(\alpha' - \alpha^0) + a^0 v(\alpha'\alpha^0)\frac{e^{i[W(a')-W(a^0)]t/h} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/h}. \tag{22}$$

Pour les valeurs des α'_k telles que $W(\alpha')$ diffère de façon appréciable de $W(a^0)$, $a(\alpha')$ est une fonction périodique du temps dont l'amplitude est petite quand l'énergie perturbante V est petite, de telle sorte que les fonctions propres correspondant à ces états stationnaires ne sont pas excitées d'une quelconque façon appréciable. D'un autre côté, pour les valeurs des α'_k telles que $W(\alpha') = W(\alpha^0)$ et $\alpha'_k \neq \alpha^0_k$ pour un certain $k, a(\alpha')$ augmente uniformément par rapport au temps, de telle façon que la probabilité du système d'être dans l'état α' à tout instant augmente proportionnellement avec le carré du temps. Physiquement, la probabilité du système d'être dans un état avec exactement la même énergie propre que l'énergie propre initiale $W(\alpha^0)$ n'a pas d'importance, étant infinitésimale. Nous sommes seulement intéressés par l'intégrale de la probabilité qui couvre un petit intervalle de valeurs d'énergie propre proche de l'énergie propre initiale et qui, comme nous le trouverons, augmente linéairement avec le temps, en accord avec les lois des probabilités ordinaires.

Nous transformons les variables $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_u$ en un ensemble de variables qui sont des fonctions arbitrairement indépendantes des α telles que l'une d'entre elles est l'énergie propre W, disons les variables $W, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_{u-1}$. La probabilité à tout instant du système de rester dans un état stationnaire pour lequel tout γ_k est compris entre γ_k' et $\gamma'_k + d\gamma'_k$ est maintenant (au facteur de normalisation près) égal à

$$d\gamma'_1.d\gamma'_2 \dots d\gamma'_{u-1} \int |a(\alpha')|^2 \frac{\partial(\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_u)}{\partial(W', \gamma'_1 \dots \gamma'_{u-1})} dW'. \tag{23}$$

Pour une durée qui est grande comparée aux durées des périodes du système, nous trouverons que pratiquement la totalité de l'intégrale dans (23) provient des valeurs des W' très proches de $W^0 = W(\alpha^0)$. Posons

$$a(\alpha') = a(W', \gamma') \text{ et } \partial(\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_u)/\partial(W', \gamma'_1 \dots \gamma'_{u-1} = J(W', \gamma').$$

Alors, pour l'intégrale dans (23), nous trouvons, avec l'aide de (22) (à la condition que $\gamma'_k \neq \gamma^0_k$ pour

un certain k)

$$\int |a(W',\gamma')|J(W',\gamma')dW'$$

$$= |a^0|^2 \int |v(W',\gamma';W^0,\gamma^0)|^2 J(W',\gamma') \frac{[e^{i(W'-W^0)t/h}-1][e^{-i(W'-W^0)t/h}-1]}{(W'-W^0)^2} dW'$$

$$= 2|a^0|^2 \int |v(W',\gamma';W^0,\gamma^0)|^2 J(W',\gamma')[1-\cos(W'-W^0)t/h]/(W'-W^0)^2.dW'$$

$$= 2|a^0|^2 t/h. \int |v(W^0+hx/t,\gamma';W^0,\gamma^0)|^2 J(W^0+hx/t,\gamma')(1-\cos x)/x^2.dx,$$

si l'on fait la substitution $(W'-W^0)t/h = x$. Pour de grandes valeurs de t, cela se réduit à

$$\begin{aligned} &2|a^0|^2 t/h.|v(W^0,\gamma')|^2 J(W^0,\gamma') \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos x)/x^2.dx \\ &= 2\pi|a^0|^2 t/h.|v(W^0,\gamma';W^0,\gamma^0)|^2 J(W^0,\gamma'). \end{aligned}$$

La probabilité par unité de temps d'une transition vers un état pour lequel γ_k est compris entre γ'_k et $\gamma'_k + d\gamma'_k$ est alors (à un facteur de normalisation près)

$$2\pi|a^0|^2/h.|v(W^0,\gamma';W^0,\gamma^0)|^2 J(W^0,\gamma')d\gamma'_1.d\gamma'_2 \ldots d\gamma'_{u-1}, \tag{24}$$

qui est proportionnel au carré de l'élément de matrice associé à cette transition de l'énergie perturbante.

Pour appliquer ce résultat au problème d'une simple collision, nous définissons les α comme étant les composantes du moment p_x, p_y, p_z de l'électron percutant et les γ comme étant les θ, et les ϕ, comme étant les angles qui déterminent la direction du mouvement. Si en prenant en compte le changement de masse de la relativité avec la vitesse, nous appelons P le moment résultant, égal à $(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^{\frac{1}{2}}$, et E l'énergie, égale à $(m^2c^4+P^2c^2)^{\frac{1}{2}}$, de l'électron, m étant sa masse restante, nous trouvons pour le Jacobien

$$J = \frac{\partial(p_x,p_y,p_z)}{\partial(E,\theta,\phi)} = \frac{EP}{c^2}\sin\theta.$$

Ainsi $J(W^0,\gamma')$ de l'expression (24) a la valeur

$$J(W^0,\gamma') = E'P'\sin\theta'/c^2, \tag{25}$$

où E' et P' se réfèrent à cette valeur pour l'énergie de l'électron éparpillé qui rend l'énergie totale égale à l'énergie initiale W^0 (i.e. à cette valeur nécessitée par la conservation de l'énergie).

Nous devons maintenant interpréter la valeur initiale de $a(\alpha')$, notamment, $a^0\delta(\alpha'-\alpha^0)$, que nous n'avons pas normalisée. Selon le §2, la fonction d'onde des variables α_k est $b(\alpha') = a(\alpha')e^{-iW't/h}$ de telle sorte que sa valeur initiale est

$$a^0\delta(\alpha'-\alpha^0)e^{-iW't/h} = a^0\delta(p'_x-p^0_x)\delta(p'_y-p^0_y)\delta(p'_z-p^0_z)e^{-iW't/h}.$$

Si nous utilisons la fonction de transformation[16]

$$(x'/p') = (2\pi h)^{-\frac{3}{2}} e^{i\Sigma_{xyz}p'_x x'/h},$$

[16]Pour alléger l'écriture, le symbole x est utilisé pour représenter x, y, z.

et la règle de transformation

$$\psi(x') = \int (x'/p')\psi(p')dp'_x dp'_y dp'_z,$$

nous obtenons pour la fonction d'onde initiale en les coordonnées x, y, z la valeur

$$a^0(2\pi h)^{-\frac{3}{2}} e^{i\Sigma_{xyz} p_x^0 x'/h} e^{-iW't/h}.$$

Cela correspond à une distribution initiale de $|a^0|^2(2\pi h)^{-3}$ électrons par unité de volume. Puisque leur vitesse est P^0c^2/E^0, le nombre par unité de temps frappant une unité de surface à angles perpendiculaires à leur direction de mouvement est $|a^0|^2P^0c^2/(2\pi h)^3E^0$.
En divisant cela dans l'expression (24), nous obtenons, avec l'aide de (25),

$$4\pi^2(2\pi h)^2 \frac{E'E^0}{c^4} |v(p';p^0)|^2 \frac{P'}{P^0} \sin\theta' d\theta' d\phi'. \tag{26}$$

C'est la zone effective qui doit être frappée par un électron de manière à ce qu'il soit éparpillé dans l'angle solide $\sin\theta' d\theta' d\phi'$ avec l'énergie E'. Ce résultat diffère par un facteur $(2\pi h)^2/2mE'$. P'/P^0 de celui de Born[17]. La nécessité du facteur P'/P^0 dans (26) aurait pu être prédite par le principe d'équilibre, puisque le facteur $|v(p';p^0)|^2$ présente une symétrie des processus direct et inverse[18].

6 Application aux quanta lumineux

Nous allons maintenant appliquer la théorie du paragraphe §4 au cas où les systèmes de l'assemblage sont des quanta lumineux, la théorie étant applicable à ce cas puisque les quanta obéissent aux lois statistiques de Einstein-Bose et n'ayant pas d'interaction mutuelle. Un quantum lumineux est dans un état stationnaire quand il se déplace à moment constant en ligne droite. Par conséquent, un état stationnaire r est déterminé par les trois composantes du moment du quantum lumineux et par une variable qui spécifie son état de polarisation. Nous travaillerons en supposant qu'il y a un nombre fini de ces états stationnaires, très proches les uns des autres, parce que ça présenterait un inconvénient d'utiliser des intervalles continus. L'interaction des quanta de lumière avec un système atomique sera décrite par un hamiltonien de la forme (20), dans lequel $H_P(J)$ est l'hamiltonien du système atomique seul, et les coefficients v_{rs} correspondent aux inconnues. Nous montrerons que cette forme du hamiltonien, avec les v_{rs} arbitraires, amène aux lois d'Einstein pour l'émission et l'absorption de radiation.

Le quantum lumineux a la particularité qu'il cesse apparemment d'exister quand il est dans l'un de ses états stationnaires, notamment l'état nul, dans lequel son moment, et par conséquent son énergie également, sont nuls. Quand un quantum lumineux est absorbé, il peut être considéré comme sautant vers son état zéro, et quand il est émis, il peut être considéré comme sautant de l'état zéro vers un état dans lequel il est physiquement en évidence, de telle façon qu'il apparaît comme venant d'être créé. Puisqu'il n'y a pas de limite au nombre de quanta lumineux qui peuvent être créés de cette manière, nous devons supposer qu'il y a un nombre infini de quanta lumineux dans l'état zéro, de telle façon que le N_0 du hamiltonien (20) est infini. Nous devons maintenant avoir θ_0, la variable canoniquement conjuguée à N_0, qui est constante, puisque

$$\dot{\theta}_0 = \partial F/\partial N_0 = W_0 + \text{ termes faisant intervenir } N_0^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } (N_0+1)^{-\frac{1}{2}}$$

[17] Dans un article plus récent (*Nachr. Gesell. d. Wiss., Gottingen, p. 146 (1926)*, Born a obtenu un résultat en accord avec celui du présent article pour la mécanique non relativiste, en utilisant une interprétation de l'analyse basée sur les théorèmes de conservation. J'ai une reconnaissance particulière à l'égard du Prof. N. Bohr pour avoir pu lire à l'avance une copie de ce travail.

[18] Voir Klein et Rosseland, *Z. f. Physik*, vol. 4, p. 46, équation (4) (1921).

et W_0 est nul. Pour que l'hamiltonien (20) puisse rester fini, il est nécessaire que les coefficients v_{r0}, v_{0r} soient infiniment petits. Nous supposerons qu'ils sont infiniment petits de façon à rendre $v_{r0}N_0^{\frac{1}{2}}$ et $v_{0r}N_0^{\frac{1}{2}}$ finis, de façon à ce que les coefficients de probabilité de transition puissent être finis. Ainsi nous posons

$$v_{r^0}(N_0+1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_0/h} = v_r, \qquad v_{0r}N_0^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_0/h} = v_r^*,$$

où v_r et v_r^* sont des imaginaires finis conjugués. Nous pouvons considérer que v_r et v_r^* sont des fonctions seulement des J et des w du système atomique, puisque leurs facteurs $(No+1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_0/h}$ et $N_0^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_0/h}$ sont pratiquement des constantes, le niveau de transition de N_0 étant très petit comparé à N_0. L'hamiltonien (20) devient maintenant

(27)

$$F = H_P(J)+\Sigma_r W_r N_r+\Sigma_{r\neq 0}[v_r N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h}+v_r^*(N_r+1)^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta_r/h}]+\Sigma_{r\neq 0}\Sigma_{s\neq 0}v_{rs}N_r^{\frac{1}{2}}(N_s+1-\delta_{rs})^{\frac{1}{2}}e^{i(\theta_r-\theta_s)/h}.$$

La probabilité de transition dans laquelle un quantum lumineux dans l'état r est absorbé est proportionnelle au carré du module de l'élément matriciel de l'hamiltonien qui correspond à cette transition. Cet élément matriciel doit venir du terme $v_r N_r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_r/h}$ dans l'hamiltonien, et doit ainsi être proportionnel à $N_r'^{\frac{1}{2}}$ où N_r' est le nombre de quanta lumineux dans l'état r avant le processus. La probabilité du processus d'absorption est ainsi proportionnelle à N_r'. De la même façon, la probabilité qu'un quantum lumineux dans l'état r soit émis est proportionnel à $(N_r'+1)$, et la probabilité qu'un quantum lumineux dans l'état r soit bombardé dans l'état s est proportionnelle à $N_r'(N_s'+1)$. Les processus de radiation du type le plus général considérés par Einstein et Ehrenfest[19] dans lesquels plus d'un quantum lumineux entrent en jeu simultanément ne sont pas pris en charge dans la présente théorie.

Pour établir une connexion entre le nombre de quanta lumineux par état stationnaire et l'intensité de la radiation, nous considérons une boîte de volume fini, disons A, contenant la radiation. Le nombre d'états stationnaires pour les quanta lumineux d'un type donné de polarisation dont la fréquence est comprise entre ν_r et $\nu_r + d\nu_r$, et dont la direction de déplacement est plus petite que l'angle solide entre $d\omega_r$ et la direction du mouvement de l'état r sera maintenant $A\nu_r^d\nu_r d_r/c^3$. L'énergie des quanta lumineux dans ces états stationnaires est par conséquent $N_r'.2\pi h\nu_r.A\nu_r^2 d\nu_r d\omega_r/c^3$. Cela doit être égal à $Ac^{-1}I_r d\nu_r d\omega_r$, où I_r est l'intensité par unité d'intervalle de fréquence de la radiation sur l'état r. Ainsi

(28) $$I_r = N_r'(2\pi h)\nu_r^3/c^2$$

de telle sorte que N_r' est proportionnel à I_r et $(N_r'+1)$ est proportionnel à $I_r + (2\pi h)\nu_r^3/c^2$.

Nous obtenons ainsi que la probabilité d'un processus d'absorption est proportionnelle à I_r, l'intensité incidente par unité d'intervalle de fréquence, et que celle du processus d'émission est proportionnelle à $I_r + (2\pi h)\nu_r^3/c^2$, qui sont justement les lois d'Einstein[20]. De la même manière, la probabilité d'un processus dans lequel un quantum lumineux est éparpillé d'un état r à un état s est proportionnelle à $I_r[I_s+(2\pi h)\nu_r^3/c^2]$, qui est la loi de Pauli pour le bombardement d'une radiation par un électron[21].

[19] *Z. f. Physik*, vol. 19, p. 301 (1923)

[20] Le rapport entre une émission stimulée et une émission spontanée dans la présente théorie est juste deux fois sa valeur dans la théorie d'Einstein. Cela est dû au fait que dans la présente théorie, un composant polarisé de la radiation incidente ne peut que stimuler une radiation polarisée de la même façon, alors que dans la théorie d'Einstein les deux composants polarisés sont traités ensemble. Cette remarque s'applique aussi au processus d'éparpillement.

[21] Pauli, *Z. f. Physik*, vol. 18, p. 272 (1923).

7 Coefficients de probabilité pour l'émission et l'absorption

Nous allons maintenant considérer l'interaction d'un atome et d'une radiation du point de vue ondulatoire. Nous résolvons la radiation en ses composantes de Fourier, et supposons que leur nombre est très grand mais fini. Indiçons chaque composant par un suffixe r, et supposons qu'il y a σ_r composants associés à la radiation d'un type défini de polarisation par unité d'angle solide et par unité d'intervalle de fréquence concernant le composant r. Chaque composant r peut être décrit par un potentiel vecteur κ_r, choisi de façon à annuler le potentiel scalaire. Le terme de perturbation à ajouter à l'hamiltonien sera maintenant, conformément à la théorie classique en négligeant la mécanique relativiste $c^{-1}\Sigma_r \kappa_r \dot{X}_r$, où X_r est le composant de la polarisation complète de l'atome dans la direction de κ_r, qui est la direction du vecteur électrique du composant r.

Nous pouvons, comme expliqué dans le §1, supposer que le champ peut être décrit par les variables canoniques N_r, θ_r, avec N_r le nombre de quanta d'énergie du composant r, et θ_r est sa phase conjuguée canonique, égale à $2\pi h\nu_r$ fois le θ_r de §1. Nous aurons maintenant $\kappa_r = a_r \cos\theta_r/h$ où a_r est l'amplitude de κ_r, qui peut être connecté à N_r comme suit : le flot d'énergie par unité de surface et par unité de temps pour le composant r est $\frac{1}{2}\pi c^{-1} a_r^2 \nu_r^2$. Par conséquent, l'intensité par unité d'intervalle de fréquence de la radiation dans le voisinage du composant r est $I_r = \frac{1}{2}\pi c^{-1} a_r^2 \nu_r^2 \sigma_r$. En comparant cela avec l'équation (28), nous obtenons $a_r = 2(h\nu_r/c\sigma_t)^{\frac{1}{2}} N_r^{\frac{1}{2}}$, et par conséquent,

$$\kappa_r = 2(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}} N_r^{\frac{1}{2}} \cos\theta_r/h.$$

L'hamiltonien pour le système entier de l'atome plus la radiation sera maintenant, conformément à la théorie classique,

$$F = H_P(J) + \Sigma_r(2\pi h\nu_r)N_r + 2c^{-1}\sigma_r(h\nu_r/c\sigma_r)^{\frac{1}{2}} \dot{X}^{\frac{1}{2}} N_r^{\frac{1}{2}} \cos\theta_r/h, \tag{29}$$

où $H_P(J)$ est l'hamiltonien pour l'atome seul. En théorie quantique, nous devons faire des variables N_r et θ_r des q-nombres canoniques comme les variables J_k, w_k qui décrivent l'atome. Nous devons maintenant remplacer le $N_r^{\frac{1}{2}} \cos\theta_r/h$ dans (29) par le q-nombre réel

$$\frac{1}{2}\{N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} + e^{-i\theta_r/h} N_r^{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{2}\{N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} + (N_r+1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h}\}$$

de telle façon que l'hamiltonien (29) devienne

$$F = H_P(J) + \Sigma_r(2\pi h\nu_r)N_r + h^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{3}{2}} \Sigma_r(\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}} \dot{X}_r \{N_r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_r/h} + (N_r+1)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_r/h}\}. \tag{30}$$

Celui-ci est de la forme (27), avec

$$v_r = v_r^* = h^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{3}{2}} (\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}} \dot{X}_r \tag{31}$$

et

$$v_{rs} = 0 \qquad (r, s \neq 0).$$

Le point de vue ondulatoire est ainsi consistant avec le point de vue quantique et il donne des valeurs aux coefficients inconnus d'interaction v_{rs} dans la théorie quantique. Ces valeurs ne sont pas telles qu'elles permettent d'exprimer l'énergie d'interaction comme une fonction algébrique des variables canoniques. Puisque la théorie ondulatoire donne $v_{rs} = 0$ pour $r, s \neq 0$, cela semblerait montrer qu'il n'y a pas de processus directs d'éparpillement, mais cela pourrait être dû à une incomplétude de la théorie ondulatoire proposée ici.

Nous montrerons maintenant que l'hamiltonien (30) amène les expressions correctes des A et des B d'Einstein. Nous devons d'abord modifier légèrement l'analyse du §5 pour l'appliquer au cas où le

système a un grand nombre discret d'états stationnaires plutôt qu'un continuum de tels états. Au lieu de l'équation (21), nous aurons maintenant

$$ih\dot{a}(\alpha') = \Sigma_{\alpha''} V(\alpha'\alpha'')a(\alpha'').$$

Si le système est initialement dans l'état α^0, nous devons prendre pour valeur initiale de $a(\alpha')$ la valeur $\delta_{a'a^0}$, qui est maintenant correctement normalisée. Cela donne en première approximation

$$ih\dot{a}(\alpha') = V(\alpha'\alpha^0) = v(\alpha'\alpha^0) = v(\alpha'\alpha^0)e^{i[W(\alpha')-W(\alpha^0)]t/h,}$$

qui amène à

$$iha(\alpha') = \delta_{\alpha'\alpha^0} + v(\alpha'\alpha^0)\frac{e^{i[W(\alpha')-W(\alpha^0)]t/h} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/h},$$

correspondant à (22). Si, comme précédemment, nous transformons les variables $W, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{u-1}$, nous obtenons (quand $\gamma' \neq \gamma^0$)

$$a(W'\gamma') = v(W', \gamma' ; W^0, \gamma^0)[1 - e^{i(W'-W^0)t/h]}/(W' - W^0).$$

La probabilité du système d'être dans un état pour lequel chaque γ_k est égal à $\gamma'_k i$ est $\Sigma_{W'}|a(W'\gamma')|^2$. Si les états stationnaires sont proches les uns des autres et si le temps t n'est pas trop grand, nous pouvons remplacer cette somme par l'intégrale $(\Delta W)^{-1}\int |a(W'\gamma')|^2 dW'$, où ΔW est l'écart entre les niveaux d'énergie. En évaluant cette intégrale comme précédemment, nous obtenons pour probabilité par unité de temps d'une transition vers un état pour lequel chaque $\gamma_k = \gamma'_k$

$$2\pi/h\Delta W.|v(W^0, \gamma' ;\ W^0, \gamma^0)|^2. \tag{32}$$

En appliquant ce résultat, nous pouvons prendre pour γ n'importe quel ensemble de variables qui sont indépendantes de l'énergie propre totale W et qui avec W définissent un état stationnaire.

Nous retournons maintenant au problème défini par l'hamiltonien (30) et considérons le processus d'absorption dans lequel l'atome saute de l'état J^0 à l'état J' avec absorption d'un photon de l'état r. Nous prenons comme variables γ' les variables J' of the de l'atome avec les variables qui définissent la direction du mouvement et l'état de polarisation du quantum absorbé, mais pas son énergie. L'élément matriciel $v(W^0, \gamma' ;\ W^0, \gamma^0)$ devient

$$h^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}(\nu_r/\sigma_r)^{\frac{1}{2}}\dot{X}_r(J^0J')N_r^0,$$

où $\dot{X}_r(J^0J')$ est l'élément matriciel ordinaire (J^0J') de $\dot{X}_r$. Par conséquent, à partir de (32), la probabilité par unité de temps du processus d'absorption est

$$\frac{2\pi}{h\Delta W}.\frac{h\nu_r}{c^3\sigma_r}|\dot{X}_r(J^0J')|^2N_r^0.$$

Pour obtenir la probabilité du processus lorsque le photon vient depuis n'importe quelle direction dans un angle solide $d\omega$, nous devons multiplier cette expression par le nombre de directions possibles pour le quantum de lumière dans l'angle solide $d\omega$, qui est $d\omega\sigma_r\Delta W/2\pi h$. Cela donne

$$d\omega\frac{\nu_r}{hc^3}|\dot{X}_r(J^0J')|^2N_r^0 = d\omega\frac{1}{2\pi h^2 c\ \nu_r^2}|\dot{X}_r(J^0J')|^2I_r$$

avec l'aide de (28). Par conséquent le coefficient de probabilité pour le processus d'absorption est $1/2\pi h^2 c\nu_r^2.|\dot{X}_r(J^0J'|^2$, conformément à la valeur habituelle du coefficient d'absorption d'Einstein en mécanique matricielle. La concordance des coefficients d'émission peut être vérifiée de la même manière.

La présente théorie, puisqu'elle rend compte de sa propre façon de l'émission spontanée, doit supposément donner l'effet de la réaction de la radiation sur le système émettant, et permettre de calculer les largeurs naturelles des raies spectrales, si l'on réussit à dépasser les difficultés mathématiques que présente la recherche d'une solution générale au problème de l'onde correspondant à l'hamiltonien (30). La théorie permet également de comprendre comment il se fait qu'il n'y ait pas de violation des lois de conservation de l'énergie quand, disons, un photo-électron est émis par un atome sous l'action d'une radiation incidente extrêmement faible. L'énergie de l'interaction entre l'atome et la radiation est un q-nombre qui ne commute pas avec les premières intégrales du mouvement de l'atome seul ou avec l'intensité de la radiation. De ce fait, on ne peut pas spécifier cette énergie par un c-nombre en même temps qu'on spécifie l'état stationnaire de l'atome et l'intensité de la radiation par des c-nombres. En particulier, on ne peut pas dire que l'énergie d'interaction tend vers zéro quand l'intensité de la radiation incidente tend vers zéro. Il y a du coup toujours une partie non spécifiable de l'énergie d'interaction qui peut fournir de l'énergie au photo-électron.

Je voudrais exprimer ma gratitude au Prof. Niels Bohr pour son intérêt pour ce travail et pour de nombreuses discussions amicales à ce propos.

Résumé

On traite le problème d'un assemblage de systèmes similaires satisfaisant les contraintes de Einstein-Bose de la mécanique statistique, qui interagit avec un autre système différent, une fonction hamiltonienne étant obtenue pour décrire le mouvement. La théorie est appliquée à l'interaction d'un assemblage de quanta lumineux et d'un atome ordinaire, et l'on montre que cela fournit les lois d'Einstein pour l'émission et l'absorption d'une radiation.

L'interaction d'un atome avec des ondes électromagnétiques est alors considérée, et il est montré que si l'on prend des énergies et des phases d'ondes qui sont des q-nombres satisfaisant les conditions propres du quantum lui-même plutôt que des c-nombres, la fonction hamiltonienne prend la même forme que celle du traitement quantique. La théorie amène à l'expression correcte des A et B d'Einstein.

Cohomologie cyclique et
géométrie différentielle non-commutative

Alain CONNES

Proceedings du Congrès international des mathématiciens
Berkeley, Californie, Etats-Unis, 1986

La cohomologie cyclique est apparue indépendamment à partir de deux courants différents d'idées, la K-théorie algébrique et la géométrie différentielle non-commutative. J'essaierai d'expliquer dans cet article le sens de la géométrie différentielle non-commutative. Le besoin de considérer de tels espaces et de développer pour eux les analogues des outils de géométrie différentielle est mieux compris dans les deux exemples suivants. Dans les deux cas, on essaie de prouver un résultat de géométrie différentielle classique, et une preuve heuristique est possible si l'on accepte la nouvelle définition de l'espace.

Premier exemple.

THÉORÈME (LICHNEROWICZ, 1961). *Si M est un feuilletage compact de spin dont le genre $\widehat{A}$ est non nul, alors il est impossible de doter M d'une métrique Riemannienne de courbure scalaire strictement positive.*

La preuve du résultat utilise une idée globale simple. Par l'identité de Lichnerowicz, le carré de l'opérateur de Dirac est $\nabla * \nabla + \frac{1}{4}\chi$ où $\nabla * \nabla$ est un opérateur positif et χ est la courbure scalaire. Ainsi pour $\chi > 0$, l'opérateur de Dirac a un indice nul. Mais par le théorème de l'indice indice(Dirac) $= \widehat{A}(M) \neq 0$. CQFD.

On a un résultat plus fort à propos de la non-existence d'une métrique de courbure scalaire positive qui est le résultat suivant

THÉORÈME **[14]**. *Soit M un feuilletage compact orienté avec $\widehat{A}(M) \neq 0$.*
Alors il n'y a pas de sous-fibré de spin intégrable F de TM de courbure scalaire strictement positive.

Donnons une preuve heuristique de ce résultat qui fonctionnera lorsque nous obtiendrons les bons outils. L'idée est la suivante : étant donné un sous-fibré intégrable F du fibré tangent de M, on peut a priori l'intégrer et obtenir un feuilletage de M qui crée un nouvel espace B de feuilles de cette variété feuilletée (Voir Figure 1).

Maintenant, $\widehat{A}(M)$ est l'indice de l'opérateur de Dirac, au moins si M est spin, ou, équivalemment, c'est le pushforward $\pi!(L)$ du fibré trivial L sur M par la fonction $\pi : M \to$ pt. Comme $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, où π_2 est la projection de M sur l'espace de feuilles B, on a $\pi!(L) = \pi_1!(\pi_2!(L))$,

mais $\pi_2!(L) \in K(B)$ est l'indice de la famille d'opérateurs de Dirac le long des feuilles et par conséquent est nul puisque la courbure scalaire des feuilles est strictement positive.

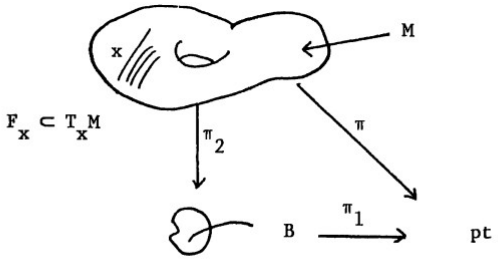


FIGURE 1

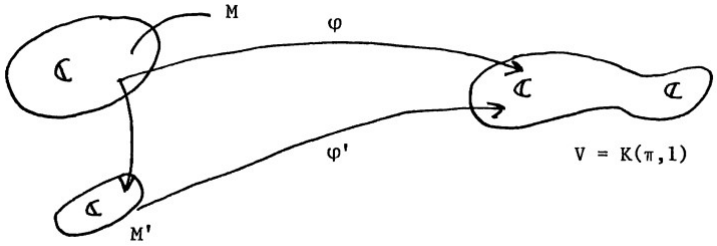


FIGURE 2

Ce raisonnement ne marche pas si l'on a juste une fibration ; on applique alors le théorème de l'indice pour les familles. Pourtant, en général, étant donné un sous-fibré intégrable F, il est impossible de décider s'il crée une fibration ou un feuilletage. Par exemple, sur le deux-tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, l'équation $\mathrm{d}y = \theta\ \mathrm{d}x$ définit une fibration ssi θ est rationnel. Du coup, il est impossible de se restreindre au cas des fibrations, et on a besoin de gérer des espaces comme l'espace B des feuilles d'un feuilletage arbitraire. On a besoin de nouveaux outils pour comprendre et utiliser de tels espaces parce que vus seulement comme des espaces topologiques ordinaires, ils ne sont d'aucune utilité ; en général, ils devraient apporter la topologie globale et $K(B)$ serait trivial.

Second exemple. Nous passons maintenant de l'espace des feuilles d'un feuilletage à un autre exemple lié aux groupes discrets. Il vient d'un problème énoncé par Novikov - l'invariance d'homotopie des plus grandes signatures. Soit M une variété compacte orientée et φ une fonction de M vers un $K(\pi, 1)$ espace V. Par exemple, on peut prendre pour φ la fonction qui classifie la couverture universelle de M. Pour chaque classe de cohomologie $\omega \in H^*(V, \mathbf{C}) = H^*(\pi, \mathbf{C})$, la plus grande signature de la paire (M, φ) est donnée par le scalaire $\langle \mathcal{L}_M . \varphi^*(\omega), [M] \rangle$ où $\mathcal{L}_M$ est le L genre de M et $\varphi^*(\omega)$ est le pullback de ω par φ. Le problème est le suivant : le nombre bien défini ci-dessus est-il un invariant d'homotopie de la paire (M, φ) ? (voir Figure 2).

Quand $V = \mathrm{pt}$, on obtient la signature ordinaire de M, qui est un invariant d'homotopie. Par le travail de Wall et Miscenko, en théorie de la chirurgie équivariante, on peut assigner une signature π-équivariante au recouvrement $\widetilde{M}$ de M pullbacké par φ du recouvrement universel $\widetilde{V}$ de V. De plus, cette signature équivariante appartient (en négligeant la torsion) au groupe de Witt de

l'anneau de groupe $\mathbf{C}\pi$ et est un invariant d'homotopie, $\text{Signature}_\pi(M) \in \text{Witt}(\mathbf{C}\pi)$. Quand π est *commutatif*, on peut prouver l'invariance d'homotopie des plus grandes signatures comme suit. Il y a par exemple un *espace* assigné au groupe π, l'espace des caractères, i.e., le dual $\widehat{\pi}$, qui est Hausdorff et compact, de dimension finie si π est finiment engendré. Alors l'anneau de groupes $\mathbf{C}\pi$ intègre comme sous-anneau l'anneau $C(\widehat{\pi})$ des fonctions continues sur $\widehat{\pi}$:

$$\mathbf{C}\pi \subset C(\widehat{\pi}).$$

La diagonalisation des formes quadratiques sur $C(\widehat{\pi})$ amène une fonction du groupe de Witt de $\mathbf{C}\pi$ sur le K^0 groupe de $\widehat{\pi}$:

$$\text{Witt } \mathbf{C}\pi \to K^0(\widehat{\pi}).$$

Maintenant n'importe quel

$$\omega \in H^n(V, \mathbf{C}) = H^n(\pi, \mathbf{C})$$

est représenté par un cocycle de groupes $\omega(g^1, \dots, g^n)$ totalement antisymétrique en les g^i.

On définit alors de manière unique un flot C sur $\widehat{\pi}$ par l'égalité :

$$\langle c, f^0 d f^1 \wedge \dots \wedge d f^n \rangle = \sum_{\prod_0^n g^i = 1} \widehat{f^0}(g^0)\widehat{f^1}(g^1) \dots \widehat{f^n}(g^n)\omega(g^1, \dots, g^n)$$

où les f^i sont les fonctions sur $\widehat{\pi}$ de telle façon que leur transformation de Fourier $\widehat{f^i}$ soient des fonctions sur le groupe π lui-même. Le flot C est fermé parce que ω est un cocycle de groupes.

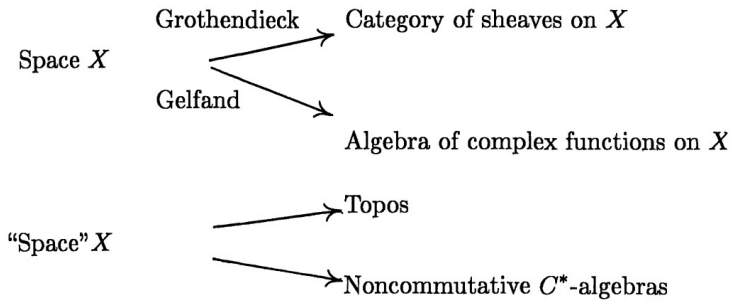
Le lemme principal, alors, qui est un corollaire du théorème de l'indice pour les familles, dit que si l'on apparie C avec le caractère de Chern de la signature équivariante, on obtient une signature plus grande :

$$\langle C, \text{Ch}(\text{Signature}_\pi(\widetilde{M}))\rangle = \langle \mathcal{L}_M . \varphi^*(\omega), [M]\rangle.$$

Ainsi le côté droit est invariant par homotopie. CQFD.

En général, *quand π n'est pas commutatif*, il n'y a pas d'espace de caractères intéressant et on ne peut pas vraiment parler du dual de π comme d'un espace. Pourtant, et cela sera l'élément clef de cette discussion, on peut assigner une C^*-algèbre non-commutative à π ; c'est la complétion de l'anneau de groupe $\mathbf{C}\pi$ agissant sur l'espace de Hilbert $l^2(\pi)$.

Une étude attentive des deux exemples précédents révèle que l'on a besoin, de manière à pouvoir procéder, d'une généralisation adéquate de la notion d'espace, qui nous autorisera à traiter à la fois les espaces de feuilles et les duaux des groupes non-commutatifs, comme si c'étaient des espaces ordinaires.



L'idée de base sous-tendant la nouvelle notion d'espace découverte par Grothendieck - et qu'il a appelée "topos" - est que dans un espace topologique ordinaire, le rôle principal n'est plus joué par les points et par leurs relations de proximité, mais par les catégories de faisceaux sur l'espace. En effet, l'espace topologique original peut être retrouvé à partir de cette catégorie et, de plus, si l'on garde vraiment les conditions adéquates satisfaites par de telles catégories, on obtient la notion de topos qui joue un rôle fondamental implicite dans la nouvelle géométrie algébrique. La nouvelle notion d'espace avec laquelle nous allons travailler est basée sur une idée similaire, mais elle assigne un rôle spécifique aux nombres complexes $\mathbf{C}$ ou, de façon équivalente, à l'analyse fonctionnelle. Elle a pour origine la théorie de Gelfand des C^*-algèbres. Elle affirme qu'un espace topologique compact X est caractérisé par la $*$-algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur X et que de telles algèbres sont les C^*-algèbres commutatives les plus générales. Il n'y a donc pas de bonne raison de se restreindre aux C^*-algèbres commutatives plutôt qu'aux non-commutatives et cette idée remonte aux développements initiaux de la mécanique quantique avec la découverte de la *mécanique matricielle* par Heisenberg. En comprenant, d'un point de vue très optimiste grandement renforcé par l'évidence expérimentale en spectroscopie, l'interaction de la matière avec le champ de radiation, Heisenberg a montré que les observables habituels de la mécanique classique devaient être remplacés par des matrices qui violent la commutativité de la multiplication. Ainsi l'espace des phases des particules quantiques est un des premiers exemples de ce nouveau type d'espaces que nous allons traiter. Pour pousser plus avant cette seconde idée d'espace, nous avons besoin de nombreux exemples, chacun étant utilisé comme un petit laboratoire dans lequel tester les idées et voir ce qui fonctionne. Nous résumons quelques exemples dans la table ci-dessous :

Espace	Algèbre
X	$C(X)$
$X = \widehat{\pi}$ dual d'	$C^*(\pi) \supset \mathbf{C}\pi$
un groupe discret	(complétion dans $\ell^2(\pi)$)
$X = M/F$ espace des feuilles	$C^*(M, F)$
Exemple : feuilletage de Kronecker	$VU = (exp\ 2\pi\, i\theta)UV$
$X = \Omega/G$ espace des orbites	produit croisé $C_0(\Omega) \rtimes G$

Nous avons déjà discuté du premier exemple. Le second vient des feuilletages. Il y a une C^*-algèbre très naturelle, venant des opérateurs qui différencient seulement dans la direction des feuilles, et qui sont elliptiques dans cette direction. Ils s'avèrent avoir des paramètres naturels ;

ils sont inversibles modulo les opérateurs qui sont lisses dans la direction des feuilles. Ces opérateurs constituent une C^*-algèbre, $C^*(M, F)$. Un exemple serait de prendre le feuilletage de Kronecker du 2-tore, qui est induit par l'équation $\mathrm{d}y = \theta\ \mathrm{d}x$ où θ est irrationnel. Dans ce cas, on obtient une C^*-algèbre engendrée par les deux éléments unitaires qui ne commutent pas, mais qui commutent à une phase près égale à $\lambda = \exp 2\pi i\theta$. C'est une algèbre avec laquelle on peut faire de nombreux calculs, exactement comme si on calculait avec les fonctions ordinaires du 2-tore en utilisant l'analyse de Fourier.

Un autre exemple très important a été découvert par Bellissard [**6**] dans le domaine de la physique des états solides et de l'effet de Hall quantique. Dans l'étude des systèmes désordonnés, l'Hamiltonien H_ω est étiqueté par un paramètre $\omega \in \Omega$. De plus, H_ω ne peut commuter avec $H_{T_x}(\omega)$ où T est l'action du groupe de translation de l'espace de paramètre Ω. Ainsi le translaté de l'Hamiltonien engendre une C^*-algèbre non-commutative, qui correspond au "spectre d'énergie" du système.

Etant donnés ces exemples, on a besoin des bons outils. Le premier provient de mon domaine originale d'étude : "les algèbres de von Neumann". Ces algèbres constituent exactement l'analogue non-commutatif de la théorie de la mesure. Leur classification et compréhension ont atteint un état presque complet et satisfaisant.

Mais nous avons besoin alors d'un peu plus que de la simple théorie de la mesure ; nous avons besoin de topologie. Je décrirai maintenant l'outil de base en topologie, introduit initialement par Grothendieck en géométrie algébrique, et ensuite par Atiyah pour les objectifs de la topologie. Cet outil est la K-théorie. Il y a une relation assez simple entre les fibrés vectoriels complexes sur l'espace X et les modules projectifs sur l'algèbre $A = C(X)$; c'est le théorème de Serre-Swann :

$$K^i(X) = K_i(A = C(X)).$$

Il nous permet de faire de la K-théorie des espaces en faisant de l'algèbre linéaire où le corps $\mathbf{C}$ est remplacé par l'anneau A. Alors le groupe des dimensions des modules projectifs finis est le K-groupe $K_0(A)$. Le théorème de périodicité de Bott nous dit que les K-groupes d'une C^*-algèbre A sont les groupes d'homotopie du groupe de jauge, i.e. du groupe unitaire $\mathcal{U}$ des matrices infinies sur A :

$$K_i(A) = \pi_{i+1}(\mathcal{U})$$

A chaque fois qu'un espace est construit en collant ensemble deux espaces, de telle façon qu'on ait une séquence exacte d'algèbres, il y a une séquence exacte longue correspondante de K-groupes, qui est raccourcie grâce à la périodicité :

$$0 \to J \to A \to B \to 0 \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & & K_0(J) & \longrightarrow & K_0(A) \\ & \nearrow & & & \searrow \\ K_1(B) & & & & K_0(B) \\ & \nwarrow & & & \swarrow \\ & & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(J) \end{array}$$

De plus, il y a un principe général qui est absolument crucial. Ci-dessus, nous avons utilisé deux fois le théorème de l'indice pour les familles. Maintenant le principe est qu'un "espace" X sera décrit par une algèbre non-commutative A, et que quand on a une famille (D_x), $x \in X$ indexée par X, de telle façon que la famille des opérateurs de Dirac soit indexée feuille à feuille par l'espace des feuilles, alors l'indice de cette famille appartient à $K^0(X) = K_0(A)$.

Ce principe est très important parce qu'il nous autorise à traduire en termes K-théoriques les propriétés analytiques de base telles que :

- L'évanouissement de l'indice de la famille d'opérateurs de Dirac feuille à feuille :

$$\text{Indice}(\text{Dirac}_L)_{L\in M/F} = 0$$

  quand la courbure scalaire des feuilles est strictement positive.

- L'invariance d'homotopie de la signature π-équivariante : $\text{Signature}_\pi(\widehat{M}) \in K_0(C^*(\pi))$.

L'évanouissement dont il est question ci-dessus a lieu dans le K-groupe $K_0(C^*(M, F))$. Tous les K-groupes sont des groupes abéliens dénombrables mais sont de prime abord des objets extrêmement mystérieux, définis à travers les C^*-algèbres ci-dessus. Quand on travaille avec des espaces ordinaires, on obtient quelque intuition à propos de leurs K-groupes, mais cela est moins clair avec les C^*-algèbres. La première percée réelle qui a vraiment fait tout démarrer a été réalisée par Pimsner et Voiculescu [**26**] qui ont, en particulier, calculé les K-groupes du feuilletage du flot de Kronecker dont il a été question ci-dessus. Cela a permis à P. Baum et à l'auteur de deviner quelle serait la réponse à la fois en termes généraux et en termes géométriques. La situation se décrit ainsi : nous construisons un groupe géométrique, la K-homologie de son espace classifiant, et une fonction μ vers le K-groupe de la C^*-algèbre. L'espace classifiant fait sens dans toutes les situations ci-dessus puisque les topologues ont une manière de donner du sens, à homotopie près, à des espaces comme l'espace des feuilles d'un feuilletage ou l'espace des orbites d'une action de groupe. Ce qu'ils font c'est qu'ils amplifient l'espace, disons M, sur lequel le groupe Γ agit, en croisant M avec un espace contractible $E\Gamma$ sur lequel Γ agit librement ; alors le quotient $M \times_\Gamma E\Gamma$ fait sens et est "*homotopique à* M/Γ".

$$K_*(\text{Espace classifiant}) \xrightarrow{\mu} K(C^*\text{-algèbre})$$

L'application μ est difficile à construire [**5, 4, 12, 24**] et même quand on traite un espace à un seul point, sa simple existence découle du théorème d'Atiyah-Singer [**5**]. C'est essentiellement l'application de la dualité de Poincaré dans la mesure où elle inverse les fonctorialités. Le problème principal de la théorie est de gérer cette application μ ; tous les calculs effectués jusque-là indiquent que c'est une bijection [**4, 23, 24, 27**]. Un outil important développé par l'école russe, par Miscenko et Kasparov en particulier, et aussi par Atiyah, Brown, Douglas, et Fillmore (cf. [**23, 24, 1, 7**]), est la K-homologie pour les C^*-algèbres. Puisque cette théorie a joué un rôle crucial dans la compréhension de l'analogue de la théorie de de Rham des flots sur les espaces ci-dessus, je la rappellerai brièvement. Pour les espaces ordinaires, la K-homologie est définie,

en utilisant la dualité, par un théorème général qui établit qu'étant donnée une théorie cohomologique (telle que la K-théorie), il y a une théorie correspondante de l'homologie, appelée ici K-homologie. On veut réaliser cette théorie de l'homologie concrètement. Il est assez frappant que si l'on est très conservateur et que l'on souhaite coller des espaces ordinaires, en n'acceptant pas les "espaces", on ne sera pas capable de décrire la théorie K-homologie (X) (il y a un K_{pair} et un K_{impair}) comme des classes d'homotopie de classes d'applications d'espaces $\mathrm{Z}_{pair}, \mathrm{Z}_{impair}$ vers l'espace X. Pourtant, avec des "espaces", c'est possible ; Z_{pair} s'obtient en collant ensemble deux "espaces" contractibles, et la C^*-algèbre $C(\mathrm{Z}_{pair})$ est l'algèbre non-commutative A_{pair}, des paires d'opérateurs (x, y) dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont la différence $x - y$ est un opérateur compact. De façon similaire, $C(\mathrm{Z}_{impair}) = A_{impair}$ qui apparaît aussi dans *Beyond Affine Lie Algebras*, d'I. Frenkel, est l'algèbre des matrices 2×2 (x_{ij}) d'opérateurs, tels que x_{12} et x_{21} sont compacts. Bien sûr, une "application continue" de Z_{pair} vers X est donnée par un homomorphisme de $C(X)$ vers $C(\mathrm{Z}_{pair})$, i.e., un homomorphisme de la C^*-algèbre $A = C(X)$ vers A_{pair}. On l'appelle un *module de Fredholm* sur A parce que cela revient à donner un espace de Hilbert mesuré $\mathbf{Z}/2, \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ avec comme étalon $\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, avec une structure de A-module à gauche telle que

(1) $\varepsilon a = a\varepsilon \quad \forall a \in A$,

(2) $[F, a]$ est compact $\forall a \in A$ où $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Il y a une notion similaire de module de Fredholm impair. Sur chaque variété compacte spin^c de dimension paire, le module des spineurs L^2, avec l'étalon $\mathbf{Z}/2$ donné par la matrice γ_5 [**5**] et l'opérateur F donné par la phase $F = D|D|^{-1}$ de l'opérateur de Dirac, est un module de Fredholm qui représente la *classe fondamentale* de la variété en K-homologie [**5**]. Si l'on met ensemble cette notion d'un module de Fredholm avec les idées de Helton et Howe, Carey et Pincus [**18, 9**] sur les opérateurs commutants modulo les idéaux de la trace, on aboutit à l'analogue non-commutatif de la théorie de de Rham : la cohomologie cyclique. Helton et Howe ont associé à chaque opérateur T, normal modulo les opérateurs de classe trace, un flot de de Rham sur R^2 avec une frontière amenée par le spectre essentiel de T. Leur travail était très inspirant parce qu'il montrait que le calcul des formes différentielles pourrait naître de considérations purement théoriques sur les opérateurs dans l'espace de Hilbert. C'est ce qui est fait dans [**11**] ; étant donné un module de Fredholm sur A, on peut définir *des formes différentielles* sur l'"espace" correspondant non pas en utilisant des cartes locales et en les recollant ensemble mais directement comme des opérateurs dans $\mathcal{H}$. C'est exactement la même étape que le remplacement, en mécanique quantique, des crochets de Poisson par des commutateurs. Ainsi

$$\mathrm{d}a = i[F, a] \qquad \forall a \in A$$

définit la différentielle d'une fonction. Les formes de degré q sont obtenues comme produits de 1-formes : $\Omega^q = \{\sum x^0 \ \mathrm{d}x^1 \ldots \ \mathrm{d}x^q, \quad x^j \in A\}$. De cette manière, on obtient une algèbre différentielle graduée ; le produit est le produit d'opérateurs et la différentielle est donnée par

$$d\omega = i(F\omega - (-1)^q \omega F) \qquad \text{for } \omega \in \Omega^q.$$

On a $d^2 = 0$, et le point principal est d'obtenir l'intégration des formes $\omega \to \int \omega \in \mathbf{C}$ satisfaisant $\int d\omega = 0$ et $\int \omega_2\omega_1 = (-1)^{q_1q_2} \int \omega_1\omega_2$.
La formule qui marche est assez simple : $\int \omega = Trace(\varepsilon\omega)$. C'est là qu'apparaît la *dimension*, la trace ayant uniquement un sens si ω est un opérateur de *classe trace*. Par l'inégalité de Holder, cela est vérifié, pour tout $\omega \in \Omega^n$, si l'on suppose que $[F, a] \in \mathcal{L}^n \ \ \forall a \in A$. Ici, pour tout nombre *réel* $p \in [1, \infty]$, $\mathcal{L}^p$ est l'idéal des opérateurs compacts T avec $\sum \lambda_q(|T|)^p < \infty$, où $\lambda_q(|T|)$ est la $q^{\text{ème}}$ valeur propre de la valeur absolue de T. La *dimension* d'un module de Fredholm sur une algèbre est le plus petit des p pour lesquels $[F, a] \in \mathcal{L}^p \ \forall a \in A$. Pour la classe fondamentale des variétés M décrite ci-dessus, cela fournit la dimension de M. En général, elle n'est pas nécessairement entière. Etant donné un module pair de Fredholm de dimension p sur A, on ne peut intégrer que les formes $\omega \in \Omega^n$ de degré $\geq p$. De plus, les formes impaires ont une intégrale nulle. Du coup, la construction ci-dessus fournit pour tout entier pair $n \geq p$, la fonctionnelle τ_n appelée le caractère n-dimensionnel du module de Fredholm :

$$\tau_n(a^0, \dots, a^n) = \int a^0 \mathrm{d}a^1 \dots \mathrm{d}a^n \ \ \forall a^i \in A.$$

Une analyse attentive de ces fonctionnelles m'a amené à découvrir la cohomologie cyclique en 1981. Elle a été découverte indépendamment à partir de la K-théorie algébrique par Feigin et Tsigan [**17, 30**], en remplaçant l'homologie de groupe par l'homologie de l'algèbre de Lie dans la construction de base de la K-théorie algébrique de Quillen. Elle est aussi apparue, au moins sous une forme implicite, dans le travail de Hsiang et Staffeld sur la K-théorie algébrique des espaces [**20**]. C'est bien sûr frappant que de plusieurs courants d'idées, on obtienne la même théorie : la *cohomologie cyclique*. On a le lemme simple et crucial suivant.

LEMME. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et τ une application $(n+1)$-linéaire $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ telle que*
(1) $\tau(a^1, \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, \dots, a^n) \forall a^i \in \mathcal{A}$;
(2) $\sum_0^n (-1)^j \tau(a^0, \dots, a^j, a^{j+1}, \dots, a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau(a^{n+1}a^0, \dots, a^n) = 0 \ \ \forall a^i \in \mathcal{A}$.
Alors l'application $e \in \mathcal{A}, e^2 = e \to \tau(e, \dots, e)$, fournit un morphisme de $K_0(\mathcal{A})$ dans $\mathbf{C}$.

En fait, $K_0(\mathcal{A})$ est engendré par les idempotents $e^2 = e$ dans les matrices sur $\mathcal{A}$, $M_q(\mathcal{A}) = M_q(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{A}$, et on doit étendre τ à $M_q(\mathcal{A})$ par l'égalité :

$$\tau_q(m^0 \otimes a^0, \dots, m^n \otimes a^n) = \mathrm{Trace}(m^0 \dots m^n)\tau(a^0, \dots, a^n)$$

$\forall m^j \in M_q(\mathbf{C}), a^j \in \mathcal{A}$.

Voici quelques exemples de fonctionnelles rτ qui satisfont (1) et (2) :

EXEMPLE α. Soit $\mathcal{A} = \mathbf{C}^\infty(M)$, l'algèbre des fonctions lisses sur une variété compacte, et C un flot fermé sur M de dimension k. Alors $\tau(\int^0, \dots, \int^k) = \langle C, \int^0 d \int^1 \wedge \dots \wedge d \int^k \rangle \forall \int^j \in \mathcal{A}$ a exactement les propriétés (1), (2) d'un cocycle cyclique. En fait, τ satisfait $\tau^\sigma = sign(\sigma)\tau$ pour *toute* permutation de $\{0, 1, .., k\}$, mais puisque $\mathrm{Trace}(m^0 \dots m^k)$ est invariant seulement sous les

permutations *cycliques*, il n'y a que (1) qui soit satisfaite par tous les τ_q. On a $K_0(\mathcal{A}) = K^0(M)$ et le lemme fournit en retour le caractère de Chern, vu comme un appariement avec l'homologie de M.

EXEMPLE β. Soit π un groupe discret, $\mathcal{A} = \mathbf{C}\pi$ l'anneau de groupe, et $\omega \in \mathbf{Z}^n(\pi, \mathbf{C})$ un cocycle de groupe convenablement normalisé tel que $\omega(g^1, \dots, g^n) = 0$ si $g^1 \dots g^n = 1$. Alors l'égalité

$$\tau(g^0, \dots, g^n) = 0 \text{ if } g^0 \dots g^n \neq 1 \ \ \forall g^i \in \pi$$
$$\tau(g^0, \dots, g^n) = \omega(g^1, \dots, g^n) \text{ if } g^0 \dots g^n = 1 \ \ \forall g^i \in \pi,$$

définit un cocycle n-cyclique τ sur $\mathcal{A}$. De plus, en étendant τ aux matrices infinies sur $\mathcal{A}$, on peut montrer que

$$\langle \tau, \text{Signature}_\pi(\widetilde{M}) \rangle = \langle \mathcal{L}_M . \varphi^*(\omega), [M] \rangle$$

avec les notations du problème des plus hautes signatures. La cohomologie cyclique des anneaux de groupes est calculée par Burghelea dans [**8**].

EXEMPLE γ. Pour chaque $n \geq p$ pair, le caractère n-dimensionnel τ_n d'un module de Fredholm sur A est un cocycle cyclique. De plus, l'appariement avec $K_0(A)$, $\langle \tau_n, e \rangle$ est donné pour tout idempotent e par l'*indice d'un opérateur de Fredholm*, et, en particulier, il aboutit dans $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$. Il correspond à l'appariement $\mathbf{Z}$-valué entre la K-théorie et la K-homologie, ce qui assure qu'il est hautement non trivial.

Etant donnée une algèbre $\mathcal{A}$, il y a une manière évidente de construire des cocycles cycliques sur $\mathcal{A}$, notamment $\tau = b\varphi$ où $\varphi \in C_\lambda^{n-1}$ est une fonctionnelle n-linéaire sur $\mathcal{A}$ satisfaisant (1), et $b\varphi$ sa colimite de Hochschild donnée par la formule (2). Le groupe pertinent est le quotient $H_\lambda^n(\mathcal{A}) = Z_\lambda^n(\mathcal{A})/bC_\lambda^{n-1}$, où $Z_\lambda^n = \text{Ker } b$, et il est appelé la *cohomologie cyclique* de $\mathcal{A}$. Il s'avère qu'en travaillant simplement avec les modules de Fredholm de l'exemple γ, toutes les propriétés de la cohomologie cyclique permettent de retomber sur ses pieds. D'abord, un module de Fredholm a de nombreux caractères τ_q, un pour chaque entier pair $q \geq p$, et il ne serait pas déraisonnable de s'attendre à ce que $\tau_{q+2}, \tau_{q+4} \dots$ amène une nouvelle information non contenue dans τ_q. Les calculs explicites montrent qu'il y a un opérateur de périodicité naturelle

$$S : H_\lambda^n(\mathcal{A}) \to H_\lambda^{n+2}(\mathcal{A})$$

donné en fait par le cup produit par le générateur de ${H_\lambda}^2(\mathbf{C})$ et tel que $\tau_{q+2k} = S^k \tau_q$ in $H_\lambda^{q+2k}(\mathcal{A})$. Alors, dans le but de trouver le plus petit n pour lequel τ_n est défini, on a besoin de déterminer l'image de S. Mais par construction, le complexe (C_λ^n, b) est un sous-complexe du complexe de Hochschild (C^n, b) où C^n est l'espace de toutes les fonctionnelles $(n+1)$-linéaires sur $\mathcal{A}$. Il en résulte que $\tau \in \text{Im}S$ ssi τ est trivial dans ce dernier complexe, dont la cohomologie $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ à coefficients dans le bimodule des formes linéaires sur $\mathcal{A}$, est calculable par les méthodes générales de l'algèbre homologique. Le point final est la construction d'un opérateur naturel B à partir de la cohomologie de Hochschild $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ vers $H_\lambda^{n-1}(\mathcal{A})$ et la preuve de l'exactitude de la séquence suivante :

$$H^n_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} H^{n+2}_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} H^{n+2}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$$

$$B \curvearrowright H^{n+1}_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} H^{n+3}_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} H^{n+3}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$$

Ainsi, la cohomologie de Hochschild et la cohomologie cyclique forment un couple exact qui avec la séquence spectrale associée devient un outil de base pour calculer la cohomologie cyclique des algèbres. La puissance de cet outil est illustrée par deux exemples :

EXEMPLE a. Soit M une variété compacte, $\mathcal{A} = C^\infty(M)$. En imposant des conditions de continuité évidentes aux cochaînes, on obtient que les groupes de cohomologie de Hochschild $H^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ sont identifiables à l'espace Ω_q, des flots de de Rham de dimension q sur M. L'application $I \circ B$ du couple exact est la limite de de Rham d^t, et on obtient

$$H^q_\lambda(\mathcal{A}) = \{\text{Ker } d^t \subset \Omega_q\} + H_{q-2}(M, \mathbf{C}) + H_{q-4}(M, \mathbf{C}) \dots .$$

L'homologie de de Rham de M s'identifie à la cohomologie cyclique périodique de

$$\mathcal{A} = H^*_{\text{Per}}(\mathcal{A}) = \varinjlim(H^n_\lambda(\mathcal{A}), S).$$

EXEMPLE b. Soit (M, F) une variété feuilletée, $A = C^*(M, F)$ sa C^*-algèbre correspondante. Dans A, il y a une sous-algèbre dense naturelle $\mathcal{A}$ d'éléments lisses et on doit calculer sa cohomologie cyclique. On a

$$H^*_{\text{Per}}(\mathcal{A}) \cong H^*_\tau(\text{Espace classifiant})$$

où le côté droit est la cohomologie avec les coefficients complexes de l'espace classifiant du groupoïde d'holonomie ou le graphe du feuilletage. L'indice τ signifie que cette cohomologie est tordue par l'orientation du fibré transverse τ du feuilletage. En utilisant les fibres sur M et la construction naturelle de $\mathcal{A}$, on construit un morphisme de localisation λ_M, qui est une généralisation de grande portée du flot de Ruelle-Sullivan :

$$\lambda_V : H^*_{\text{Per}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\lambda_M} H^*_\tau(M, C)$$

et l'on aboutit à la formulation cohomologique suivante du théorème de l'indice longitudinal pour les feuilletages [**12**].

THÉORÈME. *Soit (M,F) une variété compacte feuilletée, D un opérateur elliptique longitudinal, et τ un cocycle cyclique sur $\mathcal{A}$. Alors*

$$\langle \tau, \text{Indice}(D) \rangle = (\lambda_M(\tau)\text{Td}(F_{\mathbf{C}})\text{Ch } \sigma_D, [M])$$

où σ_D est le symbole longitudinal de D.

Il y a, cependant, encore une très difficile étape à franchir pour utiliser la cohomologie cyclique comme une théorie de de Rham ordinaire pour nos "espaces" - tel que l'espace des feuilles d'un feuilletage - et pour prouver le Théorème 2 de cet article, par exemple [**14**]. Le point problématique est que $\mathcal{A} \subset A$, dans l'exemple b, n'est en général pas un isomorphisme en K-théorie, et l'information analytique repose en $K(A)$ et non en $K(\mathcal{A})$. Ce problème est complètement résolu dans [**14**] pour la classe transverse fondamentale de M/F et toutes les classes venant par pull-back de la cohomologie de Gelfand-Fuchs par la fonction B(espace classifiant) $\to B\Gamma_q$.

Cette difficulté est que pour un feuilletage général, il est impossible de réduire le groupe de structure transverse à un groupe compact. De façon équivalente, pour un groupe de difféomorphismes agissant sur une variété, on ne peut pas trouver de métrique Riemannienne invariante. Le résultat implique, en particulier, la conjecture de Novikov pour les classes de cohomologie de Gelfand-Fuchs sur B(Diff N) pour tout N.

BIBLIOGRAPHIE

Commentaires bibliographiques. Pour un survol de la cohomologie cyclique et une bibliographie complète, voir [**10**, **17**]. Le calcul de l'homologie des traces sur l'algèbre différentielle universelle $\Omega(\mathcal{A})$ d'une algèbre $\mathcal{A}$ a été effectué explicitement dans [**11**, Théorème 33, p. 118]. Une fois dualisé, cela donne le calcul [**22**] en fonction de l'homologie cyclique de la cohomologie du complexe universel de de Rham introduit par Karoubi dans [**21**]. Le calcul de l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices en fonction de l'homologie cyclique est faite dans [**25**, **30**]. L'idée d'utiliser l'identité de Lichnerowicz dans un contexte de C*-algèbres est due à J. Rosenberg [**27**].

[1] M.F. Atiyah, *Global theory of elliptic operators*, Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Univ. of Tokyo Pres, Tokyo, 1970, pp. 21-29.

[2] _____, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967.

[3] M. F. Atiyah and L. Singer, *The index of elliptic operators*. IV, Ann. of Math. **93** (1971), 119-138.

[4] P. Baum et A. Connes, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, Preprint I.H.E.S., 1082.

[5] P. Baum et R. Douglas, *K-homology and index theory*, Operator Algebras and Applications, Proc, Sympos. Pure Math, vol. 38, part I, Amer, Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 117-173.

[6] J. Bellissard, *K-theory of C-alpebras in solid state physics* (Conf. on Statistical Mechanics and Field Theory, Mathematical Aspects, Groningen, August 26-30, 1985).

[7] L. G. Brown, R. Douglas, and P. A. Filmore, *Extensions of C^*-algebras and K-homology*, Ann. of Math. (2) **105** (107), 265-324.

[8] D. Burghelea, *The cyclic cohomology of the group rings*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 354-365.

[9] R. Carey et J. D. Pincus, *Almost commuting algebras, K-theory and operator algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 575, Springer, Berin-New Vork, 1977.

[10] P. Cartier, *Homologie cyclique*, Exposé 621, Seminaire Bourbaki, Février 1984.

[11] A. Connes, *Noncommutative differential geometry. Part I, The Chern character in K-homology, Part II, de Rham homology and noncommutative algebra*, (Preprint), Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math **62** (1986), 44-144.

[12] A. Connes et G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 1139-1183.

[13] A. Connes, *C^*-algèbres et géométrie différentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **290** (1980), 599-604.

[14] _____, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, Preprint I.H.E.S. M/84/7, 1984.

[15] _____, *Spectral sequence and homology of currents for operator algebras*, Math Forschungsinstitute Oberwolfach Tagungsbericht 42/81, Funktionalanalysis and C^*-Algebren, 27-9/3-10-1981.

[16] R. Douglas and D. Voiculeseu, *On the smoothness af sphere extensions*, J. Operator Theory **6** (1981), no. 1, 103-111.

[18] J. Helton and R. Howe, *Integral operators, commutators, traces, index and homology*, Proc. Conf, on Operator Theory, Lecture Notes in Math, vol. 345, Springer, Berlin-New York, 1973.

[19] _____, *Traces of commutators of integral operators*, Acta Math. **135** (1975), 271-305.

[20] W. C. Hsiang et R. E. Staffeldt, *A model for computing rational algebraic K-theory of simply connected spaces*, Invent. Math. **68** (1982), 227-239.

[21] M. Karoubi, *Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique*, CMS Conf. Proc, 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1982.

[22] _____, *Homologie cyclique et K-théorie algébrique*. I, II, C.R. Acad. Sci. Sér. I Math. **297** (1983), 447-450, 513-516.

[23] G. Kasparov, *K-functor and extensions of C^*-algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **44** (1980), 571-636.

[24] _____, *K-theory, group C^*-algebras and higher signatures*, Conspectus, Chernogolovka, 1983.

[25] J. L. Loday et D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra of matrices*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), 295-297.

[26] M. Pimsner et D. Voiculescu, *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C^*-algebras*, J. Operator Theory **4** (1980), 93-118.

[27] J. Rosenberg, *C^*-algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture*, Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math. **58** (1984), 409-424.

[28] I. Segal, *Quantized differential forms*, Topology **7** (1968), 147-172.

[29] *Quantization of the de Rham complex*, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 205-210.

[30] B. L. Tsigan, *Homology of matrix Lie algebras over rings and Hochschild homology*, Uspekhi Mat. Nauk **38** (1983), 217-218.

COLLÈGE DE FRANCE, 75005 PARIS, FRANCE

L'imagination et l'infini

Alain Connes
Alain Prochiantz [1]

Imaginations, une série d'entretiens proposée par Alain Prochiantz, neurobiologiste, professeur au Collège de France.

Alain Prochiantz : Nous sommes dans la grille d'été, sur le programme *Imaginations*, avec des philosophes, des sociologues, et des savants, et des artistes, sur le thème probablement rassembleur, entre les scientifiques et les artistes. Il faut dire que c'est comme ça qu'on a en tout cas pensé la chose. Et j'ai aujourd'hui le plaisir de recevoir Alain Connes. Alors, Alain Connes est un très grand mathématicien. Il est professeur du Collège de France, où il a occupé la chaire Analyse et géométrie. Il est récipiendaire de la plus grande récompense qu'on puisse avoir en mathématiques, qui est la médaille Fields. Et il a cet intérêt non seulement pour les mathématiques, bien entendu, mais aussi pour la musique et pour l'art, ce qui fait qu'il est vraiment une des personnes qui peut faire le lien aujourd'hui très fort entre art et science sur un mode qui n'est pas un mode plat mais qui est un mode qui engage intellectuellement celui qui fait de l'art ou celui qui fait de la science, c'est-à-dire une véritable réflexion sur le sujet de l'art et le sujet de la science. C'est un spécialiste de ce qu'on appelle la géométrie non-commutative et si je dis ça, c'est probablement parce que ce n'est pas étranger à son intérêt pour le temps, et à travers l'intérêt pour le temps, son intérêt pour la création musicale.

Alain, j'ai le devoir d'essayer d'extraire de toi, pas tout parce que c'est inépuisable, mais en tout cas des éléments de réflexion sur cette question de la science, des mathématiques, de la beauté en mathématiques, et de son lien avec la beauté artistique.

1. Cet interview d'Alain Connes, Professeur honoraire de mathématiques au Collège de France, par Alain Prochiantz, Administrateur du Collège de France ainsi que Professeur de Neurobiologie au Collège de France, a été réalisé lors d'une émission Savoirs du Cycle Imaginations sur France-Culture (22.7.2018).
Transcription par Denise Vella-Chemla (2.2.2019).

Alain Connes : Oui. En fait, donc, j'ai un peu réfléchi en ce qui concerne simplement l'imagination. Et la première chose qui m'a frappé, c'est que finalement, la radio, comme moyen de communication, est un moyen qui est beaucoup plus intéressant, au niveau de la concentration de l'auditeur, au niveau de l'écoute justement, qu'un autre moyen de communication comme la télévision. Pourquoi ? Parce que l'imagination, dans le terme imagination, il y a les images, et il est extrêmement important que l'auditeur n'ait pas un rôle purement passif, ne reçoive pas l'image telle qu'on veut la lui imposer, mais soit capable lui-même de la créer, et de la créer à partir du discours, à partir du langage. Donc, c'est la première chose qui m'a frappé, c'est à quel point une émission de radio est beaucoup plus appropriée, pour parler de l'imagination, que si on essayait de l'illustrer directement. La deuxième chose qui m'a aussi beaucoup frappé, c'est en quel sens les mathématiciens ont une utilisation de l'imagination qui a priori est très différente, très très spéciale, très différente de ce qui se passe dans les autres domaines, c'est ça que je veux essayer d'expliquer. Donc, ce que je veux dire, c'est qu'un mathématicien utilise beaucoup l'imagination, mais il l'utilise d'une manière très spéciale. C'est-à-dire qu'en fait, le rôle, le premier rôle de l'imagination pour un mathématicien, qui est un rôle essentiel, c'est celui de créer des images mentales.

Et dans ce rôle-là, en fait, bien sûr, bien entendu, ce n'est absolument pas quelque chose de passif. C'est un... comment dire... on ne peut y arriver véritablement que lorsqu'on sèche sur un problème. Donc il y a une vertu essentielle... pour un mathématicien, c'est, par exemple s'il est en train de lire un bouquin, c'est de prendre par exemple un théorème qui est dans un livre etc. et surtout, de ne pas regarder la démonstration, mais d'essayer de démontrer lui-même. Pourquoi ? Parce que lorsqu'il fait cela, en fait, il va créer dans son cerveau, je dis une image mentale mais en fait, c'est très rarement, c'est pas toujours quelque chose de géométrique, c'est pas toujours quelque chose qui peut se décrire comme une image, mais, c'est un certain assemblage dans son cerveau qui ensuite va faire que, lorsqu'il sera confronté à une page de formules, eh bien, cette page de formules va lui parler. Et dans cette page de formules, il va voir des acteurs. Il va voir des choses qui vont "résonner" entre elles, etc. La comparaison que j'ai toujours envie de prendre, c'est que supposez par exemple que vous soyez dans le métro, et que vous voyiez un passager du métro ou une passagère du métro qui est en train de lire une partition de musique. Quand on n'est pas musicien, cette partition de

musique ne nous dit rien, rien du tout. Quand on n'est pas mathématicien et qu'on voit un passager en train de lire des formules de maths, on a l'impression que... je veux dire, qu'on est complètement exclu et qu'on n'a aucune chance de comprendre. Et en fait, la raison, c'est justement cette fabrication d'images mentales et cette fabrication d'images mentales, elle implique de manière absolument essentielle cette capacité d'imaginer. Cette capacité d'imaginer, là, elle joue un rôle absolument fondamental. Et je donne toujours le conseil suivant, je veux dire, par exemple, à un jeune mathématicien : le conseil, c'est si on est confronté par exemple à un calcul même très difficile, bien sûr, ce sont des calculs abstraits etc., la bonne méthode, ça n'est pas de se ruer sur l'ordinateur pour essayer de faire le calcul, ou de prendre une feuille de calculer, non ! La bonne méthode, c'est de partir pour faire un tour à pied et d'essayer de se débrouiller avec ce qu'on a, pour justement, en y réfléchissant, créer dans le cerveau ces images mentales. Et peu importe la complexité du problème.

Peu importe le caractère impossible au départ de cette création, c'est en séchant, et justement, en s'appropriant progressivement des objets mentaux qui vont correspondre au problème qu'on va progresser. Donc, il y a une part active qui est absolument essentielle et de mon point de vue, c'est ça vraiment le premier, le rôle fondamental de l'imagination en mathématiques. En ce sens-là, c'est très différent d'autres domaines, parce que, bien sûr lorsqu'on fait de la physique, et qu'on parle de l'univers, bon, eh bien, chacun a une image mentale au départ, de ce que c'est que l'univers, donc, on ne va pas avoir besoin de créer quelque chose à partir de rien, alors qu'en maths, vraiment, on est confronté à cette chose-là. Donc, de mon point de vue, il y a ce point essentiel, qui est que l'on doit être actif, et on est d'autant plus actif que l'on ne nous donne pas un modèle déjà pré-établi. Et si par exemple on était à la télévision, on essaierait d'illustrer des concepts de mathématiques par des images mais, chaque mathématicien, chaque personne, est un cas particulier et va créer dans son cerveau, une image très particulière, un assemblage très très particulier, et il est impossible de donner une forme générique comme cela.

Alain Prochiantz : Mais quand tu parles d'images mentales, je pense qu'à un certain niveau, même en dehors des mathématiques, il y a un moment où il est besoin d'avoir recours à cet espèce de fabrication d'images mentales...

Alain Connes : Tout à fait.

Alain Prochiantz : de briques que l'on manipule...

Alain Connes : ...qui s'emboîtent entre elles...

Alain Prochiantz : qui s'emboîtent ou qui ne s'emboîtent pas et ça, c'est peut-être parce que justement, la pensée mathématique est la seule façon de penser, en dehors des formules. C'est pas uniquement des formules, c'est une façon de réfléchir qui est une langue naturelle pour le savant d'une certaine façon. Donc la question que je voulais te poser, pour éclairer un petit peu, pour moi d'ailleurs, mais aussi peut-être pour ceux qui nous écoutent, c'est, je dirais "Quelle est l'image de ces images mentales ? Ca ressemble à quoi une image mentale ?"

Alain Connes : Bon, alors d'abord, il y a les images mentales les plus simples, bien entendu. C'est-à-dire que si on parle de la géométrie ordinaire, par exemple, la géométrie plane, il y a un théorème que j'aime beaucoup, c'est le théorème de Morley. Donc là, l'auditeur doit essayer d'abord d'imaginer un triangle. Alors chaque auditeur va imaginer un triangle différent, mais peu importe, d'accord. Donc on part d'un triangle. Et que dit le théorème de Morley, que dit le théorème de Morley ? C'est qu'on découpe chaque angle du triangle en trois parties égales, donc en trois angles égaux. Et on intersecte les droites correspondantes. On obtient un triangle à l'intérieur, en général, du triangle dont on est parti, et la merveille, c'est que le triangle qu'on obtient à l'intérieur est toujours, toujours, un triangle équilatère. Alors ça, c'est merveilleux ! C'est ce qu'on appelle le théorème de Morley. Et quand on a énoncé ce théorème, on a une image mentale, bien sûr. Et en fait, l'image mentale que l'on a est bien meilleure que si on dessinait sur un papier un triangle, et qu'on ait dessiné le triangle équilatère au milieu. Pourquoi ? Parce qu'on serait automatiquement perturbé par le grain du papier, par le crayon avec lequel on a écrit, etc. Donc là, il y a déjà une abstraction qui s'est produite. Mais... il y a un point essentiel justement en mathématiques. Il y a un point essentiel, c'est que j'ai pu vous expliquer ce que c'était qu'une image mentale très simple, dans le cas de la géométrie plane. Mais en mathématiques, on manipule des géométries qui sont bien plus compliquées que ça, et qui en général, sont des géométries qui sont de dimensions bien plus grandes que 3, et même en général, de dimension infinie.

C'est-à-dire on a compris, grâce à la physique par exemple, que la mécanique quantique, c'est une mécanique qui se produit dans un espace qu'on appelle l'espace de Hilbert, qui est un espace de dimension infinie. Alors, comment se fait-il que le mathématicien puisse avoir accès à cet espace, de dimension infinie ? C'est ça la question, c'est la question essentielle. Et cette question essentielle, en fait, elle a une réponse très, très, très fondamentale. Cette réponse, c'est la dualité entre la géométrie et l'algèbre.

Alors pour l'expliquer, je vais prendre un exemple. Je vais prendre un exemple plus simple que le théorème de Morley. Supposons par exemple qu'on soit frappé par le fait que les médianes d'un triangle se rencontrent en un point. Alors ça va bien quand on fait dans la géométrie plane. On voit bien ce que c'est. On a un énoncé analogue lorsqu'on va dans la géométrie dans l'espace. Mais qu'en est-il lorsqu'on regarde une géométrie en dimension arbitraire ? Ca paraît impossible parce que comment est-ce qu'on va se représenter un espace de dimension 4, un objet correspondant à un triangle en espace de dimension 4 etc. ou en dimension plus grande : la réponse est merveilleusement simple : c'est que la manière de comprendre, dans le langage, algébrique, par une formule, pourquoi les médianes d'un triangle se rencontrent, c'est simplement d'écrire les coordonnées de ce qu'on appelle le barycentre de 3 points. C'est-à-dire qu'on prend les coordonnées des points. Et puis on fait leur somme et on la divise par 3, parce qu'on est en dimension deux ; si on était en dimension 3, on diviserait par 4 et ainsi de suite. Et alors, ce qui est merveilleux, c'est que lorsqu'on a, c'est un peu comme les deux hémisphères du cerveau, c'est-à-dire il y a l'hémisphère droit et l'hémisphère gauche, ils communiquent entre eux. C'est l'hémisphère droit qui a l'image mentale du triangle, comme je vous l'ai expliqué au début. C'est-à-dire qu'il le voit, qu'il voit le triangle de Morley, etc. Et puis après, on communique.

On communique avec l'hémisphère gauche. Dans l'hémisphère gauche, il y a une formule. C'est une formule qui permet... Et cette formule, elle est complètement insensible à la dimension. C'est-à-dire qu'une fois qu'on l'a écrite en dimension 2, elle va exister en dimension 3, en dimension 4, et même en dimension infinie. Donc il y a une merveille qui se produit, qui est qu'en mathématiques, on est capable d'escalader, précisément, parce qu'il y a quelque chose qui permet de renforcer l'image mentale, qui permet de lui donner une sécurité, et c'est la formule. Et une fois qu'on a cette for-

mule, après, on va fonctionner dans un autre mode. Et ce mode n'est plus le mode visuel, et c'est pour ça que la notion d'image mentale est réductrice, parce qu'elle réduit tout à une vision géométrique. Or, en mathématiques, il y a une dualité, entre justement la géométrie et l'algèbre. C'est-à-dire que d'un côté, on a cette vision géométrique et là, en général, la vision géométrique, c'est quelque-chose qui va s'imposer immédiatement... C'est-à-dire on a une figure, cette figure va vous parler, mais elle va vous parler tout de suite.

Alors que l'algèbre, c'est précisément autre chose. Et c'est quelque chose qui va évoluer dans le temps, et c'est une chose dans laquelle les calculs vont se faire algébriquement, et j'avoue que moi, je suis par exemple persécuté. La nuit dernière, je me suis réveillé, je me suis dit "est-ce que dans telle formule, je ne me suis pas trompé ?". Pourquoi ? Parce que mon cerveau continue à fonctionner...

Et il continue à faire les calculs etc. Et ça, c'est quelque chose qui se déroule dans le temps, et qui n'est pas du tout de la même nature, qu'une image mentale statique, une image géométrique, qui elle existe et est figée une fois pour toutes et qu'on comprend de manière immédiate.

Alain Prochiantz : Les images mentales ne sont pas forcément statiques. J'imagine qu'on les bouge, on les retourne, on les combine.

Alain Connes : On peut les bouger, on peut les retourner. Il y a le retournement de la sphère par exemple.

Alain Prochiantz : Mais probablement pas n'importe comment. C'est-à-dire est-ce qu'il y a une grammaire de la combinaison des images mentales ? Qu'est-ce qui est permis dans la manipulation des objets mentaux, de ces images, et qui fait que ce n'est pas n'importe quoi, il y a une sorte de grammaire derrière.

Alain Connes : Il y a bien sûr une grammaire derrière. Je pense que, sans doute, une des facettes les plus importantes de la grammaire, c'est le pouvoir de l'analogie. Et puis ensuite de la métaphore. Mais je pense que l'analogie, c'est quelque chose d'extraordinairement puissant, et qui pour le moment, est tout à fait inaccessible à des procédés comme le Machine Learning, l'intelligence artificielle, etc. Donc c'est un outil extraordinaire...

Alain Prochiantz : Pour toi, c'est l'intuition, l'analogie ?

Alain Connes : Non, c'est plus que ça. C'est-à-dire qu'en fait, ce qui se produit, justement, à travers les images mentales, c'est qu'à un moment donné, le cerveau s'aperçoit que deux images mentales qui paraîtraient extrêmement loin les unes des autres (c'était ce qui était arrivé à Poincaré lorsqu'il montait dans le bus), des images mentales extrêmement éloignées les unes des autres, je veux dire, il parlait de deux choses complètement différentes, en fait, il s'est aperçu à un moment donné qu'il y avait des ressemblances extraordinaires entre les deux. Et le fait qu'il y a eu ces ressemblances extraordinaires entre les deux a fait que, après, il a pu développer une analogie entre deux domaines qui a priori n'ont rien à voir les uns avec les autres.

Et alors, une analogie, c'est quelque-chose qui est extrêmement délicat à manipuler, parce que c'est pas un simple dictionnaire. Si c'était un simple dictionnaire, ce serait rasoir, c'est-à-dire si on pouvait dire "telle chose correspond à telle autre chose etc., etc". C'est une espèce de... Il y a un mathématicien japonais, qui s'appelle Oka, qui avait merveilleusement décrit, c'est une espèce de transplantation, une espèce de... On a une petite fleur et très délicatement, on essaie de la transplanter à un autre endroit, et pourquoi c'est quelque chose d'incroyablement fécond et efficace, c'est parce que en général, justement, les choses que l'on comprend d'un côté, on ne les comprend pas de l'autre et inversement. Donc ça veut dire qu'on va pouvoir transplanter la compréhension qu'on a d'un côté, et voir comment, en essayant, on fait des essais, on voit etc. mais il ne faut surtout pas, à ce moment-là du développement, il ne faut surtout pas essayer d'être trop rigoureux, parce que si on est trop rigoureux, tout va s'effondrer. Et c'est un moment, justement, qui a un aspect poétique et artistique. Pourquoi ? Parce que quand on transplante des petites fleurs, quand on fait ce procédé-là, si on essaie d'être trop intelligent, trop rapide, etc., on va dire "bah, ça va pas marcher, mais ça va pas marcher pour telle raison etc." Et à ce moment-là, on abandonne, et on a tout gâché.

Alain Prochiantz : C'est une sorte de correspondance, en fait.

Alain Connes : C'est une sorte de correspondance, d'analogie. Et on ne peut pas essayer de la codifier de manière trop précise au moment où on la découvre. C'est quelque-chose d'extrêmement fragile et cette fragilité-là fait

que, si par exemple, au moment où on la découvre, on essaie de la dire, on essaie, il faut, il faut savoir que les mathématiciens sont des gens très durs, c'est-à-dire qu'en mathématiques, le rêve est exclu. Je vais revenir là-dessus. Mais si on a perçu une analogie entre deux sujets, et si on essaye de manière trop rapide, trop prématurée, de la dire, elle va être détruite. Donc il y a une partie du développement d'une nouvelle théorie comme ça, dans laquelle on doit se protéger, on doit se protéger, c'est comme un petit enfant qui doit être protégé, etc. et seulement au bout d'un moment, quand il aura fait ses preuves, quand il aura grandi suffisamment, là on pourra le dévoiler.

Alain Prochiantz : Il faut laisser mûrir l'analogie, mûrir la correspondance, pour que ça soit suffisamment solide, pour affronter l'épreuve de vérité.

Alain Connes : Alors l'épreuve de vérité est quelque-chose d'absolument terrible. Donc ce qu'il faut savoir, quand je parlais de l'imagination en mathématiques, naïvement, on pourrait croire que, l'imagination en mathématiques, c'est imaginer des choses et puis essayer de les démontrer, etc. Mais en fait, il y a un carcan en mathématiques, qui est absolument terrible, et qui, je pense, est largement semblable à celui de la physique, mais d'une manière très différente. C'est-à-dire en fait, en mathématiques, ce qui se produit, c'est qu'on peut avoir de l'imagination, on peut imaginer une nouvelle théorie etc. Mais, le problème, c'est que, très vite, on va se heurter à une réalité, qui est la réalité mathématique, et cette réalité mathématique, elle est terrible, au sens où, je veux dire, que si on n'a pas tous les éléments d'une démonstration, si on n'a pas par exemple, je veux dire, la possibilité de vérifier les choses sur un ordinateur etc., on se rend compte en fait que la liberté dont on jouit est absolument minimale. Donc c'est pour ça que j'ai insisté sur le fait que le rôle de l'imagination en mathématiques, ce n'est pas d'imaginer de nouvelles choses, etc. Pas du tout. C'est de créer une image mentale à l'intérieur du cerveau. Là, ça sert vraiment. C'est quelque chose d'essentiel. Par contre après, il y a un tel carcan au niveau de l'imagination, par rapport à d'autres sujets, je pense aux artistes, je pense aux romanciers etc., ce carcan est tellement dur, tellement contraint, qu'en fait, ça empêche, ça annihile justement toute possibilité de liberté.

Alain Prochiantz : Très bien. Nous allons peut-être passer sur une première variation sur un air national allemand de Chopin, interprétée par Nikita Magaloff, sur lequel tu nous feras un petit commentaire.

Alain Connes : Exactement, bien sûr, oui oui.

(Intermède musical) : Sur un air national allemand

Alain Prochiantz : Est-ce que tu peux nous dire pourquoi tu as choisi ce morceau ?

Alain Connes : Voilà, alors, pourquoi est-ce que j'ai choisi cet air, ces variations. Bien sûr, pour l'interprétation de Nikita Magaloff, que j'aime beaucoup. Mais, en fait, ma raison est une raison très personnelle, et qui a à voir, comment dire, avec la structuration de l'imaginaire de l'enfant. Ce que je vais dire, c'est quelque-chose de très personnel, donc, mais peu importe, je pense que c'est quelque chose de générique. C'est-à-dire en fait, mes deux grands-parents du côté de ma mère viennent de Constantine en Algérie. Ils étaient originaires de cette ville. Et mon enfance a été bercée par le fait que justement, ma grand-mère maternelle était pianiste. Et elle était orpheline, elle était devenue orpheline à l'âge de 6 ans. Ses deux parents étaient morts. Elle était en Algérie, elle avait été recueillie dans un couvent, et elle me racontait, souvent, quand j'étais gamin, quand j'étais tout petit, des histoires de son père. Et son père, quand elle était toute petite, lui avait offert un piano, et lui avait joué, sur le piano, la partie des variations de Chopin qui est si belle, pas le tout début, mais le thème majeur et qui est introduit par Nikita Magaloff de manière incroyable, parce que c'est un morceau qu'on pourrait interpréter comme un morceau de technique mais pas du tout en fait, il a compris exactement à quel point l'exposition du thème devait être précédée par un ralentissement, etc., et à quel point le thème est beau.

Et en fait, mon enfance a été bercée par cette air, que j'ai eu beaucoup de mal à retrouver ensuite, lorsque j'ai écrit la généalogie de la famille, et donc en fait, ce que je voulais dire, c'est que je pense que l'imaginaire d'un enfant est structuré très tôt en particulier par la musique, et par, cette fois, l'imaginaire, au sens naïf, de ce que l'enfant peut imaginer quand il entend des histoires comme celle-là. Donc je ne suis jamais allé à Constantine. En fait, je ne suis jamais allé en Algérie, mais j'ai toujours eu dans ma tête, une image extrêmement intéressante, justement, de ce moment auquel le père de ma grand-mère qui était médecin, en fait, lui avait offert ce petit piano. Et le rôle que ça a joué...

Alain Prochiantz : Et est-ce que ça a un rapport avec la façon de penser en mathématicien ?

Alain Connes : Eh bien, disons qu'il est très connu, chaque mathématicien est différent, donc je ne veux pas faire de généralités. Mais en fait, il est très, très admis, qu'en général, les mathématiciens sont très intéressés par la musique, à défaut, forcément, d'être musiciens, puisqu'on n'a pas beaucoup de temps lorsqu'on est mathématicien, donc, si on veut pratiquer un instrument, c'est quelque chose qui occuperait trop de temps. Mais en général, ils sont très sensibles à la musique et c'est vrai, c'est vrai, et je continue ce que je disais tout à l'heure, c'est vrai qu'il y a une analogie très forte entre l'algèbre et la musique, par le déroulement dans le temps...

J'explique toujours bien sûr le fait que le langage lui-même, le langage que nous utilisons tout le temps, est non-commutatif puisqu'on peut pas permuter les lettres entre elles, à moins de faire des anagrammes mais... donc, il y a toute une relation très forte effectivement entre la musique et l'algèbre, je pense.

Alain Prochiantz : Et donc la temporalité...

Alain Connes : Et la temporalité, bien sûr, bien entendu.

Alain Prochiantz : Tu peux nous expliquer un peu cette question de la temporalité et un petit peu la géométrie non-commutative, comment ça se met là-dedans ?

Alain Connes : Oui, bien sûr. Alors disons qu'on a écrit deux livres, avec Dany Chéreau, qui est mon épouse, et puis Jacques Dixmier qui était mon professeur de thèse. Et justement, dans ces deux livres, on a continué ce thème qui est un thème essentiel dans ce que j'ai fait, dans ma vie de scientifique, et qui a démarré par la découverte du fait que lorsqu'on fait de l'algèbre, mais de manière non-commutative, c'est-à-dire qu'on ne s'autorise pas à permuter les lettres entre elles. Alors bien sûr, c'est quelque chose qui est essentiel parce que c'est ce qu'a trouvé Heisenberg, lorsqu'il a découvert la mécanique quantique.

Lorsqu'il a découvert la mécanique quantique, il a compris que lorsqu'on traite de systèmes tout petits, de systèmes microscopiques, en fait, contrairement à ce qu'on fait lorsqu'on fait de la physique classique, où on écrit $e = mc^2$ ou $e = c^2m$, c'est la même chose. Lorsqu'on travaille avec un système microscopique, on n'a plus le droit de permuter les lettres, c'est extraordinaire, il a fait une découverte fantastique. Et d'ailleurs, il a fait cette découverte à 4 heures du matin, alors qu'il était isolé sur l'île d'Heligoland et, ce qui est merveilleux en fait, c'est à quel point les découvreurs arrivent à transmettre, dans leurs écrits, Heisenberg l'a fait dans ses mémoires, l'extraordinaire vision qu'il a eue au moment où il a fait cette découverte. Et il a dit que c'était une vision qui était effrayante, parce que du fait qu'il était le premier à voir cela, en fait, il a eu devant lui un paysage qui était presque tout le paysage, et qui était effrayant. Et il le décrit merveilleusement. Et il n'est pas le seul à avoir été capable justement, en étant le premier découvreur, à transmettre cela.

Alors de mon côté donc, ce que j'avais perçu si vous voulez, c'est que, en fait, lorsqu'on fait de la géométrie non-commutative eh bien, automatiquement, c'est un certain type d'algèbre qui a été découverte par Von Neumann, automatiquement, l'algèbre elle-même sécrète son propre temps donc le fait que l'algèbre soit non-commutative sécrète le temps, le passage du temps et ça c'est quelque chose d'absolument bouleversant d'une certaine manière, et pendant des années et des années, j'avais été fasciné par ce fait-là. Bien sûr, mathématiquement, ça a un tas de conséquences parce que par exemple, l'algèbre a des périodes, etc., mais j'avais toujours été incapable d'avoir une idée de comment cette trouvaille, si vous voulez, pouvait trouver sa place en physique et donc ça c'est le sujet de notre premier livre, qui s'appelle Le théâtre quantique, qui est publié chez Odile Jacob et dans lequel, justement, on a essayé, moi et mes deux co-auteurs, de transmettre cette trouvaille, mais de telle sorte qu'elle puisse être perçue par le public.

C'est difficile, c'est difficile. Et dans le deuxième livre alors, Le Spectre d'Atacama, on est allé beaucoup plus loin au sens où là, on a essayé de transmettre justement, ce lien entre les formes et la musique, qui est un lien aussi extrêmement important, et qui dit que, lorsqu'on essaie par exemple d'expliquer où nous nous trouvons dans l'espace eh bien en fait, on se trouve confronté à un problème mathématique qui n'est pas du tout trivial, qui n'est pas du tout évident, qui est le problème de pouvoir donner un espace ou une

forme, de manière plus générale, de manière invariante. Et ce que les mathématiques nous enseignent, c'est que si on veut donner une forme de manière invariante, la première chose qu'une forme nous procure, nous donne, c'est une gamme musicale, ça paraît quelque-chose de tout à fait étonnant donc : une forme nous procure une gamme musicale qui s'appelle un spectre. Et après, bien sûr, il y a à partir de là tout un développement. Le deuxième livre s'appelle Le Spectre d'Atacama parce que précisément, ce qui se produit, et qui est tout à fait étonnant, c'est que, alors qu'on peut calculer le spectre de formes ordinaires. Donc bon, si on regarde un espace comme un tambour, c'est Marc Kac qui avait depuis longtemps posé le problème si vous voulez : est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?

C'est-à-dire qu'un tambour a des vibrations, lorsqu'on tape dessus, et il ne faut pas croire qu'on obtiendra toujours le même son ; c'est ce que savent faire les gens qui jouent de la batterie par exemple ; donc on a des sons très différents mais ces sons forment une gamme, et une question évidente, c'est "est-ce que on peut reconnaître la forme du tambour à partir de la gamme ?".

Alors c'est une question qui a une réponse mathématique mais la chose vraiment étonnante, alors qu'on peut calculer la gamme d'un objet géométrique, d'une forme géométrique que l'on connaît, il existe des spectres, donc j'identifie la gamme si vous voulez avec la gamme des fréquences. Et ces fréquences, on va les représenter par des raies spectrales. Il y a un problème qui se pose de manière absolument insolente. C'est qu'en fait, il existe des spectres, qui apparaissent complètement naturellement, et où on a vraiment une difficulté considérable, mais bon, dans certains cas, on y arrive, à retrouver la forme, la forme physique, dont le spectre est le spectre. Et alors, il y a un exemple qu'on explique et qui justifiera le deuxième morceau de musique dont je parlerai tout à l'heure... C'est un exemple qu'on explique en grand détail dans le livre, c'est ce qu'on appelle le spectre de la guitare.

Alors je vais essayer de l'expliquer, mais à nouveau, il faut que l'auditeur se prépare à construire lui-même des images mentales dans ce que je vais expliquer. Donc la première image mentale, c'est imaginez une guitare. Bon. Vous avez une guitare. Vous avez sans doute vu des guitares, donc vous pouvez imaginer dans votre tête ce que c'est qu'une guitare, j'ai pas besoin de vous la montrer. Alors si vous regardez une guitare, vous allez voir sur le manche de la guitare, des raies qui sont perpendiculaires au manche, et

qu'on appelle des frettes. Alors si vous regardez attentivement ces frettes, vous allez voir... Regardez-les dans votre tête. Vous allez voir qu'au départ, il n'y a pas de frettes, il y a un espèce de trou, bon, qui va permettre des résonances. Et puis là, les frettes commencent. Et elles ne sont pas du tout espacées de manière régulière. On aurait pu penser que simplement, lorsqu'on regarde le manche de la guitare, si vous voulez, les frettes vont être espacées également. En fait, elles ne sont pas du tout espacées également Et le mathématicien, quand il voit l'espacement des frettes, il se pose tout de suite la question "mais pourquoi est-ce qu'on n'a pas espacé les frettes de manière égale ?". Alors la réponse, c'est une réponse mathématique, mais c'est une réponse qui est merveilleuse, parce qu'elle va nous donner un spectre. Et ce spectre, après, on va devoir chercher la forme dont c'est le spectre. Alors d'abord, quel est ce spectre ? Eh bien, quand on fait de la musique, on s'aperçoit d'une chose très importante, qui est que l'oreille n'est pas du tout sensible à 1 2 3 4 5, etc. elle n'est pas sensible à additionner, elle est sensible en fait à multiplier une fréquence par quelque chose, c'est-à-dire si on prend une fréquence et qu'on la multiplie par 2, ça correspond au passage à l'octave. L'oreille est sensible au passage à l'octave, elle ressent une correspondance entre les deux fréquences, elle ressent une harmonie entre les deux fréquences. C'est la multiplication par 2. L'oreille 'est également sensible à la multiplication par 3 : quand on prend une fréquence et quand la multiplie par 3, l'oreille entend une résonance, elle entend quelque chose qui correspond. Alors maintenant, comment cela explique-t-il le spectre de la guitare ? Ca explique le spectre de la guitare parce que, lorsqu'on élève le nombre 2 à la puissance 19, on obtient pratiquement le nombre 3 élevé à la puissance 12. Ca peut pas être une égalité parce que quand on élève 2 à la puissance 19, on obtient un nombre pair. Alors que quand on élève 3 à la puissance 12, on obtient un nombre impair. Donc ça ne peut pas être une égalité. En fait, ce qui se produit, c'est que si on regarde la racine douzième de 2, c'est un nombre qui vaut 1.05 etc., et c'est pratiquement la même chose que la racine $19^{\text{ème}}$ de 3, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire qu'en musique, ce qu'on a fait, avec les frettes de la guitare, c'est qu'on s'est arrangé pour faire croire que ces deux nombres étaient égaux et le 12 en question, ce sont les 12 tonalités de la gamme bien tempérée. Et toute la musique est basée là-dessus. Et qu'est-ce que c'est que le spectre de la guitare ? Ce sont les puissances du nombre, qui est la racine douzième de 2, et qui est pratiquement la racine $19^{\text{ème}}$ de 3. Donc c'est quelque chose d'extraordinaire. Et alors, on se trouve là confronté à un problème parce qu'on a de manière

évidente ce spectre. Ce spectre est devant nous et on se demande quel est l'objet donc il est le spectre. Alors quand on est mathématicien, on a un tas d'outils pour regarder ça ? Pourquoi ? Parce que quand on regarde le spectre qui correspond au tambour, ou le spectre qui correspond à une forme qui est bi-dimensionnelle, qui est de dimension 2, on s'aperçoit que sa gamme, elle croît comme une parabole. Si on regardait un objet de dimension 3, ça croîtrait avec une puissance 3, etc. Et alors, on regarde maintenant le spectre de la guitare ? *(Claquement de langue interrogatif).* Ah ! Il est extrêmement bizarre ! Parce que si on calcule sa dimension en utilisant ce que je vous ai dit avant, on obtient que c'est un objet de dimension 0, un objet de dimension 0 au sens où sa dimension est plus petite que tout nombre, non nul mais positif. Ah ? ! Alors la merveille, c'est qu'en fait, il y a un objet dont le spectre est le spectre de la guitare, mais c'est un objet de géométrie non-commutative. Donc on retombe sur ses pieds. Et donc en fait, le livre, le livre qu'on a écrit sur le Spectre d'Atacama, c'est un livre qui est entièrement basé sur le fait d'essayer de comprendre un spectre. Ce spectre a été observé par l'Observatoire d'Alma au Chili et pendant tout le livre, il y a un héros, enfin, il y en a plusieurs, il y a trois personnages essentiels, il y a un mathématicien, il y a une physicienne qui était là dans le premier livre, qui a échappé à un séjour quantique et tout le livre est basé sur le fait d'essayer de comprendre ce spectre mystérieux dans le désert d'Atacama.

Alain Prochiantz : Dans le désert d'Atacama. Donc nous allons écouter maintenant Salut d'amour, d'Elgar, joué par Itzhak Perlman et après, nous reprendrons notre discussion.

Alain Connes : Bien sûr.

(Intermède musical : Salut d'amour)

Alain Prochiantz : Après ce Salut d'amour, je rappelle que nous recevons aujourd'hui, dans le cadre de la série d'interviews sur le thème Imaginations, Alain Connes, mathématicien et professeur du Collège de France, titulaire de la chaire Analyse et géométrie. Alain, je crois que tu voulais t'exprimer sur ce morceau.

Alain Connes : Absolument. Pourquoi j'ai choisi cet air ? C'est pour illustrer exactement ce que je disais tout à l'heure, mais la différence entre

le violon et la guitare. Donc la guitare, j'ai parlé du spectre de la guitare, et des frettes sur le manche de la guitare. Bon. C'est bien évident que quand on a un violon, on n'a pas de frettes, et la difficulté extraordinaire du violon vient du fait que justement, on n'a pas un spectre discret au sens mathématique, c'est-à-dire on n'a pas... Si vous voulez, un déplacement infinitésimal du doigt sur le manche du violon va faire toute la différence. Et cette interprétation de Itzhak Perlman Perlman, est merveilleuse, et c'est pour ça que je voulais qu'on l'écoute, elle est merveilleuse par l'infinie précision qu'il arrive à avoir, dans les sons qu'il produit ; mathématiquement, ce qu'on dit, si vous voulez, c'est que la différence entre la guitare et le violon, c'est que la guitare a un spectre discret, que j'ai expliqué tout à l'heure, le violon a un spectre continu. Mais il y a dans le spectre du violon la même difficulté que dans la guitare. C'est-à-dire qu'il y a une échelle exponentielle, c'est-à-dire que lorsqu'on passe d'une note à l' autre, naïvement on croirait qu'il faut le faire en espaçant les doigts d'une longueur égale, non, il faut le faire en les espaçant d'une longueur exponentielle, puisque ça correspond aux puissances du nombre d'avant.

Donc en fait, il y a toujours, toujours, entre deux violonistes, des différences infinitésimales et cette interprétation d'Itzhak Perlman est, de mon point de vue, une merveille parce qu'il y a de toutes petites nuances, infimes, que l'oreille perçoit bien sûr, et qui font que cette adaptation est merveilleuse.

Alain Prochiantz : Merci beaucoup, Alain Connes, j'aurais voulu revenir un tout petit peu sur la question du mathématicien, sur la question de la démonstration en fait, parce qu'il y a les conjectures. Comment ça vient une conjecture ? Et comment peut-on passer, après, du travail de la conjecture à la démonstration de la chose et ce sont deux façons différentes de faire des mathématiques. Ce sont deux types d'esprits mathématiques différents ?

Alain Connes : En fait, c'est toujours étonnant ce qui se produit avec les conjectures. C'est-à-dire en fait, un mathématicien découvre quelque chose de totalement nouveau. L'exemple que j'ai en tête, bien sûr, on en parle beaucoup dans le livre, c'est Riemann, au siècle dernier, au XIXème siècle, plus précisément, c'est pas le siècle dernier, qui a fait une découverte absolument phénoménale. En fait, il a trouvé qu'on pouvait comprendre les nombres premiers, donc comprendre l'aléatoire des nombres premiers, l'aléatoire qui n'était pas du tout contrôlé, à partir d'une fonction qui s'appelle la fonc-

tion zêta (ζ) et après avoir démontré une formule, donc il donne une formule exacte si vous voulez, pour le nombre de nombres premiers plus petits que n. C'est pas tellement le fait qu'il y ait une formule exacte, parce qu'il en existe d'autres, mais c'est le fait que cette formule en fait décrit exactement le comportement des nombres premiers. Et il s'est aperçu en fait, dans cette formule qu'il a démontrée, qu'il y avait une musique des nombres premiers, c'est-à-dire il a montré qu'il y avait un terme dominant, qui est facile à comprendre parce qu'en gros, les nombres premiers deviennent de plus en plus rares, en gros, comme l'inverse du nombre de chiffres du nombre qu'on regarde.

Donc quand on regarde les nombres premiers par exemple, entre 10000 et 100000, ou bien entre 100000 et 1000000, la proportion va être divisée par 2. En fait, cette chose-là, si vous voulez, ce phénomène-là, conduit à une fonction qu'on appelle le logarithme intégral, qui est effectivement le premier terme dans la formule de Riemann. Mais après, l'aléa des nombres premiers se manifeste justement par un spectre. Et se manifeste justement par ce qu'on pourrait appeler la musique des nombres premiers.

Alors en fait, quand Riemann a trouvé ça, il s'est aperçu en faisant des calculs, il a fait des calculs, il s'est aperçu que les zéros de sa fonction, qui gouverne justement le spectre, avaient l'air d'être tous sur une certaine droite. Et le fait qu'ils soient sur cette droite joue un rôle essentiel, parce que le fait qu'ils soient sur sa droite dit que la formule qu'il a donnée est une formule extrêmement précise. S'il y en avait qui étaient en dehors de cette droite, il y aurait une espèce de chaos qui s'introduit, ça ne serait pas du tout quelque chose d'agréable. Et il a conjecturé que tous ses zéros étaient là. Cette conjecture, elle a été faite donc, en gros dans les années 1850-1860, donc ça fait un temps considérable qu'elle a été faite, mais, je pense que lui était pratiquement sûr que c'était vrai, et en gros, il voulait continuer et faire une conjecture, c'est être pratiquement sûr qu'un résultat est vrai, et aller au-delà.

Alors maintenant, cette conjecture de Riemann, elle a été vérifiée avec l'ordinateur, parce qu'avec l'ordinateur, on peut aller très très loin ; en fait, on a une manière de calculer, qui est très très efficace pour cette fonction, et on l'a vérifiée pour des milliards de zéros ; donc au niveau vérification, on a une indication très forte. On ne sait pas si elle est vraie parce qu'il y

a d'autres conjectures qui avaient l'air d'être vraies comme ça, mais qui ne sont pas vraies pour des nombres très très grands, donc on ne sait pas si elle est vraie mais la manière dont il l'a trouvée, c'est qu'il n'avait pas envie de s'arrêter là, si vous voulez, et il avait envie d'aller plus loin.

Et bon après lui, il y a eu un très grand nombre de mathématiciens qui s'y sont intéressés, il y a eu par exemple des mathématiciens qui, lorsqu'ils prenaient l'avion ou etc., envoyaient une lettre en disant "j'ai démontré etc." en pensant que si l'avion se cassait la gueule..., à ce moment-là... *(rires)*. Voilà. Donc j'ai toutes sortes d'histoires, autour de cette conjecture. Mais disons que, ce qu'elle a d'extraordinaire, ce qu'une conjecture comme celle-là a d'extraordinaire, c'est qu'en fait secrètement, elle a motivé la plupart des développements les plus intéressants en mathématiques au XXème siècle. C'est-à-dire que si on connaît suffisamment de choses en mathématiques, on s'aperçoit que, quantité de développements qui n'ont a priori rien à voir avec la conjecture, en fait étaient motivés par celle-là ; un exemple typique, c'est toute la théorie des fonctions presque périodiques de Bohr, le footballeur, le frère du physicien, donc je veux dire, c'est étonnant, c'est étonnant. Et à ce propos-là, et ça, on l'explique en détail dans le livre, ce qu'il est important de savoir, c'est qu'un mathématicien devant un problème, a toujours une technique qui fait qu'il n'est pas désarmé et quelle est cette technique ? C'est une technique très intéressante qui je pense ne s'applique pas seulement aux mathématiques, elle s'applique, je pense, en fait à toutes sortes de domaines ; et c'est pour ça que je veux l'expliquer.

C'est une technique qui consiste à dire, face à un problème fixé, par exemple la conjecture de Riemann, au lieu d'être là à regarder le problème et puis d'être incapable de faire quoi que ce soit, non. Ce qu'on va faire, c'est la première chose qu'on va faire, c'est quelque chose de criminel d'une certaine manière. C'est-à-dire, on va prendre le problème et on va le généraliser. Alors ça paraît complètement idiot. Ca paraît complètement idiot de remplacer un problème particulier par un problème beaucoup plus général. Et l'exemple qu'on prend dans le livre, c'est l'exemple des tablettes de chocolat. C'est-à-dire qu'on est là, on vous regarde, et puis on vous demande "quelle est la manière optimale de casser une tablette de chocolat de 6 x 8 par exemple en petits carreaux ?". Et alors, l'intérêt de généraliser, c'est qu'on va maintenant pouvoir spécialiser le problème généralisé à des cas beaucoup plus simples. Ca, c'est formidable parce que si vous êtes confronté au problème

d'une tablette de 6 x 8, vous êtes complètement coincé parce que vous vous dites "mais c'est trop compliqué, j'y arriverai jamais." Par contre, si vous remplacez 6 et 8 par l et m, ça paraît bizarre. Mais maintenant, vous prenez $l = 1,\ m = 3$, vous avez une tablette de trois carreaux, trois carreaux. Bon ben pour la casser, c'est pas très difficile. Donc en fait, en mathématiques, on fait ça et on a fait ça pour l'hypothèse de Riemann, et ça a été quelque chose d'extrêmement fructueux parce que c'est ça qui a permis à André Weil justement, de démontrer une généralisation qui avait été faite et de démontrer que c'était vrai dans ce cas-là. Donc ça donne confiance et en général, justement, ça permet de donner un point d'ancrage, pour ce dont je parlais tout à l'heure, c'est-à-dire l'analogie. C'est-à-dire qu'une fois qu'on a démontré un cas particulier du problème généralisé, on a un outil extraordinaire qui est l'analogie. C'est-à-dire qu'on imagine que la démonstration qu'on a fait dans le cas particulier va pouvoir se transplanter, je ne dis pas se transposer, je dis se transplanter, comme je le disais tout à l'heure, avec les petites fleurs qui sont très fragiles. Donc elle va pouvoir se transplanter au cas qui nous intéresse vraiment. Donc le pouvoir créateur des conjectures n'est pas du tout négligeable, c'est une espèce de manière d'avoir vu plus loin que les autres, et après bon ben, après, il faut rentrer dans le dur, il faut essayer de démontrer la conjecture.

Alain Prochiantz : Mais les conjectures sont toujours démontrées ? Ou bien il y en a qui sont fausses ?

Alain Connes : Oui, bien sûr, il y en a qui sont fausses.

Alain Prochiantz : Et si on travaille sur une conjecture qui est fausse, et si on tire des résultats intéressants, et qu'on démontre qu'elle est fausse...

Alain Connes : En fait, ce qui se produit en mathématiques, c'est qu'il y a deux aspects. Il y a l'aspect il y a un problème, est-ce que ce problème est résolu ou non, bon... Ca, c'est un aspect des mathématiques. Mais il y a un aspect qui est largement aussi important, c'est l'aspect d'édifier des théories. Et par exemple Grothendieck était très connu justement pour lorsqu'on lui posait une question, etc. il essayait toujours de formuler la question dans le bon cadre, et ensuite d'édifier une théorie qui fasse en sorte que la question se résolve par elle-même. C'est Serre qui a employé la meilleure métaphore par rapport à ça : il disait que quand on lui posait un problème comme

ça, il essayait de le laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales. Donc ça dit bien ce que ça veut dire. Et donc en fait, il y a l'impulsion qui est donnée par une question comme une conjecture etc. Très souvent justement, l'aspect le plus créateur, le plus positif d'une conjecture, c'est l'édification des théories qui vont permettre soit de la résoudre, soit de dire qu'elle est fausse. Ca peut très bien arriver. Et d'ailleurs, ce qu'on veut, c'est savoir la vérité. On ne veut pas, nécessairement, démontrer. En fait d'ailleurs, dans le livre, on raconte une histoire que je ne veux pas louper parce que le livre, Le Spectre d'Atacama, se termine par cette histoire ; cette histoire, c'est l'histoire d'un mathématicien vieillissant, bon, pensez à qui vous voudrez, qui s'est attaqué pendant des années à une conjecture bon, et qui finalement décide, parce qu'il voit qu'il n'a plus beaucoup de temps devant lui, de vendre son âme au diable, pour connaître la réponse. On dit au départ, pour connaître la réponse.

Alain Prochiantz : C'est une histoire connue, ça.

Alain Connes : Euh, pas tellement celle que l'on raconte...

Alain Prochiantz : L'histoire de vendre son âme au Diable, en tout cas.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr. Vendre son âme au Diable, c'est un phénomène connu, mais dans ce cas-là, ce qui se produit, c'est assez étonnant, parce qu'il finit par avoir rendez-vous avec le Diable et d'ailleurs le Diable est incarné par le Machine Learning. Hein ! *(rires)* Donc il finit par avoir un rendez-vous avec le diable et puis, lorsqu'il rencontre le Diable, il le rencontre dans une banlieue mal famée de Naples et le diable commence par lui faire signer les papiers comme quoi il a vendu son âme au diable et le mathématicien ne se rend pas compte que, du fait qu'il a signé les papiers et qu'il a donné son âme au Diable, il va changer de comportement. Donc le Diable lui dit "mais bon quel est votre souhait maintenant ? Il faut que vous donniez votre souhait..." Et le mathématicien dit "je souhaite que l'hypothèse de Riemann soit fausse" *(rires)* Et c'est seulement quand il rentre chez lui qu'il réalise qu'en fait, ce qu'il vient de dire, c'est parce qu'il avait vendu son âme et que donc, au lieu de souhaiter qu'elle soit vraie, etc., il a souhaité qu'elle soit fausse.

Alain Prochiantz : Cher Alain, je pense que nous allons bientôt clôre cet entretien qui était vraiment passionnant ; j'aimerais te poser une question : "est-ce que les mathématiques sont pour toi une langue naturelle ?"

Alain Connes : Alors je pense que non seulement, c'est une langue naturelle, mais je pense que c'est la seule langue qui nous permettra de communiquer avec une intelligence extraterrestre. Et ça rejoint le livre mais je suis désolé de le mentionner trop, mais eh bien, ce qui se produit dans le livre justement, c'est que ce message qui est reçu et qui est le spectre d'Atacama, il est reçu en alternance avec les nombres premiers, et une intelligence terrestre, un mathématicien, ne peut pas manquer de reconnaître une intelligence extérieure à nous, et qui se manifeste par cette compréhension qui est extraordinaire, qui a été faite par Riemann au XIXème siècle, donc ce que je prétends, ...et il y a un langage qui a été inventé qui s'appelle le Lincos..., mais ce que je prétends, c'est qu'on pourra communiquer justement avec les extraterrestres grâce au langage mathématique, pourquoi ? Parce que c'est le seul langage qui n'est pas auto-référentiel. C'est le seul langage qui n'est pas auto-référentiel, c'est-à-dire que, contrairement à un dictionnaire qui, quand on cherche la définition d'un mot fait référence à un autre mot, qui lui-même fait référence à un autre mot etc. etc., n'est pas auto-référentiel.

Alain Prochiantz : Mais ce langage est composé, donc, pour revenir au point de départ, d'images mentales.

Alain Connes : Euh non, ce langage est composé, au départ, par exemple de signaux, qu'on envoie de manière spectrale, qu'on envoie de manière répétitive...

Alain Prochiantz : Mais par exemple toi, quand tu penses ?...

Alain Connes : Ah quand je pense, bien sûr, je pense à travers des images mentales, bien entendu.

Alain Prochiantz : Tu ne penses jamais en langue naturelle ?...

Alain Connes : Non, non, non. La langue naturelle, je veux dire, c'est une langue qui après, péniblement, essaie de transcrire nos images mentales, nos manières de penser, etc., mais je dis "péniblement" parce qu'en général,

je n'arrive pas à transmettre ça de manière vraiment satisfaisante, j'essaie de manière orale etc., il y a des gens qui sont vraiment forts pour le faire, et je pense en particulier à Grothendieck. Grothendieck était capable lorsque, ce dont on parlait tout à l'heure, c'est-à-dire à propos d'une idée qui n'était pas encore mûre, il était capable de se mettre à écrire sur elle et ça,...

Alain Prochiantz : Ca la faisait mûrir ?...

Alain Connes : Ca la faisait mûrir, mais je pense que ça n'est pas donné à tout le monde d'être capable d'écrire sur une idée qui n'est pas encore mûre et de la faire mûrir, je veux dire.

Alain Prochiantz : De la sortir de son cocon...

Alain Connes : De la sortir de son écrin, de son cocon. Et il y a une autre chose que je voulais dire quand même, avant qu'on termine, c'est, je ne sais pas si ça a été mentionné dans un autre dialogue sur l'imagination, mais il y a un exemple extraordinaire, c'est l'exemple de Eureka d'Edgar Poe. Donc cet exemple, c'est quand même merveilleux, de savoir qu'un poète a pu, au XIXème siècle, avoir l'intuition pas seulement du Big Bang, mais du fait que l'univers pouvait ensuite avoir un Big Crunch, etc., et qu'il a pu être moqué, il a été moqué pendant plus d'un siècle, jusqu'à ce que finalement, on s'aperçoive qu'en fait, il avait raison, mais il avait raison par une intuition purement géniale, et purement poétique.

Alain Prochiantz : Voilà, eh bien, écoutez, je pense que c'est la meilleure façon de terminer cet entretien avec, je le rappelle, Alain Connes, titulaire de la chaire Analyse et géométrie du Collège de France. Merci Alain, d'être venu aujourd'hui et à bientôt.

Les mathématiques
et la pensée en mouvement

Alain Connes [1]

Le but de mon exposé, c'est de vous faire sentir deux choses : la première, c'est que je vais vous raconter un certain nombre d'histoires, sur des mathématiciens, et la deuxième, c'est de vous faire comprendre que les mathématiques sont une fabrique de concepts, mais de concepts absolument fondamentaux et de concepts qui ont trait, si vous voulez, à la vie, et qui ne sont pas du tout confinés a des calculs avec des nombres, ou des choses comme ça ; on a trop souvent l'impression que le mathématicien est quelqu'un qui fait des calculs ; bien sûr, ça lui arrive de faire des calculs, mais ce que je vais essayer de vous faire comprendre, justement, dans cet exposé, c'est à quel point justement, la technique mathématique débouche de temps en temps sur des concepts fondamentaux, sur des idées fondamentales, et ce sont des idées qu'on peut expliquer simplement et qui ont trait à la vie, c'est-à-dire si vous voulez, elles sont aussi importantes, je pense, pour des gens qui font des sciences humaines que pour des gens qui vont faire des sciences dures. Voilà, donc, il y aura une galerie de portraits. On va commencer par Galois.

Et si vous voulez, Galois, c'est le prototype du mathématicien qui a eu une vie absolument incroyable : il est né en 1811, et il avait 17 ans lorsqu'il a fait ses choses les plus importantes. Et ce qui s'est produit donc, il y a eu une succession d'incompréhensions, en fait. Si vous voulez, en 1829, Abel meurt. Et en gros, c'est Galois qui reprend le flambeau des idées d'Abel. Mais en fait, je me suis bien renseigné avec des spécialistes d'Abel. Abel était venu à Paris, mais il est absolument impossible qu'il ait rencontré Galois : Galois était trop jeune quand Abel est venu à Paris ; j'avais toujours imaginé qu'ils s'étaient rencontrés dans un café parisien, qu'ils avaient discuté tous les deux. Apparemment, ce n'est pas possible. Donc quand il avait 17 ans, Cauchy qui était un académicien, avait déjà fait en 1829, deux exposés sur les travaux de Galois, à l'Académie, au mois de mai et au mois de juin. Ca, c'était donc

1. Conférence du CPES (Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures), PSL (Paris Sciences et Lettres), le 12 novembre 2015.
Transcription de la conférence par Denise Vella-Chemla (31.1.2019).

en 1829. Et au mois de juillet 1829, le père de Galois se suicide parce qu'il avait été la victime d'une campagne de calomnie, qui avait été faite contre lui, et en plus, Galois échoue pour la deuxième fois à l'école polytechnique. Donc c'était la deuxième fois qu'il se présentait à l'école polytechnique. A l'époque, l'école polytechnique était au top des grandes écoles, donc c'est la deuxième fois qu'il échoue. C'est là qu'il y a eu la scène apparemment où il a balancé le chiffon à la tête de l'examinateur de mathématiques, parce que l'examinateur ne comprenait pas les explications de Galois sur le logarithme.

Mais heureusement, Galois est reçu à l'école normale. Et en janvier 1830, il y a une lettre de Cauchy à l'Académie qui dit qu'il va parler sur Galois. Ce serait donc pour la troisième fois, et puis finalement Cauchy renonce, et je pense, enfin on pense, et les historiens pensent, si vous voulez, qu'il s'était mis d'accord avec Galois parce qu'il y avait un Grand Prix de l'Académie qui devait être donné en 1830 et Cauchy avait convaincu Galois de réécrire son article, de réécrire ses articles et de se présenter pour ce grand prix. Alors là, ce qui s'est passé, c'était absolument dramatique parce que l'académicien qui devait rapporter sur l'article de Galois, c'était Joseph Fourier. C'est un très très grand mathématicien et Fourier apparemment, il était en haut de ses escaliers chez lui, il s'est pris les pieds dans sa robe de chambre et il a dégringolé l'escalier, il est mort. Donc, gros problème, gros problème, et si vous voulez, il y a eu un tel désordre à ce moment-là, que le manuscrit de Galois a été perdu. Alors, non seulement Galois n'a pas eu le prix, qu'il aurait peut-être mérité, le prix a été donné à Jacobi et Abel, bien sûr deux mathématiciens immenses. Jacobi était un mathématicien allemand, Abel était mort, il était mort en 1829, le prix a été donné à Abel à titre posthume.

Mais si vous voulez, Galois ne pouvait pas se plaindre de ne pas avoir eu son grand prix ; par contre, il pouvait se plaindre, à l'époque, il n'y avait pas de photocopieuse. Donc il avait écrit son manuscrit ; à l'époque, vous écriviez le manuscrit et puis c'était fini. Il l'avait donné à l'Académie mais manuscrit perdu. Donc il s'était plaint à plusieurs reprises à l'Académie, mais manuscrit perdu. Et donc en 1830, le grand prix a été donné en juin 1830 et en juillet 1830, c'est les Trois Glorieuses. C'est Les Trois Glorieuses, et Galois a été à l'école normale et là, il râlait parce que, à l'école normale, les élèves étaient confinés, ils ne pouvaient pas aller sur les barricades. Par contre, les élèves de l'école polytechnique, eux, ils pouvaient, donc alors là, Galois a commencé à vraiment se révolter. C'est très très bizarre, si vous voulez, bon, il avait

à peine 18 ans. Donc il a commencé à se révolter et il s'est révolté contre le directeur de l'école normale. Et après l'été, donc, il a commencé à militer plus ou moins, et de fil en aiguille, il a réussi à se faire renvoyer de l'école Normale. Donc, il a été renvoyé de l'école Normale en janvier 1831, et il y a quelque chose d'incroyablement ironique, qui est que Galois était à la rue, si vous voulez, il n'avait plus de salaire parce qu'à l'époque, à l'époque et c'est encore le cas maintenant, les élèves de l'école Normale recevaient un petit salaire. Donc il était à la rue et alors pour gagner un peu d'argent, il avait créé un cours d'algèbre, cours d'algèbre qui réunissait un certain nombre de gens qui venaient l'écouter parce que c'était un magnifique mathématicien malgré son très jeune âge. Et l'ironie totale, c'est que son cours d'algèbre, il le donnait dans la rue qui maintenant, c'est une rue attenante à la Sorbonne, qui s'appelle la rue Victor Cousin. Pourquoi est-ce que c'est ironique ? C'est ironique parce que la personne qui a signé le renvoi de l'école Normale de Galois s'appelle Victor Cousin. Alors il y a quelques années, pour les 200 ans de la naissance de Galois, j'ai eu à donner l'exposé à l'Académie des Sciences sur Galois. Et à ce moment-là, j'ai voulu que tout le monde se mettent d'accord pour rebaptiser la rue Victor Cousin en rue Galois. Bon, ça n'a pas été possible, mais il faudrait quand même, c'est incroyable.

Donc voilà ce qui s'est passé. Alors après, donc, il faut bien dire que Galois, il est mort à 20 ans. Et les deux dernières années de sa vie, il n'a pas beaucoup fait de maths. C'est incroyable, c'est absolument incroyable. Et ce qui s'est produit, c'est qu'une fois qu'il a été renvoyé de l'école normale, il y avait quand même un autre académicien qui lui voulait du bien, il s'appelait Poisson. Et en mathématiques, il y a une formule bien connue qu'on appelle la formule de Poisson. Et si vous voulez, Poisson l'avait convaincu de réécrire son manuscrit et de le présenter à l'Académie. Donc Galois s'était exécuté. Il avait réécrit son manuscrit. Il avait travaillé, etc. Et entre temps, bien sûr, après Les Trois Glorieuses, tout le monde commençait à être extrêmement déçu par le nouveau pouvoir. Et Galois faisait partie de ces gens-là. Donc la première chose qu'il a faite, c'est pas très, pas très malin, enfin bon. Il était dans un banquet qui fêtait la libération d'opposants au pouvoir. Et alors, il était dans ce banquet, et il avait levé son verre à Louis-Philippe. Alors, tous les gens se disaient "il est complètement fou !" : il était dans un banquet contre Louis-Philippe et il levait son verre à Louis-Philippe. Et dans la main, il avait un couteau. D'abord, les gens n'avaient pas compris pourquoi il levait son verre à Louis-Philippe ; secundo, il y avait un espion qui était là et qui

avait vu qu'il avait un couteau à la main. Il avait été arrêté, ça c'était au mois de mai 1831, il avait été arrêté, et il avait été jugé assez vite. Il avait été jugé par un jury populaire. Mais comme il avait été jugé par un jury populaire, les gens avaient vu qu'il était un peu bizarre, bon, enfin, je veux dire, il ne se défendait pas, en gros, il disait... Alors ils l'avaient acquitté. Je crois qu'il avait été acquitté en juin 1831. Et un mois après, il a reçu le rapport de Poisson sur son article. Alors là, catastrophe parce que Poisson disait que c'était sûrement une très très belle théorie, mais qu'il n'y avait pas assez de détails dans les démonstrations, etc. Donc il ne pouvait pas accepter l'article. Et Galois, quand il a reçu ce rapport, il a écrit à la main, dans la marge du rapport, il a écrit "Oh, chérubins !". Ca veut dire qu'il voyait que les gens ne comprenaient rien à ce qu'il faisait. A ce moment-là, il a un peu dérapé, c'est-à-dire que là, il s'est fait arrêter. Ca, c'était le 4 juillet qu'il a reçu le rapport de Poisson, il a été arrêté le 14 juillet à la tête d'une manifestation contre Louis-Philippe. Et là, il a été mis en prison pour de bon ; il a été mis dans une prison qui s'appelle Sainte-Pélagie ; et bon, il y a beaucoup d'entre vous sans doute, qui imaginent que s'ils étaient en prison, ils pourraient au moins réfléchir tranquilles avec des bouquins ; en fait, c'était pas du tout comme ça, parce que Galois, il était au milieu des condamnés et c'était absolument terrible parce que les autres condamnés l'obligeaient à boire de la liqueur très forte, etc. ; je veux dire que c'était absolument orthogonal à son... à ce qu'il faisait et en fait là, il a rencontré Nerval. Nerval l'a rencontré alors qu'il était en prison.

Et alors, c'est terrible, c'est terrible, parce que si vous voulez, Galois est resté en prison jusqu'au mois de mars de l'année d'après, 1832. Il n'avait pas 20 ans, toujours, euh, si, il avait 20 ans. Et en mars 1832, la raison pour laquelle il a été libéré, c'est qu'il y avait le choléra à Paris. Et qu'ils vidaient les prisons pour pas qu'il y ait trop de dégâts. Donc il a été mis dans une maison de santé et dans cette maison de santé, il est plus ou moins tombé amoureux d'une fille qui était là, sans se rendre compte qu'elle était déjà avec quelqu'un d'autre.

Et bon, tout ça a fini par un duel, d'accord. Et alors là, c'est pareil, si vous voulez, je suppose que chacun d'entre vous imagine que s'il était en devoir de se battre en duel, il aurait plus d'habileté que l'adversaire, donc ça irait quoi, il s'en sortirait. Malheureusement, le duel dans lequel Galois a été pris, il a essayé de s'en sortir avant. Il a essayé de dire que... Mais malheureusement, c'était un duel absolument terrible, c'était comme la roulette russe, c'était un

duel dans lequel il y avait deux revolvers dont l'un seulement des deux était chargé. Et il fallait qu'ils se les mettent sur le ventre. Donc il a eu, bien sûr, une balle dans le ventre. A l'époque, et même maintenant, c'était mortel, et les autres l'ont laissé sur place.

Il a été retrouvé par un paysan sur place, qui l'a emmené à l'hôpital et il est mort le jours après. Bon. Et il a laissé une liasse de papiers, c'est ce qu'il dit, c'est ce qu'il dit dans ses trucs, donc c'était... Alors il y a des gens qui vous feront croire qu'il a trouvé tous ses résultats la veille de son duel. C'est absolument pas vrai, je veux dire, évidemment, il avait continué à réfléchir et c'était au point... il avait dû tellement se forcer à continuer à faire des maths pendant qu'il était dans des circonstances abominables, que des gens qui l'ont vu à sa sortie de prison disaient qu'il avait l'air d'avoir 50 ans alors qu'il avait 20 ans. D'accord, donc c'est vous dire un peu la passion qui l'habitait, et c'est un miracle, finalement, c'est un miracle qu'on ait eu ses travaux.

C'est un miracle absolu qu'on ait eu ses travaux. Donc ça, c'est ce qu'il écrivait et qu'il a laissé dans sa lettre-testament. C'est sa lettre-testament qu'il avait laissée à son frère, et à son ami, il avait un ami aussi.

Et ce qui s'est produit, donc, c'est que 10 ans ont passé. Et par un hasard extraordinaire, Liouville, qui était un contemporain de Galois, qui avait simplement deux ans de plus que Galois, a retrouvé les papiers de Galois. Et il a compris que c'étaient des choses absolument géniales. Et il en a parlé à l'Académie. Donc si vous voulez, 10 ans après la mort de Galois, c'est Liouville que voilà. Bon là, évidemment, il est beaucoup plus vieux mais c'était un contemporain de Galois, c'était quelqu'un qui était né en 1809, donc deux ans avant Galois. Et donc, Liouville a compris l'extraordinaire force des travaux de Galois si vous voulez.

Alors il a écrit ça, mais ça, je vous le montre écrit correctement, donc c'est comme ça.

Il en a parlé à l'Académie. Et puis, graduellement, les travaux de Galois ont été compris. Et alors ce que je vais faire, je ne veux pas vous embêter avec des mathématiques trop compliquées, je vais simplement vous donner l'essence de la théorie de Galois. Je vais vous donner l'essence en vous donnant un exemple. Ce que dit Galois dans sa lettre-testament, c'est quelque-chose

d'incroyablement visionnaire, si vous voulez, ce qu'il dit, c'est :

"Tu sais mon cher Auguste, (il avait un ami qui s'appelait Auguste) *que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelques temps ont étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté."*

Donc Galois a découvert cette théorie de l'ambiguïté. Et dans cette lettre, à la fin de sa vie, il dit que non seulement, il l'a appliquée à des équations polynomiales. Mais en fait, il l'a appliquée à la théorie des fonctions transcendantes. Personne ne sait ce qu'il avait exactement en tête. Ca, personne ne peut dire que l'on sait, maintenant, ce que Galois avait en tête.

Par contre, on sait très bien ce qu'il avait en tête pour les équations polynomiales.

Et donc, pour les équations polynomiales, je vais vous expliquer ce qu'est la théorie de l'ambiguïté. Donc ce que Galois a compris, si vous voulez, c'est quelque-chose d'assez extraordinaire, c'est que lorsque vous vous donnez une équation algébrique, par exemple, je vous ai donné une équation donc, on sait la résoudre. Vous savez que maintenant, je veux dire avec l'ordinateur, vous pouvez contrôler tout ça, vous pouvez tracer le graphe d'une fonction, vous pouvez résoudre une équation polynomiale, et tout ça. Mais l'ordinateur ne vous donnera jamais les zéros qu'avec une certaine précision, il ne vous donnera jamais les racines qu'avec une certaine précision.

Alors, ce que dit la théorie de Galois, elle dit quelque chose d'extraordinaire : elle dit que quand vous prenez une équation comme celle-là, qui est irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la factoriser en un produit de 2 facteurs avec des coefficients rationnels par exemple. Donc lorsqu'une équation est irréductible, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui opère sur les racines, ici sur les 5 racines, et qui fait qu'on ne peut pas, si vous voulez, isoler une racine. C'est-à-dire qu'il y a une ambiguïté entre les racines ; ce groupe, il fait tourner les racines. Et toute relation qui est vérifiée entre les racines, toute relation rationnelle qui est vérifiée entre les racines, par exemple, avec l'ordinateur, vous pouvez voir que cette relation, elle est presque vérifiée, le fait que $E = 4C^2 + 2D^2$, vous pouvez vérifier ça. En fait, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui

permute ces racines, c'est-à-dire qu'elles peuvent bouger de l'une à l'autre. Et de telle sorte que si une relation comme ça a lieu, elle aura lieu pour les racines permutées. Et ce que dit la théorie de Galois, c'est que par ce groupe, vous pouvez transformer n'importe quelle racine en n'importe quelle autre. Alors ce que dit Galois après, en fait ce que je vous dis en particulier ici, c'est que c'est impossible d'avoir cette relation. Pourquoi est-ce impossible d'avoir cette relation ? Parce que si vous avez cette relation, vous voyez bien que les 5 racines, elles sont réelles. Ca, c'est pas du tout difficile à démontrer. Donc vous avez bien 5 racines qui sont réelles. Mais supposez que vous ayez une relation comme celle que j'ai écrite : $E = 4C^2 + 2D^2$. Eh bien à ce moment-là, comme E peut devenir n'importe laquelle des autres racines, C et D seront d'autres racines aussi. Et vous voyez bien que toutes les racines devraient être positives, puisque ce sont des sommes de carrés. Et donc ce n'est pas possible. Ce n'est pas possible. Donc, c'est extraordinaire !

Ca vous dit que sans calculer et sans se salir les mains, ni quoi que ce soit, on sait que cette relation n'est pas possible. C'est-à-dire qu'avec l'ordinateur, l'ordinateur va vous dire "Mais elle est vraie, elle est vraie !". Il va le dire avec des décimales et tout ça. Non ! Galois dit "c'est pas possible, cette relation n'est pas vraie !". Et elle n'est pas vraie par la pensée pure, c'est extraordinaire ! C'est quelque-chose d'extraordinaire ! Parce qu'il a compris que derrière une équation, il n'y a pas seulement la valeur numérique des racines. Non. Il y a les relations entre les racines qui peuvent exister, Et ce que fait la théorie de Galois, c'est de déceler exactement toutes les relations entre les racines. Et elles sont décelées par un groupe. Alors, ne croyez pas les gens qui vous diront que c'est Galois qui a inventé la théorie des groupes. Non, les gens comme Lagrange, etc., savaient ce que c'étaient que les groupes avant lui. Mais Galois est le premier mathématicien *moderne*. C'est-à-dire que c'est le premier mathématicien qui a eu cette fulgurance, si vous voulez, qui fait que certaines choses comme ça sont vraies sans qu'on ait à calculer ou quoi que ce soit, d'accord. On a une théorie abstraite, c'est une théorie de l'ambiguïté et résoudre une équation, c'est graduellement diminuer l'ambiguïté qu'il y a, pour que finalement, sur l'équation, on puisse affirmer telle racine, et telle racine, etc. D'accord. Donc c'est ça, la théorie de l'ambiguïté. Et ici, en l'occurrence, on peut calculer ce qu'est le groupe de Galois. Donc le groupe de Galois, vous voyez les 5 racines, elles sont indiquées ici. Le groupe de Galois, il va les permuter. Et puis, mais il les permute si vous voulez de manière transitive, c'est-à-dire que si on itère ces permutations, si par exemple, je

prends la racine qui est en-haut au milieu, elle va aller sur la première ; et après, si je regarde où va la première, elle va sur la dernière ; après, si je regarde la dernière, elle va sur l'avant-dernière ; si je regarde l'avant-dernière, elle va sur la seconde. Donc vous voyez que vous avez fait tout le tour d'accord.

Donc bon, et ça, c'est toujours vrai, c'est-à-dire que quelle que soit l'équation que vous preniez, Galois vous dit que si elle était réductible, il y a un groupe qui permute les racines. Alors il y a beaucoup de mathématiciens qui croient connaître la théorie de Galois, parce qu'ils disent que Galois a réussi à démontrer qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. Mais en fait Galois, à 17 ans, avait bien mieux que ça, il avait... un théorème...

Je vais vous effrayer mais ne vous inquiétez pas, on va passer à un autre sujet tout de suite. Donc ce que Galois démontre, c'est que si on prend une équation qu'il appelle primitive. C'est une certaine définition technique, pour qu'elle soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer les racines par un corps fini. C'est Galois qui a inventé les corps finis. C'est assez amusant parce que les Français sont pudiques, parce que les Anglo-Saxons appellent ces corps finis les *Galois fields*. Si on traduit en français, ça se traduit par corps de Galois. Mais en France, on n'utilise pas cette terminologie : on parle de corps fini. Et alors le théorème de Galois, qu'il avait quand il avait 17 ans, c'est que pour qu'une équation primitive soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer ses racines par un corps fini, de telle sorte que le groupe de Galois, alors là, tenez-vous bien, accrochez-vous, soit contenu dans le produit semi-direct du groupe affine du corps fini par le Frobenius, par les puissances du Frobenius. D'accord, d'accord, ok, bon.

(rires)

Et alors quand j'ai préparé mon exposé pour l'Académie, justement, je me suis aperçu qu'en fait, Galois connaissait un nombre incalculable de choses et qu'il connaissait par exemple, maintenant ce qu'on appelle la théorie de Sylow, qui est une théorie qui a été mise au point peut-être 50 ans après la mort de Galois. Donc c'est vous dire un peu à quel point il avait réussi à voir si loin. Et à la fin de mon exposé, je vous montrerai un texte de Grothendieck et c'est un texte qui est fondamental parce que ça s'applique merveilleuse-

ment au cas de Galois d'accord, et c'est un texte sur la créativité, sur la découverte et sur le fait que la vraie créativité, elle demande justement si vous voulez de retourner à cet esprit de l'enfant qui est à la fois libre, mais aussi qui n'accepte pas si vous voulez le poids des connaissances qu'on met sur lui. Donc on y reviendra à ça, d'accord.

Alors maintenant, j'en viens à un autre sujet, parce que je ne veux pas négliger la physique. Et à un autre sujet qui me tient à cœur aussi énormément et qui est celui, si vous voulez, d'un autre grand découvreur, dans le XXème siècle, si vous voulez, c'est la découverte de la mécanique quantique. Maintenant, on va passer à Heisenberg et à la mécanique quantique. Donc on fait une pause si vous voulez. Ce que j'ai essayé de faire, c'est de choisir des sujets qui vous montrent, chacun, une nouvelle notion qui a été découverte, soit en faisant de la recherche mathématique, soit en faisant une recherche sur la nature, sur la physique. Mais chacune de ces notions est une notion qui a un sens, qui a un sens absolument fondamental.

Donc, l'histoire d'Heisenberg, elle est en fait reliée à un lieu, et ce lieu, c'est une île qui en allemand s'appelle Helgoland ; en français, on traduit Heligoland. C'est une île des pays nordiques. Et c'est une île qui a une particularité, je ne sais plus si cette particularité est encore vraie de nos jours ; en tout cas, elle avait une particularité dans les années 1925, qui était qu'elle n'avait pas de pollen. Il n'y avait pas d'arbres, il n'y avait pas de sources de pollen. Alors, quel est le lien avec Heisenberg ? Le lien, c'est que Heisenberg était un étudiant en physique, enfin, un étudiant, il avait déjà de la bouteille... Il était à Göttingen, je pense. Et à un moment donné, c'était au mois de mai, il a été pris d'une allergie terrible, le rhume des foins si vous voulez. Donc il avait la tête enflée, enfin tout ça quoi, et donc à l'époque, le seul remède, on ne donnait pas d'anti-histaminiques, le seul remède, c'était de l'envoyer à Heligoland. Donc il a été envoyé sur cette île. On lui a dit "il faut arrêter de faire vos cours, etc." et on vous envoie sur cette île. Et il est arrivé sur cette île. Il était logé par une vieille dame dans une maison, peut-être une des baraques qui sont là-haut, là. Et puis à l'époque, il cherchait... *(petit bruit circonspect interrogatif).* A l'époque, il cherchait...

Il essayait de ... A l'époque, la mécanique quantique était à un stade préhistorique, c'est-à-dire qu'on avait décidé ce qu'on appelle certains principes, qui permettaient de calculer des énergies et tout ça, mais je veux dire que ce

n'était absolument pas une vraie théorie. Et Heisenberg réfléchissait sur un problème. En gros, son problème, ça prendrait trop de temps de l'expliquer, si vous voulez, l'idée, en gros, à l'époque, on concevait l'atome comme un petit système solaire. Mais ça ne marchait pas. Parce que ce qui se passe dans un système comme le système solaire, c'est que, par exemple si l'électron tournait autour du noyau, il émet de l'énergie, et donc en fait, son orbite devrait se ratatiner sur le noyau. Et ça, c'est pas ce qui se passe en réalité. Donc il y avait des choses comme ça qui ne collaient pas du tout. Et donc, Heisenberg a réfléchi là-dessus. Il est parti des résultats expérimentaux, ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg. Et puis bon, il avait ce calcul qu'il voulait faire et quand il était sur cette île, il a commencé à faire ce calcul. Il y avait des choses qu'il ne comprenait pas, tout ça. Et puis un matin, à 4h du matin, tout a marché ! Il a eu cette révélation extraordinaire ! Et au lieu d'aller se coucher, il est allé grimper sur un des pics rocheux *(rires)* qui sont au bord de l'île. Il s'est installé en haut, et il a attendu le lever du soleil. Et dans ses mémoires, il décrit de manière extraordinaire si vous voulez, cette illumination qu'il a eue et il dit vraiment, et c'est vrai, qu'il a eu tout d'un coup devant les yeux un immense paysage qui s'est dévoilé à ses yeux, mais c'était un paysage intellectuel, bien sûr ; ce paysage, c'était l'essence de la découverte qu'il a faite, si vous voulez, c'est quelque-chose d'incroyable ! Il a découvert que quand on fait des calculs, voilà Heisenberg, et on y reviendra à ça. Ce qu'il a découvert, c'est que vous voyez, quand vous faites de la physique, bon par exemple, vous écrivez $e = mc^2$ ou des trucs comme ça. Vous pourriez écrire $e = c^2$ fois m, c'est du kif-kif, ce sont des nombres. Bon, eh bien, je veux dire, ça ne change rien. Ce qu'Heisenberg a trouvé, c'est quelque-chose d'incroyable. Heisenberg a trouvé que si vous essayez de manipuler la position et le moment, on parle de la vitesse, mais il faut parler du moment : le moment, c'est le produit de la vitesse par la masse, d'accord ? Donc, si vous essayez de manipuler à la fois la position et le moment, au niveau microscopique d'un tout petit truc, d'un atome ou d'un truc comme ça, eh bien, vous pourrez toujours faire tout ce que vous voulez, vous n'arriverez jamais à mettre en défaut ce qu'on appelle le principe d'incertitude d'Heisenberg, d'accord, qui est que $\Delta x \Delta p ... \ \Delta x$, c'est l'incertitude sur la position, Δp, c'est l'incertitude sur le moment. Eh bien ça, c'est toujours plus grand ou égal à $\hbar/2$, qu'est-ce que c'est que $\hbar$, c'est la constante que Planck avait introduite au début du siècle, pour expliquer certains phénomènes physiques.

Alors là, il faut que je vous raconte une petite histoire, à propos du prin-

cipe d'incertitude parce que bon, *(chuchotant)* je crois qu'il y a un bouquin d'ailleurs là-dessus, qui est pas mal, d'ailleurs... Mais en fait, sur le principe d'incertitude, si vous voulez vraiment ressentir en quoi ce principe a troublé les gens, il y a une histoire qu'il faut que je vous raconte. C'est que bien sûr, Einstein n'y croyait pas. Pourtant, Einstein est à l'origine de la théorie quantique, je veux dire, c'est Einstein qui a eu l'idée que le photon avait des niveaux d'énergie qui étaient quantiques. Donc Einstein n'y croyait pas. Donc Einstein avait imaginé un dispositif.

A l'époque donc, Heisenberg a trouvé son principe d'incertitude vers la fin des années 1920. A cette époque-là, il y avait ce qu'on appelait les congrès Solvay ; c'étaient des réunions de physiciens, en petit nombre, et bien sûr, ils discutaient entre eux.

Donc il y a eu un congrès Solvay, je crois que c'était en 1830, ou quelque-chose comme ça. Et donc Einstein avait imaginé la chose suivante ; il avait imaginé pour mettre en défaut le principe d'incertitude, mais pas sur la position et le moment, mais sur $\Delta t \Delta E$; c'est à dire que*...(soupir, soupir)...* le temps, c'est la variable duale de l'énergie, de même que la position est la variable duale du moment. Et le principe d'incertitude vous donne quelque chose de semblable pour $\Delta t \Delta E$. Quelque-chose comme $\hbar$ ou $\hbar/2$, ça dépend des unités. Donc Einstein ne croyait pas à ça. Et Einstein avait imaginé... Bien sûr, il faisait toujours la même chose, c'est-à-dire que quand il ne croyait pas à quelque chose, il imaginait une expérience de pensée. Une expérience de pensée, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que je vais vous faire un dessin très grossier : mais en fait, on peut très bien imaginer que cette expérience soit rendue de plus en plus précise. D'accord ? Donc le dessin très grossier, c'était le suivant : *(dessinant le dispositif au tableau)* là, on va mettre un petit ressort, et puis ici, on va mettre une boîte. Et puis on va mettre comme un coucou quoi. Et puis avec, il y aura l'heure ici, d'accord ?

C'était ça son système, et puis là, il y a une espèce de truc. Et puis, là, il y a des... Voilà le système.

Alors quelle était l'idée d'Einstein ? L'idée d'Einstein, c'est que Δt, eh bien, on va le contrôler puisqu'on à l'heure ici, d'accord. Donc ça, c'est le t donc. Et ΔE maintenant ? Donc, qu'est-ce que ça veut dire, qu'est-ce que j'ai dit ici *(montrant un endroit du dessin)* ? Ca veut dire qu'il y aura un moment

donné où le coucou va faire "Touc !". Il va émettre un photon. Et on saura à quelle heure il l'a émis puisqu'il y a ce truc qui marque l'heure, d'accord. Donc Δt, *(bruit pour exprimer qu'on ne sait pas quoi...)*. Alors maintenant ΔE. Eh bien le photon, ça, Einstein, il le sait, le photon, il pèse $h\nu$, où ν c'est la fréquence du photon. Donc ça, c'est e si vous voulez, c'est l'énergie. Donc quand le photon sort, ce truc-là, il devient un petit peu plus léger... *(voyant qu'il semble peut-être avoir un peu perdu la compréhension de son auditoire)* Est-ce que vous connaissez l'histoire du camion qui transportait des trous, non ? Vous ne la connaissez pas ? Il était en montagne, d'accord, puis à un moment donné, le chauffeur, il s'est senti plus lourd, il a reculé, il est tombé dans le trou, d'accord.

(rires).

Bon, je reprends, d'accord ? Donc, ici, une fois que le photon a été émis, d'accord, ce truc-là devient un petit peu plus léger, donc ça va, si vous voulez, l'aiguille, elle va monter un petit peu, et en regardant de combien elle est montée, on va connaître ΔE donc en fait, Einstein disait "bah on va connaître ΔE, on va connaître Δt, avec une précision aussi grande que l'on veut. Donc on aura pas le principe d'incertitude". Alors il a dit ça. Et ça a fait terriblement peur à Bohr qui était en train de discuter avec eux, parce que Bohr croyait bien sûr au principe d'incertitude, ça lui a fait terriblement peur parce que... Quelle était la raison pour laquelle il avait peur ? La raison pour laquelle il avait peur, c'est que quand vous faites les calculs avec ce système, proposé par Einstein, ce qui va intervenir, c'est la constante de gravitation parce que vous voyez, l'horloge, quand elle monte un peu, elle est dans le champ gravitationnel, donc quand vous allez chercher de combien l'énergie a diminué, vous allez faire intervenir la constante de gravitation, donc évidemment, la constante de gravitation, elle rentre absolument pas dans le $\hbar$ de Planck etc. La théorie de Planck, elle est complètement disjointe de la gravitation. Donc Bohr se disait, c'est foutu !

Donc, il y a une photo extraordinaire, sur laquelle on voit Einstein sortir très fièrement de la salle de congrès Solvay et on voit Bohr qui le suit un peu comme un petit chien, et qui est, bon... Et alors ce qui s'est passé, c'est que ce n'est pas la fin d'histoire. La fin de l'histoire est absolument merveilleuse, parce que ce qui s'est passé, c'est que Bohr est rentré à son hôtel. Evidemment, il n'a pas dormi, il n'a pas dormi de la nuit parce que bon, je veux

dire... Il n'a pas dormi de la nuit, et il a trouvé la réponse... Et la réponse est fantastique. La réponse est absolument fantastique, parce que, si vous voulez, bon, ça paraissait impossible, impossible ! Pourquoi ? Parce que, comme je le disais, il y aura la constante de gravitation quand vous allez faire le calcul et ça, c'est impossible que ça marche ! C'est impossible qu'on retrouve le $\hbar$. D'où il sort ? Ce qu'a trouvé Bohr pendant la nuit, il a trouvé que le même Einstein, en fait, il avait pondu la relativité générale. *(Alain Connes écrit les formules à la craie au tableau).* A l'époque ! Ca, vous savez, maintenant, cette année, au mois de novembre, il va y avoir un tas de célébrations de la découverte de la relativité générale par Einstein. Ca fait exactement 100 ans. C'est pour ça qu'il va y avoir toutes ces célébrations. Donc ça fait exactement 100 ans. Et c'était donc une dizaine d'années, ou même plus, une quinzaine d'années avant l'histoire en question. Qu'est-ce que ça à voir avec le truc ?

Ce que ça a à voir avec le truc, c'est la chose suivante : c'est que ce que dit la relativité générale, elle dit que le passage du temps, si vous écrivez la métrique, vous avez ce qu'on appelle la métrique de Minkowski, en fait, qui est dûe à Poincaré, donc de l'espace-temps si vous voulez. Lorsque ça, c'est l'espace-temps de la relativité restreinte, et si vous regardez la métrique de l'espace-temps de la relativité générale, en première approximation, ce qui se passe, c'est que la métrique ne change pas pour les coordonnées usuelles : on est dans un espace euclidien. Par contre, elle change pour le passage du temps, et la manière dont elle change, c'est que le coefficient dt^2 est multiplié par 1+ deux fois le potentiel Newtonien $V(x, y, z)$.

Vous inquiètez pas, c'est pas... bon. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que le temps passe différemment selon l'altitude, ok ? Mais l'horloge, elle a changé d'altitude un petit peu *(Eclats de rires).* Donc son temps a passé différemment. Vous faites le calcul et vous retrouvez le principe d'incertitude d'Heisenberg. C'est incroyable ! Ca veut dire que Bohr, si Einstein n'avait pas découvert la relativité générale *(Eclats de rires)* une quinzaine d'années avant, il aurait eu raison, d'accord ?... Personne n'aurait cru que le principe d'incertitude était valable. Mais, à cause de la relativité générale, que lui-même avait inventée, il a été battu, il a été mis en défaut. Donc le lendemain matin, Bohr est rentré, triomphant, je veux dire, c'est extraordinaire ! C'est vraiment extraordinaire, mais si vous voulez, tout ça, c'est pour essayer de vous faire sentir le fait qu'aucune de ces notions n'a été acceptée au début. Pas du tout ! Absolument pas. Il y a toujours une résistance absolument

terrible, à des choses qui sont nouvelles comme ça... Et alors, ce qui est incroyable dans le quantique, ce qui est ahurissant dans le quantique, si vous voulez, et ça je pense que ce n'est pas vraiment passé dans les connaissances. Oui, alors, bon. J'en parlerai après de ça, j'en parlerai après. J'y reviendrai. Ce qui est incroyable dans le quantique, si vous voulez, c'est le fait que, et ça, ça vient du principe d'incertitude d'Heisenberg, c'est que, contrairement à la physique classique, quand vous faites une expérience dans le quantique, vous ne pouvez pas reproduire l'expérience. C'est quelque-chose de fondamental. Quand j'essayais de vous dire, si vous voulez, que j'allais vous expliquer des concepts ou des notions... Ce sont des notions qui font une telle cassure avec la vision classique, si vous voulez, que c'est énorme comme différence. Qu'est-ce que je veux dire par là ? Ce que je veux dire par là, c'est que si vous faites une expérience de nature quantique, par exemple vous envoyez un photon, et ce photon, il va passer par une toute petite fente qui est à peu près de la taille de sa longueur d'onde. Et après, vous allez le recevoir sur une cible. Eh bien, le fait que vous receviez le photon à un endroit x donné, cette expérience-là n'est pas reproductible. C'est-à-dire que vous pourrez refaire l'expérience avec autant de précision, donner les mêmes conditions initiales, etc., le résultat final ne sera pas le même. C'est incroyable, ça ! Et il ne sera pas le même à cause du principe d'incertitude de Heisenberg.

Alors, vous pouvez me dire “Bon bah d'accord bah bon moi, je m'en fiche, il y a un peu d'aléa, quoi ! Un aléa microscopique, je m'en fiche !”. Mais non ! Maintenant, ce qui se produit, c'est que le fait qu'il y ait cette incertitude fondamentale, si vous voulez, eh bien, ça a été utilisé pour produire des nombres aléatoires. C'est-à-dire qu'il y a des Suisses qui ont fabriqué un appareil qui marche, maintenant c'est avec une lampe LED, vous savez les petites lampes LED là, comme ça. Alors ces petites lampes envoient des photons sur une cible, voilà. On regarde à quel endroit le photon arrive, il arrive sur l'un des carreaux de la cible. Et à partir de là, on fabrique un nombre et comme c'est un phénomène quantique, c'est-à-dire que c'est un phénomène qui n'est pas reproductible, ça produit des nombres aléatoires, qui sont tellement aléatoires que, même si un attaquant voulait reproduire la même chose, ça veut dire s'il connaissait toutes les données sur le système, il n'arriverait pas à reproduire le même nombre. Alors qu'avec un ordinateur, si vous fabriquez des nombres aléatoires, si l'attaquant connaît votre système de fabrication, il arrivera à les reproduire, les nombres aléatoires, d'accord ? Donc c'est phénoménal, c'est phénoménal ! Alors, de là, si vous voulez de

cette vérité extraordinaire, en fait, sort une idée, qu'on a commencé à exploiter et cette idée, c'est la suivante : vous voyez, nous, nous sommes habitués en physique a attribuer tout variabilité au passage du temps, c'est-à-dire que bon... Moi, je me souviens une fois mon prof, j'avais un prof, je ne sais plus si c'était en maths sup. Il m'a dit de passer au tableau, alors j'y passe.

Il m'interroge. Et puis, il me fait ça *(geste d'une courbe dessinée en l'air)* - Ouhouh ? ! *(rires)*. Moi, je regarde comme ça... Il me dit "Monsieur Connes, quelle est la variable ?". Alors, moi, je faisais de la cinématique. Je réfléchis... Et puis au bout d'un moment, je lui réponds : "c'est le temps !". C'était la bonne réponse ! Vous voyez, normalement, il y a un tas de choses qui sont variables. Et toute la physique est écrite en notant d/dt de quelque-chose égale quelque-chose d'autre... Toute la physique est écrite en fonction du temps. Et en fait, si on réfléchit suffisamment, au niveau conceptuel, on s'aperçoit en fait, que la mécanique quantique occasionne immédiatement des paradoxes, des paradoxes très très violents, très très forts, si vous voulez, et qui viennent précisément du fait qu'on attribue la variabilité au passage du temps.

Et il y a une idée fondamentale qui a du mal à passer, mais qu'on a essayé de vulgariser etc., et cette idée c'est en fait que la vraie variabilité, c'est la variabilité quantique et que le temps en fait, émerge de cette variabilité-là. Ca veut dire que le temps n'est qu'un phénomène secondaire, n'est qu'un phénomène émergent, qui résulte de la variabilité quantique, mais qui n'est pas du tout fondamental d'accord.

Alors pour essayer de faire passer cette idée, en fait, je ne vais pas vous donner tous les détails, on a écrit un livre, donc, avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a écrit un livre ensemble, qui s'appelle Le Théâtre quantique. Et dans ce livre, vous verrez une introduction à cette idée-là, qui est, on l'espère, compréhensible quoique un peu cryptique évidemment, c'est-à-dire qu'on ne donne pas tous les détails etc. Mais l'idée vient d'un autre mathématicien tout à fait extraordinaire Von Neumann.

Cest-à-dire après la découverte de Heiseberg, si vous voulez, après la grande découverte de Heisenberg, bien sûr, les mathématiciens ont formalisé ce que Heisenberg avait trouvé. Ca a pris du temps. Ce que Heiseberg avait trouvé, donc je vous le rappelle, c'était que vous ne pouvez pas permuter les lettres, les variables comme $e = mc^2$, vous ne pouvez pas écrire $e = c^2m$. On

ne peut pas faire ça, d'accord ? Alors il y a des gens qui vous diront "Ouh la la la ! Qu'est-ce que ça va être compliqué tout ça !". Mais en fait, non, revenons à Heisenberg.

Vous voyez ces deux phrases, donc ça, c'est une anagramme qui a été trouvée par Jacques Perry-Salkow, qui est tout à fait extraordinaire et qui a été la naissance du bouquin que je vous ai montré. Mais que signifie une anagramme ? Elle signifie que si j'avais le droit de permuter les lettres, j'obtiendrai le même résultat : pas terrible ! *(rires)* $a2bcd...$ Donc vous voyez, dans le commutatif, ça vous donne le même résultat. Mais bien sûr, nous sommes tous habitués à faire attention à l'ordre des lettres... Bien sûr, c'est le langage ! Le langage est fait pour ça. Et la découverte d'Heisenberg peut se dire incroyablement simplement : elle peut se dire en disant que Heisenberg, il a trouvé qu'il fallait faire attention à l'ordre des lettres, quand on fait des calculs avec les variables microscopiques, c'est merveilleux ! C'est quelque chose d'absolument merveilleux, d'accord ! Bon alors Von Neumann a élaboré là-dessus, il a trouvé qu'il fallait un formalisme mathématique qui s'appelle le formalisme des espaces de Hilbert, c'est un truc assez compliqué.

Alors, vous savez, dans mon introduction, j'ai dit que j'allais parler des algèbres de Von Neumann, d'accord. Alors justement là j'en parle, d'accord. Je ne vous donne pas trop de détails, bien sûr, pas trop de détails sur les types et tout ça. Mais maintenant, je vais vous parler d'un autre mathématicien, et qui a été le point de départ, vraiment de mon travail, de ma thèse, etc., et qui est l'outil qui a permis d'avoir, l'outil essentiel qui permet de donner un sens à cette idée que le temps, le passage du temps émerge à partir de l'aléa du quantique. Alors, la raison pour laquelle je vous montre sa photo, c'est que malheureusement il est mort, le 9 octobre, à l'âge de 91 ans ; sa photo a été prise quand il était venu à Bures-sur-Yvette il y a exactement 30 ans. Il a passé un an à Bures-sur-Yvette il y a 30 ans, et pourquoi c'est un personnage absolument extraordinaire ? C'est un personnage extraordinaire parce que par exemple, il était dans l'armée au moment de la guerre entre le Japon et les Etats-Unis, mais il était devenu sourd à l'âge de 2 ans. Donc il y a eu un moment donné où tous ses coréligionnaires couraient aux abris, quand il y avait un bombardement. Tomita ne bougeait pas, et quand ses coorélionnaires revenaient le voir, ils lui disaient "mais tu es fou ?...". Ils le secouaient, et il leur disait "Quel bombardement ?". C'était à ce point-là, il était connu comme ça. Et alors il y a eu un épisode où le gradé qui les commandait a dit

que lui ne serait pas de l'expédition qu'ils allaient faire parce que, comme il était sourd, ça posait plutôt un problème. Donc il est resté et tous les autres sont morts. Et apparemment, mais ça j'en suis moins sûr, apparemment, il était le suivant sur la liste des kamikazes au moment où la guerre s'est arrêtée.

Ensuite, il a eu un prof, il faut dire que peu après la guerre donc, quand il était à l'université, au lieu de faire des cours, enfin au lieu d'aller écouter les cours, les étudiants allaient planter des pommes de terre tellement il y avait la famine. Ils allaient planter des pommes-de-terre tout près de l'université. Donc il avait un prof. Il avait un prof pour faire sa thèse, son prof s'appelait Ono, et son prof, la première fois donc Tomita va voir son prof, parce qu'il voulait faire une thèse ; son prof prend un gros gros bouquin, je n'en ai pas amené avec moi. Le prof lui donne un livre, oh ! plus que ça, deux fois ça facile, d'accord, il le donne à Tomita et il lui dit "Lisez ce bouquin et revenez me voir quand vous aurez tout compris". Alors ça va, comme ça. Alors pendant 2 ans, ils ne se voient pas. Et puis au bout de 2 ans, par hasard, Tomita rencontre son prof dans les couloirs de l'université. Son prof se souvenait quand même : "alors ce bouquin, ça avance ?". Et Tomita lui répond "je l'ai perdu au bout d'une semaine..." *(rires)* C'était un type absolument génial. Il racontait des histoires qui étaient absolument géniales. Il a fait une découverte absolument géniale. Seulement, comme il était sourd, si vous voulez, c'était très très très difficile de communiquer avec lui. C'était vraiment très très difficile, la plupart du temps, il coupait son appareil. *(rires)*. Moi, ça a été le point de départ de mes travaux si vous voulez. Le départ de mes travaux, ça a été le fait que donc Tomita et puis après Takesaki, qui avait repris les travaux de Tomita, avait trouvé que bon, sur une algèbre de Von Neumann, comme Von Neumann les avait définies, il y avait une évolution mais qui dépendait d'un état. Et alors, ce que j'ai démontré dans ma thèse, c'est qu'en fait, elle ne dépendait pas d'un état et qu'il suffisait d'avoir la non-commutativité, c'est-à-dire qu'il suffisait d'avoir une algèbre, de faire des calculs dans lesquels vous faites attention à l'ordre des termes, pour qu'il y ait une évolution dans le temps, donc pour qu'il y ait un temps qui passe. Bon alors après, il y a eu un tas de conséquences de ça, bien entendu. Et en fait, l'essentiel de mes travaux a été si vous voulez de développer la géométrie pour des espaces qui contrairement aux espaces de Descartes, parce que Descartes si vous voulez, avait réussi à comprendre qu'il y avait une dualité entre la géométrie et l'algèbre car Descartes avait compris qu'on pouvait encoder un espace géométrique par des coordonnées et puis faire des calculs algébriques au lieu de

faire des calculs géométriques. Un exemple le plus simple possible : si vous voulez démontrer que les 3 médianes d'un triangle se coupent. Eh bien, il y a plusieurs manières de faire, mais la manière la plus simple, c'est de faire le calcul du barycentre. Vous prenez les coordonnées puis vous calculez le tiers de la somme des coordonnées. Quel est l'avantage de la démonstration algébrique sur la démonstration géométrique ? Vous pouvez bien sûr faire une démonstration géométrique du fait que les 3 médianes d'un triangle se rencontrent. Mais supposez que je vous demande de le démontrer en dimension n ? *(rires)*. Alors que la démonstration algébrique, elle est évidente, vous faites $1/n$ fois la somme des coordonnées et puis c'est tout, ça vous donne le point d'intersection et puis c'est terminé. Donc vous voyez la puissance de ce va-et-vient, entre d'un côté la géométrie, et de l'autre côté l'algèbre. Alors ce qu'a découvert Heisenberg, c'est qu'il y avait des espaces incroyablement naturels dans lesquels justement, les coordonnées ne commutent pas. Et ces espaces correspondent aux observables sur un système microscopique.

Et donc moi, l'essentiel de mes travaux, ça a été de développer la géométrie, pour de tels espaces.

Alors comme le temps est encore assez court, au lieu de vous parler de mes travaux, je vais vous parler d'un autre mathématicien absolument extraordinaire, qui s'appelle Alexandre Grothendieck, et qui est mort il y a un an, et la raison pour laquelle je vais vous en parler, ce n'est pas parce que je veux vous décrire la théorie des topos, parce que ça, c'est une merveilleuse théorie mais ça ne passerait pas, je n'ai pas envie d'en parler. Après peut-être... Mais c'est surtout pour vous expliquer, pour vous montrer ce que Grothendieck dit sur la créativité et sur ce besoin absolument nécessaire de retrouver, lorsqu'on est devant un problème très très difficile, son âme d'enfant et cette espèce de, justement, d'ouverture, de sensibilité, etc. qui est en fait trop souvent complètement gommée, complètement effacée par le poids des connaissances. Donc voilà ce que dit Grothendieck, je vais le lire avec vous, et puis on s'arrêtera là. Donc voilà Grothendieck quand il était jeune. Il a eu, lui aussi, une vie extrêmement tumultueuse.

Donc voilà ce qu'il écrit. Il écrit :

Dans notre connaissance des choses de l'univers, qu'elles soient mathématiques ou autres, le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'innocence.

C'est l'innocence originelle, que nous avons tous reçue en partage à notre naissance, et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, de nos peurs les plus secrètes. Elle seule, (donc cette innocence) *unit l'humilité* (bien sûr, la recherche est une école d'humilité, l'école quotidienne de l'humilité) *l'humilité et la hardiesse qui nous font pénétrer au cœur des choses et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous, et de nous en imprégner.* (Ca, c'est la première chose qu'il dit. Ensuite il dit :) *Ce pouvoir-là,* (Ca, c'est très très important, maintenant.) *Ce pouvoir-là n'est nullement le privilège de dons extraordinaires.*

Vous voyez, lorsque parfois on assiste à des expositions, sur les mathématiques, vous avez l'impression que ouh ! Ce sont des extraterrestres ces gens-là, non il ne faut pas du tout avoir cette peur, absolument pas. Il arrive au contraire trop souvent que les gens trop intelligents aient une réaction immédiate et que cette réaction immédiate en fait, soit fausse. C'est-à-dire ils vous disent "ça va pas marcher pour telle et telle raison...". En fait, s'ils avaient réfléchi plus, il se seraient aperçus que ça marche, d'accord. Donc ce que dit Grothendieck, c'est que donc :

Ce pouvoir là mais nullement le privilège de dons extraordinaires, d'une puissance cérébrale, disons hors du commun, pour assimiler et pour manier avec dextérité et avec aisance, une masse impressionnante de faits, d'idées et de techniques connues. Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui, comme moi, n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure...

Là, il est vraiment ironique, ironique, j'aime pas dire le plus grand parce que le plus grand, qu'est-ce que ça veut dire..., on ne peut pas comparer des choses différentes, mais il a eu une influence phénoménale sur les mathématiques du XXème siècle. Une influence phénoménale. Donc l'entendre lui, dire ça... c'est rassurant, disons ! *Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui comme moi n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure. Ce ne sont pas ces dons-là, pourtant, ni l'ambition même la plus ardente* (l'ambition ne suffit en rien) *l'ambition, servie par une volonté sans faille, qui font franchir ces cercles invisibles et impérieux qui enferment notre univers. Seule l'innocence les franchit, sans le savoir, ni sans s'en soucier, à l'instant où nous nous retrouvons seuls à l'écoute des choses, intensément absorbés dans un jeu d'enfant.*

Donc ce qu'il explique, c'est qu'il n'y a rien de plus fructueux que de se saisir d'une question et d'y réfléchir, mais de cette manière-là, d'une manière complètement indépendante du poids de la science, etc. d'accord. Bien sûr, bon, pour arriver au problème, il faut connaître un certain nombre de choses mais après, il faut y réfléchir comme ça. Et donc il continue en disant :

La découverte est le privilège de l'enfant. C'est du petit enfant que je veux parler, l'enfant qui n'a pas peur encore de se tromper, d'avoir l'air idiot, de ne pas faire sérieux...

Par exemple, tout à l'heure, il y aura des questions donc d'accord, attention à ça, il ne faudra pas avoir peur. Il y a même un proverbe chinois qui dit : "si je pose une question, j'ai l'air idiot pendant 5 secondes ; si je ne la pose pas, j'ai l'air idiot tout le reste de ma vie.". Donc voilà ce qu'il dit, donc, de ne pas faire sérieux, de ne pas faire comme tout le monde. Et c'est vrai quand-même qu'il y a une attitude typiquement française assez caractéristique dans une assemblée : on a peur de poser la question, sauf quand on connaît la réponse *(rires)*.

Il n'a pas peur non plus que les choses qu'il regarde aient le mauvais goût d'être différentes de ce qu'il attend d'elles, de ce qu'elles devraient être, ou plutôt de ce qu'il est bien entendu qu'elles sont, c'est-à-dire, ce que la majorité des gens vont lui avoir dit qu'elles seraient ; il ignore les consensus muets et sans faille, qui font partie de l'air que nous respirons, celui de tous les gens sensés et bien connus comme tels. Dieu sait s'il y en a eu, des gens sensés et bien connus comme tels, depuis la nuit des âges ; nos esprits sont saturés d'un savoir hétéroclite, enchevêtrement de peurs et de paresses, de fringales et d'interdits, d'informations à tout-venant et d'explications pousse-boutons...

Un exemple typique, c'est ce qu'on appelle l'effet papillon, le nombre de gens qui ont ressassé ça sans savoir que c'était une idiotie, c'est quelque-chose de considérable. Mais je veux dire, ça a perduré, ça a perduré longtemps d'accord. Alors je continue donc.

...espace clos où viennent s'entasser informations, fringales et peurs, sans que jamais s'y engouffre le vent du large, exception faite d'un savoir-faire de routine. Il semblerait que le rôle principal de ce savoir est d'évacuer une per-

ception vivante, une prise de connaissance des choses de ce monde.

C'est ça qui compte, c'est cette perception vivante. Par exemple, pour aimer les mathématiques, il faut en faire, bien sûr. Et peu importe le problème que vous regardez, mais ce qui est important, c'est que vous en fassiez, c'est pas que vous preniez comme... Si quelqu'un vous dit un théorème, par exemple, si vous voulez, il faut pas trop avoir la démonstration. Il faut la chercher par vous-même, même si vous ne la trouvez pas. Vous allez gagner. Pourquoi ? Parce que si vous la cherchez, par vous-même, quand on vous la dira, même si vous ne la trouvez pas, et bien vous direz "mais c'est bien sûr, c'était ça, et c'était ça !". Si vous ne la cherchez pas et si on vous la donne, ça rentre par une oreille et ça sort par l'autre, et puis vous aurez oublié au bout d'une demi-heure. Donc, c'est très très important d'**en faire**, d'accord. Donc donc... *Son effet est surtout celui d'une inertie immense.* Il parle du poids de ce savoir en commun, souvent écrasant.

Le petit enfant découvre le monde comme il respire. Le flux et le reflux de sa respiration lui font accueillir le monde en son être délicat et le font se projeter dans le monde qui l'accueille. L'adulte aussi découvre, en ces rares instants où il a oublié ses peurs et son savoir, quand il regarde les choses ou lui-même avec des yeux grand ouverts, avides de connaître, avec des yeux neufs, des yeux d'enfant.

J'espère que vous ressentez le plus important dans ce que j'ai dit. C'est que ça ne s'applique pas du tout qu'aux mathématiques ; c'est-à-dire que vous vouliez faire des sciences humaines, que vous vouliez faire de la linguistique, que vous vouliez faire quelque chose que ce soit, même peut-être de l'art, si vous voulez, c'est crucial que vous ayez compris le message. Et que vous ayez compris que, en particulier les mathématiques, elles ont une portée bien bien plus grande que de calculer avec des nombres, de calculer avec des chiffres, etc. C'est pas du tout ça, c'est une espèce de version de la philosophie qui est beaucoup plus dure parce qu'effectivement, pour arriver à un concept nouveau comme le concept de topos de Grothendieck, il a fallu des années et des années de réflexion... Mais ça donne des outils de pensée absolument fondamentaux. Et j'ai pas le temps d'en parler, mais le concept de topos, c'est un concept qui vous montre que la notion de vérité, quand on dit par exemple de manière courante de quelque chose que c'est vrai ou que c'est faux, eh bien, quand on regarde dans un topos, c'est un univers

qui est différent de l'univers, eh bien une chose peut être partiellement vraie partiellement fausse, elle peut être vraie pour un certain point de vue, elle peut être fausse pour un autre point de vue, etc. Donc ça donne un outil de pensée qui est incroyablement adapté en fait à la vie, à la politique, à 36 choses, mais qui n'est pas encore passé dans le domaine commun. C'est une notion qui est encore une notion dans le domaine mathématique, qui n'est pas encore passée dans le domaine commun. Et on y gagnerait énormément si vous voulez à, justement, à ce que toutes ces choses merveilleuses qui ont été découvertes, deviennent maintenant, fassent partie du domaine commun. Donc mon laïus allait dans ce sens-là d'accord, d'essayer de vous faire voir, de manière un peu surréaliste si vous voulez, qu'il existe ces choses magnifiques mais que bon bien sûr, il faut faire un effort pour les apprendre et un effort pour les connaître. Voilà.

Séance de questions à l'orateur

- Merci beaucoup. Questions. Peut-être, donc, on fait ce qu'on a dit. Si vous avez des questions, des précisions sur ce qui a été dit, donc, questions qu'il ne faut pas avoir peur de poser, moi, j'en ai quelques-unes, mais je suis sûr que vous en avez aussi...

- Vous avez parlé de l'effet papillon... Et que ça n'existait pas.

- Je n'ai pas dit que ça n'existait pas. Mais j'ai dit que c'était une vaste fumisterie. Parce que ce que je veux dire, c'est comme si on disait qu'il y a un papillon qui va voler, puis l'avion qui suit un autre avion ne va pas décoller ; il y a un effet d'amortissement qui est colossal. Bien sûr qu'on peut faire un système mathématique qui dépend de peu de variables et qui est tel que, quand on fait bouger un petit peu une variable, ça va changer les résultats. Mais de là à faire croire qu'un petit papillon qui vole à un endroit, il va créer, je ne sais pas moi, un ouragan à un autre endroit, c'est ridicule... Bon on peut rappeler d'où ça vient, ça vient du fait qu'il y a des équations différentielles en mathématiques, qui sont telles que si on change un tout petit peu les conditions initiales, ça change le résultat de manière considérable, de manière exponentiellement plus grande. Ca, c'est vrai. Mais c'est vrai dans un modèle particulier. C'est vrai dans un modèle, dans lequel il n'y a pas d'amortissement, comme il se produit dans la nature. Dans la nature, heureusement, il se produit des amortissements, parce que sinon, dans la na-

ture, on regarderait les papillons un peu partout, et puis on aurait la trouille *(rires)*. Heureusement que c'est comme ça. Mais c'est du bon sens, c'est du bon sens. Mais on a vu peut-être je ne sais pas combien de politiques ou des gens qui répétaient l'effet papillon sans rien comprendre, puisque s'ils avaient compris quoi que ce soit, ils se se seraient aperçus que c'était, hein, bon... C'est un exemple typique de gens qui répètent les choses sans les comprendre, simplement parce qu'ils se disent : "Ah ouais, c'est quelqu'un de puissant qui l'a dit, donc ça doit être vrai, quoi !"

- Merci.

- C'était une question sur le fait que vous aviez dit que souvent, les physiciens exprimaient tout en fonction du temps, et qu'on considérait souvent que c'était la variable...

- fondamentale.

- et vous disiez qu'en fait, il se trouve que la véritable variable, c'est la variable quantique, et je n'ai pas compris comment le temps découle de cette variable.

- Ca, c'est toute une histoire. En gros, c'est l'histoire de ma trajectoire. C'est-à-dire en fait ce qui se produit, mais c'est un peu expliqué dans le bouquin, mais c'est surtout bien expliqué dans un exposé que j'ai fait à l'IHES au mois de mai, et dont je pense qu'il doit être sur le site de l'IHES, il faut aller écouter cet exposé, je pourrais en dire deux mots. Mais bon, en gros, c'est que Von Neumann a créé les algèbres de Von Neumann comme étant des systèmes où on a une connaissance partielle de la réalité. Et avec le travail de Tomita, puis mes travaux pendant la thèse, on a compris que si on avait un système qui a une connaissance partielle de la réalité, à ce moment là, il y a un temps qui émerge. C'est-à-dire il y a une évolution dans le temps. Comme tout est quantique, et que la connaissance qu'on a de la réalité est effectivement partielle, c'est ça qui, avec les travaux que j'ai fait avec Carlo Rovelli, c'est ça qui devrait expliquer le passage du temps, c'est ce qu'on appelle le temps thermodynamique. Cette idée du temps thermodynamique, elle est bien expliquée dans notre bouquin à trois voix.

- Du coup, ma question rejoint un peu la question de Constantin tout à

l'heure. Donc du coup, la constante fondamentale, il n'y en a plus maintenant, puisque finalement, tout repose sur une variabilité quantique ?

- Il y a une chose dont je n'ai pas parlé mais j'avais des transparents dessus donc je peux les montrer effectivement. C'est important, c'est important, c'est cette idée de variables. Parce que finalement, on revient à l'idée de variables. Qu'est-ce que c'est qu'une variable, vous voyez ? Nous, ce qu'on nous apprend en classe, ce que c'est qu'une variable réelle... Une variable réelle, c'est une application qui va d'un ensemble X dans les réels. C'est comme ça qu'on nous dit ce qu'est une variable réelle. Or si on regarde cette définition d'une variable réelle, on s'aperçoit en fait, avec un petit raisonnement, on s'aperçoit qu'on ne peut pas avoir coexistence de ce qu'on appelle des variables continues, des variables qui prennent par exemple un intervalle de valeurs, et des variables discrètes, qui prennent des valeurs discrètes. *(Il dessine un intervalle et des points au tableau).* Et la raison pour laquelle on ne peut pas avoir coexistence, c'est que si on prend une variable continue, l'ensemble X doit au moins avoir la cardinalité du continu mais s'il a la cardinalité du continu, on ne peut pas avoir une variable discrète, parce qu'il y aura des points qui seront atteints trop de fois. On ne peut pas avoir ça. L'extraordinaire valeur du formalisme quantique, tel que Von Neumann l'a développé, c'est que dans le formalisme quantique, tout est résolu : c'est-à-dire que dans le formalisme quantique, en fait, une variable, c'est le spectre d'un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert, c'est un peu compliqué mais là, pour les opérateurs dans l'espace de Hilbert, on peut avoir des opérateurs qui ont un spectre discret et des opérateurs qui ont un spectre continu et qui coexistent. Et alors, ce qui est extraordinaire, c'est qu'en fait, ça rejoint exactement la pensée de Newton. C'est-à-dire que Newton, dans ses écrits, quand il essayait de définir ce que c'est qu'un infinitésimal par exemple, il a écrit exactement la bonne phrase, qui correspond au quantique. C'est-à-dire, il disait une variable est infinitésimale. D'abord il disait ce qu'était une variable. Or le formalisme quantique donne exactement la bonne réponse par rapport à Newton. Ca, c'est la première chose.

Et alors donc maintenant, ce qui se produit, c'est qu'une fois qu'on a ce formalisme, de ce que c'est qu'une variable, on s'aperçoit que bien sûr, les variables discrètes ne peuvent coexister avec les variables continues que par la non-commutativité, et on s'aperçoit que c'est cette non-commutativité qui crée le passage du temps, d'accord ? Donc en fait, le $\hbar$ existe toujours en fait,

la constante de Planck est toujours présente, mais ce qui est extrêmement frappant, c'est qu'on ne doit pas considérer le temps comme étant une donnée fondamentale, mais comme une donnée émergente, et que si on avait une connaissance absolue de tout, le temps ne passerait pas. C'est incroyable de penser ça, d'accord, c'est-à-dire que la raison pour laquelle on a l'impression que le temps passe, etc., c'est parce qu'on a une connaissance partielle de l'univers, d'accord. C'est ça qui est formidable si vous voulez avec ce jeu de la physique. Dans le livre qu'on a écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, il faut que je vous dise que Danye Chéreau c'est mon épouse *(rires)*, ce qu'on fait, c'est qu'on a trouvé une phrase très frappante qu'on a utilisée pour exprimer l'idée que je viens de vous dire. On a dit "L'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". Vous savez, Einstein avait dit "Dieu ne joue pas aux dés" donc voilà la réponse. La réponse du héros du bouquin à cette boutade d'Einstein, c'est que "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". C'est-à-dire que c'est parce qu'il y a constamment ces petits trucs complètement aléatoires, pop ! pop ! pop ! qui se produisent, que le temps passe. La nature a une imagination phénoménale. Et c'est ce que donne l'instrument pour mesurer des nombres aléatoires, c'est incroyable, ça veut dire "il prend le pouls de la nature", pop ! Allez ça, c'est un nombre aléatoire, pop ! un autre... Vous pouvez toujours essayer de les reproduire. Bon eh bien ça, c'est incroyable, c'est la phrase qui le dit, c'est "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine".

- Pour essayer de mettre un petit peu ça au clair, du coup, si, admettons, bon, on peut toujours hypothétiser, si par exemple, justement, cette nature quantique était stable, si elle ne bougeait pas, le temps ne passerait pas ?...

- Eh bien, non, justement, elle n'arrête pas de bouger !

- Mais admettons qu'on imagine qu'elle ne bouge pas. Ca veut dire que le temps ne passerait pas ?...

- Ah oui ! Non, non, non, c'est pas ça ; si on la connaissait complètement, si on avait toute la connaissance, là le temps ne passerait pas. Le temps passe parce qu'on a une connaissance partielle, c'est la thermodynamique, d'accord. La thermodynamique, ça nous dit, la thermodynamique, par le génie de Boltzmann, il nous dit que l'entropie, par exemple, c'est la connaissance partielle des choses, d'accord. Donc le passage du temps est relié à ça, d'ac-

cord. Mais la nature n'arrête pas de bouger, hein, d'accord ? !... *(rires)*

- J'ai une question parce que vous dites que pour votre thèse, vous vous êtes inspiré de Tomita qui a montré donc la non-commutativité...

- Non, non, c'est pas ça. Bon oui oui, c'est un détail... ! *(rires francs)*

- Est-ce que vous pourriez juste expliquer ce qu'on appelle les types ?

- Ah oui, les types ! ! Bien sûr, bien sûr, tout à fait, ben les trois types... Alors, les trois types. Où est-ce qu'ils sont, les 3 types ? Le premier type, c'est lui... *(Il montre une photo, éclats de rires.)*

Les 3 types, donc : le type I, c'est un système quantique tel qu'en fait, l'espace de Hilbert du système quantique se casse en un produit tensoriel de deux espaces, c'est-à-dire que c'est vraiment le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, et c'était ce dont les gens avaient imaginé que ce serait toujours le cas. Ils imaginaient toujours que quand on prenait un sous-système d'un système quantique, on pourrait casser l'espace de Hilbert en un produit tensoriel de deux, de telle sorte que le premier système corresponde au premier espace de Hilbert, aux opérateurs dans le premier espace de Hilbert, et l'autre aux opérateurs dans le deuxième espace de Hilbert. Alors ce que Von Neumann et Murray ont découvert, c'est qu'en fait, il y avait deux autres types. C'est-à-dire qu'il y avait une manière d'avoir des sous-systèmes quantiques qui ne correspondait pas du tout à un scindage de l'espace de Hilbert en un produit tensoriel. Alors le premier type, il y avait les dimensions réelles. Et puis le type III qui restait, c'étaient les autres. Et avant Tomita, on n'avait aucun outil pour attaquer le type III, d'accord. Donc ce que Tomita a trouvé, c'est que dans le type III, il y avait ce groupe $\sigma_{t\phi}$ et puis ce que j'ai trouvé dans ma thèse, moi, après, c'était que le groupe qu'avait trouvé Tomita, en fait, il était unique modulo les intérieurs, c'est-à-dire qu'il définissait une vraie évolution, indépendante de toute autre chose. Donc ça, ça a donné quantité d'invariants, etc., ça a permis de tout débloquer. D'accord ! Donc mais c'est incroyable parce que Von Neumann avait défini ces sous-systèmes quantiques de manière complètement euh, comment dire, c'est dans les écrits de Von Neumann, de manière complètement abstraite. Et jamais on aurait pu penser à l'époque de Von Neumann que ça aurait été relié au temps, au passage du temps, je veux dire, c'est absolument incroyable. Ca veut dire la profondeur

du quantique. Heisenberg a découvert que ça venait de la non-commutativité, Von Neumann l'a reformulé sous forme d'opérateurs dans l'espace de Hilbert, il s'est posé le problème des sous-systèmes, et de là sort le passage du temps, c'est fabuleux !

- Est-ce que vous pourriez nous expliquer pourquoi le principe de l'entropie résulte de la connaissance partielle qu'on a du monde ?

- Ca, c'est Boltzmann et le pauvre Boltzmann était tellement incompris à son époque qu'il a fini par se suicider. Il a eu une idée absolument... Il a fait graver sur sa tombe la formule qui est la suivante $S = k\ log\ n$. Ca, c'est gravé sur la tombe de Boltzmann. Il s'est suicidé près de Trieste. Cette formule, qu'est-ce qu'elle dit ? C'est une des formules les plus simples mais l'une des plus difficiles à comprendre. Qu'est-ce que c'est que l'entier n ? C'est le nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique.

Il faut que je vous raconte un peu l'histoire : l'histoire, c'est à la période où les gens avaient découvert la machine à vapeur, et puis il y avait les locomotives et tout ça, et donc ce que les gens avaient découvert, c'était qu'il y avait un moyen de transformer la chaleur en énergie, en mouvement, en tout ce qu'on veut quoi. Et c'est comme ça que le chemin de fer a commencé, etc. Et ils s'étaient posé la question de ce qu'on appelait le rendement des machines et tout ça. Et donc bien sûr, si vous voulez, il y avait des quantités de chaleur dq donc qui étaient entre deux systèmes etc. Mais on s'était aperçu assez vite que si on prenait deux chemins différents pour aller d'un point à un autre, d'un état à un autre, l'intégrale de $\int dq$ si vous voulez, c'était pas préservé, c'est-à-dire qu'on ne peut pas définir la quantité de chaleur d'un objet. Par contre, on s'est aperçu que si on divisait dq par ce qu'on appelle la température absolue, eh bien ça, cette quantité-là si vous voulez, elle était bien définie, c'est-à-dire que quel que soit le chemin qu'on prenait, entre un état et un autre, l'intégrale de ce truc-là donnait le même résultat. Et c'est ça qui avait permis de définir l'entropie.

Mais cette entropie, elle était définie pour des systèmes macroscopiques qui étaient donnés par la température, la pression, le volume, enfin je sais pas quoi, si vous voulez un certain nombre de quantités macroscopiques, il n'y avait aucune interprétation, aucune, et ça s'appelait l'entropie. Ca s'appelait

l'entropie, S. Mais cette entropie, elle n'avait aucune signification philosophique puisque justement, c'est de ça dont on parle, d'accord ? Et l'incroyable génie de Boltzmann, ça a été cette formule $S = k\ log\ n.\ dq + ds = log\ n$, c'est-à-dire ce qu'a compris Boltzmann, c'est qu'à chaque fois qu'on prend un état macroscopique donc un volume donné etc., on peut avoir le même état macroscopique, à partir d'états microscopiques totalement différents. C'est-à-dire que l'exemple le plus simple, c'est de prendre des boules rouges et des boules blanches, et de les empiler dans un réservoir. Et vous avez par exemple 50 boules rouges et 50 boules blanches. Vous voyez bien que vous pouvez les empiler de 36 manières différentes, d'accord. Mais l'état macroscopique correspondant vous dira qu'il y a la moitié de boules rouges et la moitié de boules blanches et puis c'est tout. Le reste, vous vous en foutez. Eh bien, ce qu'a compris Boltzmann et qui est incroyable, c'est que l'entropie, qui était définie de manière complètement ad hoc par les gens qui faisait des systèmes de machines à vapeur et tout ça, eh bien en fait, c'était simplement le logarithme du nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique donné. Bien sûr, il fallait une constante devant. C'est ce qu'on appelle la constante de Boltzmann, c'est normal qu'elle porte son nom. Donc cette constante de Boltzmann, c'est pas la même chose que la constante de Planck, et elle est, bon, évidemment il faut que ça ait la dimension d'une entropie etc. etc. d'accord. Mais c'est la formule la plus incompréhensible, et la plus géniale qui soit, cette formule d'accord. Et elle est très difficile à comprendre. Ce qui est très difficile à comprendre, c'est que les lois de la physique, pas de la physique des particules, mais les lois de la physique ordinaire, sont invariantes quand on change t en $-t$. Et si vous voulez, ce qui est très difficile à comprendre, c'est qu'un des principes fondamentaux de la thermodynamique est que l'entropie s'accroît. Alors on dit : "Mais le temps, il va dans quel sens ?. Ca, ça a hanté les gens pendant des années et des années. Et Boltzmann, il avait compris un nombre incalculable de choses simplement à cause de cette idée. C'est un exemple merveilleux, de formule très simple, mais justement si vous voulez, ça, c'est aussi une chose très importante que je n'aurais pas voulu oublier de vous dire, qui est qu'il y a un certain nombre de notions mathématiques ou de notions de physique comme ça, qui ont une qualité extraordinaire, et cette qualité, c'est de mettre la pensée en mouvement. Cette formule c'est un exemple typique, vous regardez cette formule, vous essayez de la comprendre, voilà, votre pensée est en mouvement maintenant. Elle a un potentiel extraordinaire de mise en mouvement de la pensée. Parce que vous pouvez vous dire "Pourquoi ça augmente ?". En gros, l'explication de

Boltzmann de la raison pour laquelle ça augmente, c'est que, en général, on va aller vers des états qui ont de plus en plus de réalisations microscopiques, c'est-à-dire qui sont de plus en plus probables. Et après, pour mettre ça sur des bases solides, c'est une autre histoire...

- Donc vous nous avez beaucoup parlé de la physique, et on sait qu'en ce moment la physique théorique, ça devient un peu un repaire de mathématiciens, par exemple avec la théorie des cordes, et du coup je me demandais si vous, en un sens, est-ce que vous pourriez vous considérer plutôt comme un physicien qui fait des mathématiques ?

- C'est une bonne question, j'avais des amis qui, connaissant mes opinions sur la théorie des cordes, disaient que j'étais un peu comme une machine où on met des sous, alors, mais si on met 1 euro, je vais parler pendant 10 minutes contre la théorie des cordes. Donc je vais vous épargner. Non, mais je vais vous citer une phrase de Hadamard. Il faut que je la trouve déjà *(rires)*. Attendez, il faut que je la trouve... Alors, je crois que je vais y arriver. Voilà, c'est une phrase sur le lien entre les mathématiques et la physique ; ce que dit Hadamard, pour caractériser la profondeur des concepts mathématiques qui viennent directement de la physique, il dit (je le dis en anglais donc, mais c'est très facile à traduire en français) :

...not this short lived novelty, which can too often only influence the mathematician left to his own devices, but this infinitely fecund novelty, which springs from the nature of things[2].

Donc voilà la réponse. La réponse, c'est qu'il n'y a pas d'un côté les mathématiques, et d'un autre côté la physique. C'est la même chose : on essaie tous de comprendre, d'accord. Et justement, il y a cette profondeur extraordinaire dans certains concepts mathématiques qui viennent directement de la physique. Comme Heisenberg. C'est inépuisable parce que c'est venu de quoi, c'est venu de l'expérience, c'est venu de la physique, c'est la nature qui nous parle, qui nous dit quelque chose d'accord. Ca, c'est inestimable ! Mais ce n'est pas le cas de la théorie des cordes, parce que la théorie des cordes,

2. ...non une brève nouveauté qui souvent influence le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais une nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses. in Jacques Hadamard, Préface à l'introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel de G. Juvet, Albert Blanchard, Paris, 1922

c'est une déviance qui elle, est venue à partir de mathématiques abstraites etc., et qui elle n'a pas de contact avec l'expérience.

- Il y a un autre mathématicien, qui s'appelle Carlo Rovelli *(précision d'Alain Connes : "C'est un physicien, lui, c'est un physicien" (rires))* et il dit que pour lui, la beauté de la physique, c'est une idée simple, qui nous ouvre sur un monde totalement nouveau et en même temps, ce monde, il est réel, il est correct. Et je me demandais pour vous, ce que vous pensiez vous de la beauté mathématique...

- Ca, c'est une bonne question *(soupir)*. Bon d'abord, il y a beaucoup de gens qui, et je pense que c'est vrai, qui vous diront que la notion de beauté est une notion très relative, c'est-à-dire que chacun a sa notion différente etc. bien sûr. Mais bon moi, j'avoue que pour moi, la beauté mathématique, c'est quand, après des calculs terribles, terriblement compliqués, on arrive à la même chose, on arrive au résultat, mais par une idée d'une simplicité incroyable, un peu comme l'œuf de Colomb d'accord. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique, pour moi, la beauté, c'est la simplicité d'une idée, mais en fait, d'une idée qui va... Bon par exemple, je ne sais pas... quand on parlait de Galois, je vais vous fournir un exemple de cette beauté. Que dit Galois ? Galois dit quand on prend une équation, on prend une équation polynomiale. Alors, la première chose qu'on va faire, on va trouver une fonction des racines, qui quand on permute les racines, va prendre... Bon, par exemple, on prend une équation de degré 5. Il faut que quand on permute les racines de manière arbitraire, cette fonction prenne 120 valeurs différentes (5! valeurs différentes). Alors comment est-ce qu'il fait, Galois, pour trouver une telle fonction ? C'est très simple : il dit "si j'appelle les racines A, B, C, D, E, d'accord, je prends A plus 1 000 000 de fois B + 1 trillion de fois C etc. Evidemment, quand je vais les permuter, ça va prendre que des valeurs différentes. Ca va prendre 120 valeurs différentes". C'est la première chose. Deuxième chose, que dit Galois ? Il dit "eh bien, maintenant, prenons pour équation l'équation qui a pour racines ces 120 racines. On prend cette équation et on la décompose en facteurs irréductibles. On peut exprimer les racines de l'équation de départ en fonction de ces facteurs irréductibles et on va obtenir, en prenant ces facteurs irréductibles, des permutations des racines de l'équation. Théorème, voilà la beauté mathématique. Théorème : Le groupe de permutations obtenu ne dépend d'aucun des choix qu'on a faits. C'est-à-dire que si, au lieu d'avoir pris A plus 1 000 000 de fois B etc.,

j'avais pris 1 000 001 ou n'importe quoi, j'aurais obtenu le même groupe. Ca, c'est la beauté mathématique, c'est quelque chose d'incroyablement beau. Pourquoi ? Parce que ça veut dire qu'on a donné une recette, qui avait l'air complètement arbitraire, et on est arrivé à un invariant, on est arrivé à un groupe, qui est une caractéristique de l'équation, qui va donner tous les résultats qu'on veut, et qui est d'une simplicité biblique, à la fin, c'est-à-dire la manière dont il est défini, c'est d'une simplicité biblique. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique. Mais c'est un exemple, hein, je veux dire, la définir abstraitement, si on en donnait une définition abstraite, c'est évident qu'on pourrait trouver un contre-exemple et qu'on pourrait trouver... Mais c'est... En fait, si vous cherchez des choses générales sur la beauté en mathématiques, sur des choses comme ça, lisez *Récoltes et Semailles* de Grothendieck. Parce que c'est... Grothendieck n'était pas seulement un mathématicien, en fait, c'était un littéraire, et c'était quelqu'un qui a été capable dans ses écrits, d'aller très très loin dans l'analyse de ce que sont les mathématiques, de ce que c'est que la beauté en mathématiques, etc. Donc il a écrit 1500 pages, ces 1500 pages, vous pouvez les trouver sur internet, d'accord. Et n'écoutez pas les gens qui vous diront qu'il est fou parce que ce n'est pas vrai, ce n'est pas vrai : c'était quelqu'un qui était merveilleusement intelligent, et qui a écrit merveilleusement en tant que littéraire. Il a un vocabulaire extraordinaire, etc. J'ai fait un exposé, au séminaire d'Antoine Compagnon, sur Grothendieck et Proust, en les comparant justement, et je pense qu'il est disponible cet exposé, peut-être sur le site du Collège de France ou sur mon site. Donc, parce que je veux dire, parce que c'est très frappant, c'est très frappant de voir que ce sont deux individus qui ont réussi une chose que peu de gens réussissent, aussi bien l'un que l'autre, qui est non seulement une œuvre, pour Grothendieck, mais aussi si vous voulez ce que dit Grothendieck, ce qu'il explique, c'est qu'en fait la... En fait, si on veut se réaliser bien sûr, bon, c'est bien de faire une vraie mais en fait la principale difficulté qu'on a, c'est de se comprendre soi-même, et pour se comprendre soi-même, ça paraît idiot *(rires)*, n'est-ce pas ? Et pour se comprendre soi-même, il faut en gros s'auto-analyser, c'est ce qu'a fait Grothendieck et d'une certaine manière, c'est ce qu'a fait Proust aussi dans son livre. Ce sont aussi des gens qui, à partir d'un moment donné, ont arrêté de vivre et ont passé le reste de leur vie à ré-analyser leur vie passée, d'accord, et à la comprendre, etc. Et dans les deux cas, c'est merveilleux, le résultat est merveilleux, d'accord. Donc la meilleure réponse je crois, c'est celle-là, c'est d'aller voir dans *Récoltes et Semailles*, et de le lire, pas de le feuilleter, il faut le lire vraiment, il faut le

lire attentivement, vous voyez, comme les passages que je vous ai lus tout à l'heure.

- Merci de préciser : *Récoltes et Semailles*, c'est le livre que Grothendieck a écrit et auquel on a accès depuis peu de temps, finalement...

- Non, pas peu de temps, ça fait très longtemps qu'on y avait accès mais bon, il a écrit d'autres livres. C'est un personnage, tous ces personnages-là ont des vies extraordinaires. Grothendieck a eu une vie extraordinaire parce qu'en gros, en 1970, il a quitté l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (l'IHES) et il est redevenu, parce que c'était son tempérament fondamental je pense, un peu un paria si vous voulez. Et à partir de 1991, il s'est réfugié dans un village des Pyrénées. Et plus personne n'avait de nouvelle de lui, mais il continuait à travailler, il continuait à écrire. Et alors, il n'a pas seulement écrit *Récoltes et Semailles*, il a aussi écrit un autre texte magnifique, qui s'appelle *La clé des songes*. Et c'est un texte mystique, mais bon alors, je vais dire c'est pareil, je veux dire, c'est pareil... Mais c'est extrêmement intéressant, mais je pense que par exemple, pour des gens qui font de la littérature, ces textes-là ont une valeur infinie. Il y a des thèses à faire là-dessus, il y a 36 choses à faire, bien sûr...

- Alors moi j'avais vu quelque part sur internet je crois, je ne suis pas sûre de mes sources, qu'en fait vous pensiez que les mathématiques existaient sans les hommes en fait, que même ce n'étaient pas une invention faite par les hommes, et j'ai un peu de mal à comprendre ça en fait, parce que souvent, on voit les maths comme quelque chose de très abstrait qui n'existerait pas sans que les hommes les aient inventées, donc, pouvez-vous expliquer ça ?

- Bon, je peux vous donner la réponse. La réponse est très simple. Vous prenez, vous prenez la chimie. C'est un sujet que j'exécrais, moi, lorsque j'étais en maths sup et maths spé, donc vous avez tous ces trucs-là. Alors on a les corps composés puis on a les corps simples. Les corps simples, il y a le tableau périodique des éléments. Le tableau périodique des éléments, incroyable mais vrai, il y a le principe d'exclusion de Pauli, et une toute petite équation, qui vous le donne. Ca me suffit, moi. Pourquoi ? Parce qu'imaginons qu'il y ait un autre système planétaire etc. Si ce sont des êtres intelligents, ils vont comprendre la chimie, qu'il y a des corps simples, ce sera les mêmes, ils n'auront pas... je veux dire ils n'auront pas des corps chimiques, ils n'auront

pas des corps simples différents des nôtres, donc ils vont comprendre les corps simples. Et puis, s'ils sont vraiment intelligents, ils vont essayer de trouver, bon, ils auront le tableau périodique des éléments. Ils vont essayer de trouver quelle est l'origine abstraite du tableau périodique des éléments. Ben, s'ils sont vraiment intelligents, ils trouveront la même chose, ils trouveront qu'il y a le principe d'exclusion de Pauli. Et puis, il y a cette petite équation... Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que, derrière l'apparente, comment dire, arbitraire du monde qui nous entoure, il y a des choses incroyablement simples qui le régissent, la chimie, l'itération puisque les arbres, tout ça, c'est régi par l'itération, et qu'en fait, il y a une manière de comprendre le monde, qui au lieu d'être un chaos, si vous voulez, est quelque chose de beaucoup plus structuré, et qui est structuré par les mathématiques. Et il n'y a aucune raison pour que, bien-sûr, les gens donnent le même nom aux concepts mathématiques qu'ils auront utilisés, mais c'est bien clair qu'ils utiliseront la... , s'ils sont des êtres différents et ils auront 1, 2, 3, 4, 5. Ils ne le diront pas de la même manière, mais ils utiliseront le langage mathématique, ce langage sera en correspondance avec le nôtre, comme le langage des chinois est en correspondance avec le nôtre.

Donc, c'est en ce sens-là, c'est en ce sens absolument fondamental, que je dis que les mathématiques pré-existent, pourquoi ? Parce que ce serait incroyablement prétentieux de dire que nous avons inventé les nombres entiers. Alors à ce moment-là, pourquoi la chimie aurait déjà utilisé ces choses-là pour exister ? Ca paraît complètement débile. Donc en fait, ce que je dis, c'est que, quand on a trouvé, quand Watson et Crick ont trouvé la structure en double hélice de l'ADN, ils ne l'ont pas *inventée*, personne ne va croire qu'ils l'ont *inventée* bien sûr, ils ont *découvert* ça. C'était une réalité, et cette réalité, elle pré-existait à eux. Eh bien, pour les mathématiques, c'est pareil, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que nous découvrons, un peu comme un explorateur va découvrir quelque chose. Cet explorateur, il a un libre-arbitre, il peut aller à tel endroit ou à tel autre endroit. C'est ce qui fait croire à des gens qu'en fait, c'est comme l'art. Mais non ! Ce n'est pas de l'art, c'est de l'exploration. Et c'est une exploration d'autant plus... comment dire ? réelle, que cette réalité, elle résiste. Si c'était de l'art, on pourrait faire dire n'importe quoi, et n'importe quoi. Ce n'est pas le cas. Ce n'est pas le cas. Il y a une résistance terrible... Et alors un exemple, un autre exemple typique, c'est que si par exemple, j'écris une équation etc., et puis bon, par exemple, Galois avait dit que les calculs qu'on devait faire pour suivre sa méthode

étaient impossibles à faire et à son époque, c'était impossible à faire. Et pour montrer que c'était impossible à faire, quand j'ai donné mon exposé à l'Académie, j'ai expliqué aux gens la méthode de Galois et je leur ai demandé "est-ce que vous pouvez me donner une idée... ?", bon, parce que chaque racine s'exprime comme un polynome en fonction des racines de l'équation auxiliaire. Je leur ai demandé, je leur ai donné une équation comme celle que je vous ai donnée tout à l'heure je leur ai dit "est-ce que vous pouvez me donner l'ordre de grandeur du coefficient d'ordre 0 du polynome qui exprime la première racine ?"... 1 million sur 1 million, ou quelque chose comme ça. Non, la réponse, c'est un nombre à 500 chiffres sur un nombre à 500 chiffres ! L'ordinateur le fait maintenant, et l'ordinateur vérifie que Galois avait raison d'accord ! Alors dire que Galois l'a inventé, je veux dire, c'est un peu gros, quoi ! Non, non, non ! Non, non, non ! On *découvre*, on *découvre*, mais exactement comme il avait fallu le microscope électronique, pour découvrir la structure en double hélice de l'ADN, le mathématicien invente des outils conceptuels pour réussir à percevoir cette réalité. Mais il invente des outils conceptuels bien entendu. Mais c'est une réalité qui est là, elle résiste, elle est complètement tangible et elle régit la nature. Elle est plus fondamentale, pour moi, cette réalité-là est plus fondamentale que la nature qui nous entoure. Elle pré-existe à ça d'accord. Si vous voulez, ce serait même... je pense que ce ne serait pas juste de dire que la nature est seulement écrite dans le langage des mathématiques ; les mathématiques, c'est plus que ça, c'est plus que ça. La nature est consubstantielle des mathématiques. Nous, on ne s'en rend pas compte parce qu'on n'est pas suffisamment intelligent pour se rendre compte de l'explication qui est derrière tous ces phénomènes. Si on s'en rendait compte plus, on le saurait beaucoup mieux. Et c'est d'autant plus vrai avec le quantique. Je veux dire, le quantique, là, c'est flagrant. Le quantique, c'est une réalité qu'on ne perçoit que par les mathématiques, on ne la perçoit absolument pas autrement. C'est-à-dire que les gens qui font des expériences avec le quantique, en optique quantique, ils comprennent ce que c'est que l'espace de Hilbert, ils le touchent comme ça, d'accord, c'est incroyable, ça, ça, c'est vraiment incroyable !

- Merci.

- Vous êtes prêt à répondre encore à quelques questions ?

- Oui, ça va, ça va.

- Pour que l'on ait plus de facilités par exemple avec les notions abstraites, en mathématiques ou en physique, ou même avec les raisonnements, qu'est-ce que vous préconiseriez dans l'éducation et dans l'enseignement, à présent, dans l'école primaire ou même dans le secondaire ?

- Je vais répondre, d'abord pas dans l'école primaire, ni dans le secondaire, je réponds pour vous, parce que c'est le plus utile. Donc pour vous, ce que je préconise, c'est la chose suivante. Pour répondre à une question, même une question de calcul compliquée, vous laissez tout en plan, vous allez faire un tour à pied, d'accord. Et la question, vous la gardez dans la tête, d'accord, vous la gardez dans la tête, et vous réfléchissez. Evidemment, ça peut être différent selon les individus, mais pour moi, c'est le grand secret. C'est-à-dire un calcul, aussi compliqué soit-il, vous pouvez vous dire "Oh ! Jamais je vais y arriver si j'essaie comme ça !" Non ! Vous partez faire un tour à pied, et vous réfléchissez à la structure du truc, et après quand vous reviendrez, bon, vous verrez que ça améliore drôlement les choses.

Bon alors maintenant, dans le primaire, j'en sais rien, moi, tout ce que je peux vous dire, c'est ma propre expérience, parce que je n'en connais pas d'autre. Mais ma propre expérience, c'est quand j'étais gamin, quand j'avais 5 ans, mon père nous imposait de faire des calculs. On était dans le jardin avec lui, il était avec nous, et il nous faisait faire des opérations, et à l'époque, on faisait les quatre opérations, c'est-à-dire on faisait la division, à 5 ans, on faisait la multiplication, on n'avait pas attendu la sixième pour apprendre la division, et tout ça donc, on faisait ça. Et après une autre expérience qui m'est arrivée... Et moi, j'adorais ça, c'était sans doute aussi ma relation avec mon père, il me faisait à la fois peur, mais j'étais content de lui faire plaisir, enfin bon, je ne sais pas, donc je ne sais pas, je ne sais pas comment expliquer ça : je vais dire que je pense qu'il y avait une vertu extraordinaire au fait de faire des opérations comme ça, c'est-à-dire d'apprendre par cœur la table de multiplication et puis, on ne l'oubliait pas la table de multiplication, si on faisait des multiplications et des additions à longueur de journée, on ne l'oubliait pas, on la savait après. Et ça devenait un automatisme absolu. Donc il y avait ça, et moi, ça me plaisait énormément. Une autre histoire que j'ai, c'est qu'une fois, ça, je trouve ça absolument extraordinaire, une fois, j'ai rencontré un ami que je n'avais pas vu, on jouait au foot ensemble, dans le temps, et puis peut-être 8 ou 9 ans après, je prends le TGV pour aller à,

je crois que c'était à Rennes ou un truc comme ça, et puis je vais à ma place de TGV et puis, je regardais mon numéro, et je vois quelqu'un à côté qui regardait son numéro et c'était mon copain. On a commencé à discuter etc. Et puis alors, la discussion habituelle, tu as des enfants, il commence à m'expliquer qu'il a un fils, et que son fils est bizarre. Il faut dire que mon copain est littéraire. J'ai dit "pourquoi ?". Bon tu sais, bon d'abord, il avait été malade quand il était petit et puis une fois, quand il avait 5 ans, on était ensemble, on était sur la plage et puis il avait l'air souffreteux ; moi j'étais inquiet, je veux dire pendant une heure, il était là, au lieu d'aller se baigner, il était un peu blanc et puis au bout d'une heure, il vient me voir, donc c'est mon copain qui raconte, il vient me voir, et il me dit : "papa il n'y a pas de plus grand nombre !". Je lui dis "Ecoute, ton fils, il est génial !" *(rires)*. Il me dit. "Ah oui, bien sûr !". Je lui ai demandé si son fils avait trouvé une démonstration et il avait trouvé une démonstration, qui n'est pas la démonstration usuelle, c'était pas rajouter 1, c'était multiplier par 2 ou quelque-chose comme ça, peu importe, il avait trouvé une démonstration. C'est incroyable, mais après, il me dit, "tu sais, il a eu des problèmes à l'école" *(francs éclats de rires)*. Alors, il m'a raconté ses problèmes à l'école. Alors ça, ça va répondre à votre question pour l'école primaire. C'est qu'à l'école primaire, donc on lui avait posé le problème suivant : c'était "une fleuriste a 120 fleurs, elle fait 4 bouquets de 17 fleurs, combien lui reste-t-il de fleurs ?", d'accord. Alors lui, il avait eu "zéro, n'a pas le sens des opérations". Il était pas con, il lui en reste 120 puisqu'elle ne les a pas données *(rires de tous)*. Quand il m'a eu raconté ça, j'ai dit "bah écoute ton fils, c'est un mathématicien". Et alors, on a organisé donc avec son père une rencontre au Tea Caddy à Paris, c'est un endroit charmant. Et son fils à l'époque avait 12 ans. Donc bon, les choses ont évolué, ça fait un certain moment, et maintenant, c'est un grand mathématicien qui est prof à Orsay. Alors incroyable, incroyable, incroyable ! Donc je crois que ce qui compte, c'est ce que dit Grothendieck, c'est de retourner dans cet état d'enfance et de se poser les bonnes questions, et puis de ne pas hésiter à être à contre-courant etc. Surtout je veux dire que le moment où on devient mathématicien, c'est le moment où on est capable de dire au prof qu'il a tort et pourquoi, ça veut dire être capable de résister à son autorité, pour dire qu'on a réfléchi, et qu'on n'est pas d'accord, et puis d'être sûr de soi, parce qu'on a réfléchi par soi-même, c'est hyper-important.

- Non en fait, j'ai une question, même si je pense que vous avez un peu répondu à cette question par vos propos, mais j'aimerais vraiment savoir pour

vous quel est le but du travail d'un scientifique, enfin, si vous pensez que c'est plutôt d'augmenter, de faire avancer la connaissance fondamentale, ou de le rendre accessible à son public pour une éventuelle application.

- Il y a ces deux aspects, que l'on ne doit pas mélanger du tout, il y a ces deux aspects. Je pense que la vraie motivation, c'est de faire avancer la connaissance fondamentale. C'est-à-dire qu'en fait, la vraie motivation qui doit être justement indépendante de toute autorité, de tout désir de reconnaissance, etc., la vraie motivation, c'est d'essayer de comprendre, comprendre là où on est, là où on a atterri, d'accord, c'est ça, c'est tout simple à comprendre, c'est là où on est.

- Non mais sur cette question de la vulgarisation des savoirs et en particulier des savoirs mathématiques. A vous entendre, il y a un risque : l'effet papillon en est un. Moi j'allais dire ce que j'avais retenu, par exemple, de l'entropie, ce que les philosophes, ce que certains philosophes peuvent faire de l'entropie, il y a parfois effectivement un grand danger d'une espèce de ... et en même temps, vous semblez dire qu'il y a un besoin. Donc si on vous demandait en gros "comment faire pour éviter le danger et répondre au besoin", est-ce que vous seriez... ?

- Oui, oui, c'est une très bonne question. Il y a eu Sokal, il y a eu Deleuze. Il y a eu Lacan, je ne sais pas si vous savez, mais Lacan a dit dans un séminaire que le nombre $\sqrt{-1}$ est le symbole du sexe mâle, d'accord. C'est ce qu'on appelle le nombre imaginaire pur ! ! *(rires)*. Il fallait le faire quand-même, hein ? ! Et en plus, il a fait une fois un séminaire, où il avait un théorème d'accord, et son théorème, c'était que "Don Juan est compact". Quelqu'un lui avait dit la définition d'un espace compact en mathématiques. Donc ça, évidemment, c'est débile, d'accord, c'est absolument débile. Et qu'est-ce que c'est ? Ce sont des concepts mathématiques mal compris qui sont utilisés comme une autorité psychologique sur les autres, c'est-à-dire qu'ils sont utilisés parce que les gens ne comprendront pas et l'effet papillon en est un exemple flagrant, comme une autorité psychologique parce que les gens quand ils ne comprennent pas, ils sont en position d'infériorité, leur compréhension s'arrête, et si vous voulez, ils sont impressionnés etc. Donc, il y a cette manière terrible d'utiliser les mathématiques, qui est justement d'utiliser de grands mots, comme une espèce de pouvoir psychologique sur les foules. Alors ça, c'est à bannir à tout prix. Par contre, moi ce qui me désole si vous voulez,

c'est que des concepts aussi beaux que le concept de topos de Grothendieck, ne soit pas plus connu par des gens qui en auraient besoin parce que comme je vous le dis, nous sommes tous maintenant victimes du scientisme qui consiste à croire qu'une chose est vraie ou fausse alors que dans la réalité, il y a des situations qui sont bien plus subtiles que ça, bien plus subtiles que ça et qui demandent un outil de pensée que la notion de topos donne et c'est une notion qui est délicate, qui est difficile, qui demande, pour la connaître, pour la comprendre, une connaissance mathématique. Donc ce que je dirai si vous voulez, c'est qu'il y a un magnifique boulevard qui est ouvert. Ce boulevard consiste à apprendre suffisamment de mathématiques pour après les utiliser de la bonne manière, dans d'autres domaines, mais il faut d'abord commencer par apprendre suffisamment de mathématiques, c'est ça le prix à payer, c'est absolument nécessaire d'accord.

- Moi c'était justement par rapport à la question de la vérité : à vous entendre, on a l'impression que vraiment les mathématiques, ça permettait d'atteindre cette vérité avec la physique quantique, et je voulais savoir, je crois que c'est Einstein qui disait que "le monde est un peu comme une horloge fermée", on peut juste voir ce qui se passe, mais on ne peut jamais être sûr que ce qu'on trouvera, c'est vrai. Et qu'est-ce que vous en pensez de ça, de l'idée que peut-être que tout ce qu'on explique, ce sont des théories qui sont finalement fausses comme par exemple, Einstein, qui a tout remis en cause dans la physique... ?

- Il y a toujours effectivement la possibilité d'une théorie au-dessus, qui simplifiera ce qui est à l'étage avant etc. Mais on voit quand même qu'on progresse, de ce point de vue-là. Ce que j'essayais de faire passer justement, c'est l'extraordinaire subtilité, la richesse de la nature, de là où on est, quoi. Le fait qu'à chaque fois, on aura des surprises et on aura des surprises extraordinaires. Puisqu'à la fin du XIXème siècle, il y avait des physiciens qui disaient qu'on avait tout compris. Et justement, on était avant l'ère quantique, avant tout ça, avant la relativité générale. C'est vrai, parfaitement vrai, ce que vous dites. Mais, j'insisterai plus sur la merveilleuse imagination de la nature, quoi, je veux dire, on est sûrement très, très loin, il y a peut-être des civilisations, il y a sûrement des civilisations, dans d'autres planètes habitées, dans lesquelles les gens ont été beaucoup plus loin que nous. Ca, c'est bien possible et ils nous prendraient pour des primitifs. C'est bien possible, c'est tout à fait possible.

- Vous avez dit que les mathématiques n'étaient pas dans le domaine du connu, et globalement, les sciences. Mais est-ce que vous ne pensez pas que c'est parce que les mathématiciens, les physiciens et autres, ne participent pas assez au débat, par exemple, lors de la définition de programmes scolaires, on entend des philosophes, des historiens...

- Ca, c'est vrai, il y a du vrai là-dedans, il y a du vrai. Mais d'un autre côté, c'est pas tellement le problème. Je ne dirai pas que le problème vient du fait que ce n'est pas assez vulgarisé. Je pense que le problème vient plus de la lenteur de l'absorption par l'ensemble de la société de notions élaborées. Par exemple, je prends un exemple typique, qui pour moi est important. Vous voyez, au moment où l'imprimerie a été découverte, la notion de nombre a été transmissible. C'est-à-dire, il y a eu des bouquins, etc., etc. Maintenant, on en est au point où ce n'est plus le nombre qui est transmissible, mais c'est la notion de fonction, de graphe, etc. Et il y a un vocabulaire qui est passé dans le grand public, par exemple, quand on dit qu'on va inverser la courbe du chômage *(rires)*. Alors ça, ça fait intervenir l'annulation de la dérivée seconde. Si on nous disait "on va faire annuler la dérivée seconde...", il y aurait de quoi se marrer *(rires)*. Bon, enfin, vous voyez un peu le genre... Donc c'est sûr que, si vous voulez, il y a maintenant certaines notions mathématiques, dont la notion de fonction de croissance, de décroissance, de dérivée première, d'annulation de dérivée première, etc. qui sont passées dans le grand public, d'accord, mais il y a des notions beaucoup plus subtiles, comme la notion de topos, comme les notions qui viennent du quantique etc. qui ont plus de mal à passer dans le grand public. Comment les faire passer dans le grand public ? Sans doute par l'éducation, mais à ce moment-là, il faudrait qu'on soit beaucoup plus courageux, dans le système scolaire, c'est évident, c'est absolument évident. Il faudrait qu'on ne soit pas dans le renoncement actuel qui est lamentable. Je sais qu'à mon époque, bon je veux dire, qu'on n'arrêtait pas, moi, je n'arrêtais pas et mes copains n'arrêtaient pas, de faire des problèmes de géométrie. On rentrait chez nous, et on faisait des problèmes, et c'étaient pas du tout des problèmes faciles. Et maintenant, c'est fini ! Maintenant, on apprend des recettes, on apprend à appliquer des recettes ; bien sûr, c'est beaucoup plus facile pour un prof. Un jour, quand vous aurez des enfants, vous vous apercevrez d'une chose qui est absolument fondamentale, c'est que quand vous avez un petit enfant, vous avez le choix. Le petit enfant, il essaie de faire quelque chose, vous avez deux possibilités : la première possibilité,

c'est de faire cette chose pour lui, vous croyez que vous l'aidez, en fait, vous ne l'aidez pas du tout, vous lui nuisez, en faisant ça ; la deuxième chose, c'est d'être patient, et d'attendre qu'il y arrive par lui-même. Et là, vous faites quelque chose de vraiment utile, d'accord. Donc bon, dans ce qu'on fait dans le système scolaire actuel, qui est d'apprendre des recettes toute faites pour résoudre des problèmes tout faits, ça consiste à faire les choses à la place de l'enfant. C'est exactement ça qu'on fait, c'est exactement ce truc-là. Alors que la vraie découverte du travail, la vraie découverte de l'école, elle doit se faire entre 11 et 12 ans. Et elle doit se faire en séchant devant des problèmes dont on ne nous donne pas la solution, mais dont on vous demande de la trouver, d'accord, où l'on vous demande de sécher. Et à partir du moment où à cet âge-là, on a compris ce qu'est le vrai travail, ça va, ça va, c'est OK. Et ça, ce n'est pas le cas dans le système scolaire actuel. Bien sûr, loin de là, terriblement. Bien sûr. Il y a Laurent Lafforgue qui a essayé, et de toutes ses forces, d'aller dans ce sens-là, bon, il y a dépensé énormément d'énergie ; dire qu'il y est arrivé, ce ne serait pas vrai, je vais dire, en tout cas, il y a des gens qui ont fait un effort colossal pour aller dans le bon sens, maintenant après, il y a une résistance terrible du système.

Un topo sur les topos

Alain Connes [1]

Donc j'espère que je resterai dans l'esprit du séminaire et je pense que l'esprit du séminaire, c'est Grothendieck, avant tout. Donc ce que je vais faire, c'est essayer de m'effacer le plus possible devant Grothendieck et essayer d'expliquer justement, comme je le disais dans mon abstract, le parcours qui l'a amené aux topos, et surtout, je vais essayer de vous donner une métaphore éclairante pour ce que c'est qu'un topos, et vous expliquer ce qu'il y a d'extraordinaire dans cette découverte, au sens, surtout pour les philosophes, au sens où ça introduit des nuances considérables dans la notion de vérité. J'essaierai d'expliquer cela par un exemple, parce que rien de tel qu'un bon exemple pour expliquer. Il y aura l'un de mes slides qui s'appelle "à deux pas de la vérité" et je vais vraiment vous donner un exemple d'un topos qui permet de dire qu'on est par exemple à 10 pas de la vérité, ou qu'on est à 15 pas de la vérité, etc. Donc écoutez bien. Je vous ferai entendre Grothendieck, la voix de Grothendieck, parce que Grothendieck a fait 100 heures de conférences à Buffalo en 1973, et dans ces 100 heures de conférence, il y a des choses qui nous intéressent. Bien sûr, je ne vous le ferai pas écouter longtemps mais je le ferai écouter à un moment-donné, où il explique ce que c'est qu'un faisceau à des gens qui ne connaissent pas du tout. Et il explique comment il va faire son cours sur les topos. On verra, il y aura aussi un intermède encore plus marrant à un moment-donné, on n'entendra pas la voix de Grothendieck mais on entendra la voix d'Yves Montand. Vous verrez, enfin, vous entendrez tout ça.

Donc la première image que je vous montre, c'est une image que je dois à Charles Alunni qui m'a envoyé un email un jour en me disant qu'il aurait bien voulu avoir la deuxième thèse de Grothendieck. Mais à l'époque, quand on faisait une thèse, quand j'ai fait ma thèse par exemple, il y avait toujours une deuxième thèse. Cette deuxième thèse n'était pas écrite. C'était une deuxième thèse qu'on devait défendre devant le jury. Et on avait un sujet qui nous était donné. Ce qui est assez extraordinaire, c'est que dans le cas de Grothendieck, il a fait sa thèse sur les espaces nucléaires, sur les espaces vectoriels topologiques et sur les espaces nucléaires, et il a fait une contribution fondamentale à l'analyse fonctionnelle et ce qui est extraordinaire, c'est qu'on peut penser que ce qui a fait bifurquer Grothendieck, et qui éventuellement l'a amené à l'idée du topos, à cette idée merveilleuse, c'est sa deuxième thèse. Pourquoi ? Parce que la deuxième thèse de Grothendieck, c'est écrit dans ce texte, elle est sur la théorie des faisceaux.

Et alors sur cette page, si vous êtes perspicace, vous allez trouver qu'il y a une erreur, ce qui montre qu'on n'est jamais à l'abri des erreurs. Parce qu'il y a un des examinateurs, si vous regardez bien, qui s'appelle *Georges* Choquet *(rires)* Alors j'ai cherché, pour dire peut-être que je me suis trompé, il y a 3 examinateurs, il y a Henri Cartan, il y a Laurent Schwartz et puis il y a *Georges* Choquet. Alors j'ai cherché sur wikipedia pour voir s'il n'y avait pas un mathématicien qui s'appelait Georges Choquet. En fait, non, il y a un ecclésiastique qui s'appelait Georges Choquet et qui est mort pendant la deuxième guerre mondiale. Donc il n'y a pas de problème, c'est bien une erreur, et c'est bien Gustave Choquet qui était l'examinateur de Grothendieck. Donc sa thèse il l'a passée en 53.

Et déjà en 55, il s'intéressait bien sûr aux faisceaux, qui était une découverte merveilleuse de Leray. Et donc là, j'ai commencé par quelques échanges de lettres entre Serre et Grothendieck parce que finalement, c'est dans ces échanges de lettres que l'on voit apparaître ce qu'on appelle l'article qui est tellement fameux qu'on l'appelle Le Tohoku cet article. Cet article est paru dans un journal qui s'appelle le Tohoku Maths Journal mais l'article est tellement fameux qu'en fait, on l'appelle Tohoku.

Donc voilà ce que dit Grothendieck ; il dit :

> *"Mon Cher Serre,*
> *Merci pour les divers papiers que généreusement tu m'as envoyés, ainsi que pour ta lettre. Rien de neuf de mon côté."*

Alors ça, ça justifie ce que j'ai écrit quand j'ai annoncé mon laïus :

1. Conférence d'Alain Connes, le 7 novembre 2017, dans le cadre du séminaire "Lectures grothendieckiennes" de l'ENS. Alain Connes présente la démarche intellectuelle qui a mené Alexandre Grothendieck, à partir d'une "emmerdante" rédaction qu'il devait faire pour Bourbaki sur l'algèbre homologique, à découvrir et mettre au point la notion de topos et il essaie d'expliquer en quel sens cette notion a une portée considérable grâce en particulier aux nuances qu'elle introduit entre le vrai et le faux (*organisateur du séminaire* : Frédéric Jaëck (ENS), *transcription* : Denise Vella-Chemla)

"J'ai fini mon emmerdante rédaction d'algèbre homologique."

Alors on va voir très graduellement quelle est la philosophie que Grothendieck utilise tout le temps quand il travaille, c'est-à-dire qu'il n'hésite jamais devant une tâche que n'importe quel mathématicien normal considérerait comme étant sans intérêt, rébarbative, n'allant rien lui rapporter. Donc il continue :

"... que j'ai envoyée à Delsarthe qui manquait de la rédaction pour la dactylo."

Il dit :

"Je l'ai proposée à Tannaka pour le Tohoku."

Le Tohoku, c'est le Tohoku Maths Journal.

"Il paraît que les articles-fleuve ne les rebutent pas."

Alors il est vrai que Grothendieck, en général, quand il écrit, le minimum, c'est au moins 100 pages. Ensuite, il parle de Weil. Je vais vous épargner ce qu'il en dit parce qu'il dit :

"J'ai lu au moins les énoncés des livres de Weil sur les variétés abéliennes dans l'espoir qu'on a arrangé depuis les démonstrations vraiment décourageantes chez Weil, son langage me dégoûte."...

En plus ! *(Rires)* Je passe... Il dit :

"Je passe mon temps soit à apprendre, soit à rédiger les variétés. C'est amusant mais long bien sûr, mais il n'est pas question de recherche avant d'avoir avalé une montagne de choses nouvelles."

Alors ensuite, très important, c'est sans doute la chose la plus importante dans cet échange, il dit à un moment-donné :

"Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules..."

(il faut dire qu'à l'époque, il y avait le livre de Cartan-Eilenberg qui était en gestation, Serre l'appelle le Cartan-Sammy - parce que c'est Sammy Eilenberg - et dans ce livre, il y avait bien-sûr les foncteurs dérivés mais c'était toujours appliqué à des catégories de modules. C'est-à-dire qu'on prenait la catégorie des modules sur un anneau non nécessairement commutatif et toute l'algèbre homologique était développée comme ça. Mais évidemment, elle était très analogue dans sa formulation avec ce qui se passait pour la cohomologie à coefficients dans un faisceau. Donc ce que dit Grothendieck, c'est :

"Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules, on obtient à peu de frais la cohomologie des espaces à coefficients dans un faisceau."

Il faut savoir qu'à l'époque, quand on prenait la cohomologie à coefficients dans un faisceau, c'était toujours la cohomologie de Čech. C'est à dire qu'on prenait des recouvrements de l'espace topologique, et puis on fabriquait un complexe ou un bi-complexe avec ces recouvrements et on définissait la cohomologie comme ça. Voilà.

Donc voilà ce qu'il dit, et ce point-là, dans sa correspondance, c'est un point absolument essentiel. Alors ensuite, il continue, et donc ça, c'est une lettre du 4 juin 1955, donc on est 2 ans après sa thèse, donc :

"Ci-joint le résultat de mes premières cogitations en forme, sur les fondements d'algèbre homologique."

Donc après, je ne vous détaille pas le reste puisque c'est sur des suites spectrales, etc. Mais disons que là, Grothendieck explique qu'il s'était planté sur l'existence de suffisamment de faisceaux projectifs mais à ce moment-là, il a démontré qu'il y avait suffisamment de faisceaux injectifs, et ça lui a permis de définir les foncteurs dérivés et ça lui a permis de définir si vous voulez la cohomologie à coefficients dans un faisceau sans hypothèse sur l'espace topologique. Si on a de bonnes hypothèses sur l'espace topologique,

à ce moment-là, ça coïncide avec la cohomologie de Čech. Mais ça n'est pas vrai en général. Alors voilà la réponse de Serre. Donc là, il y avait autre chose dans la correspondance, il y avait autre chose qui était ce qu'on appelle l'Im_1, c'est à dire le foncteur pour les limites projectives, comment ça commute avec la cohomologie. Mais ce qu'il faut lire, c'est le deuxième paragraphe.

"Le fait que la cohomologie d'un faisceau soit un cas particulier des foncteurs dérivés, au moins dans le cas para-compact..."

(parce que dans le cas para-compact, ça coïncide avec la cohomologie de Čech, donc celle qui est définie à partir des recouvrements)

"...n'est pas dans Cartan-Sammy."

(Cartan-Sammy, c'est Cartan-Eilenberg)

"Cartan en avait conscience."

Donc, Cartan avait conscience du fait que, quand ils avaient développé avec Eilenberg toute la théorie cohomologique sur les modules, il avait conscience bien-sûr de l'analogie avec le cas de la cohomologie des faisceaux, mais bon, ils n'avaient pas voulu s'embarrasser pour le faire dans leur livre, et Cartan en avait conscience et avait dit à Buchsbaum de s'en occuper. Donc c'est Buchsbaum en fait qui, indépendamment de Grothendieck, a aussi défini les catégories abéliennes. Il avait commencé à le développer mais il ne s'était pas occupé de la cohomologie.

"Mais il ne me semble pas que celui-ci l'ait fait. Donc l'intérêt de ceci serait de voir quelles sont au juste les propriétés des faisceaux fins qu'il faut utiliser. Ainsi on pourrait peut-être se rendre compte si oui ou non..."

(c'est Serre qui parle, bien sûr)

"... il y a suffisamment de faisceaux fins dans le cas non-séparé.".

Alors le cas non-séparé est extrêmement important bien sûr pour la géométrie algébrique et c'était à un moment où justement, Serre développait la géométrie algébrique à partir de la théorie des faisceaux de Leray en prenant au départ la topologie de Zariski et la topologie de Zariski, elle n'est pas séparée. Je veux dire, donc, on a exactement ce problème-là. Donc cet échange est extrêmement important, c'est un échange qui date de l'année 55. Et l'article de Grothendieck donc, il est marqué *Reçu* 1er *mars 1957*, donc c'est cet article *"Sur quelques points d'algèbre homologique"* qui est vraiment l'ancêtre, on peut vraiment placer si vous voulez l'origine des topos dans cet article.

La raison pour laquelle on peut placer l'origine des topos dans cet article, c'est que dans cet article, si vous voulez, d'abord, bien sûr, il introduit ce que sont les catégories abéliennes. Donc ça, c'est extrêmement important, avec toutes leurs propriétés, etc. Il développe l'algèbre homologique dans le cadre des catégories abéliennes. Donc ça, c'est ce qu'il fait, si vous voulez. Mais, ce qui est beaucoup plus important, c'est qu'il prend deux types d'exemples, dans son article, de catégories abéliennes. Le premier exemple de catégorie abélienne qu'il prend, c'est la catégorie abélienne des modules sur un anneau. Ca, ça appartient à Cartan-Eilenberg. Là-dessus, il n'y a pas de problème, mais il prend aussi l'exemple des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique, bien entendu ; là encore, pas de surprise puisque c'était pour unifier les 2 qu'il avait fait son travail de généralisation. Mais ce qui est absolument crucial, c'est qu'il avait un autre exemple en tête, un troisième exemple en tête, et c'est ce qu'il appelait les catégories de diagrammes. C'est-à-dire, ce qu'il faisait, c'était qu'il avait l'idée que si vous prenez des diagrammes de groupes abéliens, mais quels que soient les diagrammes que vous regardiez, eh bien, ça, ça forme encore une catégorie abélienne. Eh bien en fait, si on pense juste, on s'aperçoit qu'il avait là les deux piliers de la notion de topos. C'est-à-dire qu'il avait la notion d'espace topologique, qui donne la notion de faisceaux de groupes abéliens, etc., et il avait aussi la notion de catégories de diagrammes et on verra que ces catégories-là, elles donnent naissance à un topos. Et ces topos ont un rôle absolument fondamental qu'on va utiliser tout le temps, tout le temps, tout le temps.

Alors, il y a une chose qui est à remarquer : il définit ce que c'est qu'une catégorie abélienne. Donc

ce que dit Grothendieck, c'est qu'une catégorie abélienne, c'est une catégorie additive. Alors je vais vous expliquer en deux mots la misconception qu'on a sur la catégorie additive qui satisfait aux deux axiomes supplémentaires suivants : alors, il y a le fait qu'un morphisme doit avoir un noyau et un co-noyau, ça, c'est une notion abstraite, si vous ne la connaissez pas, bon, ça prendrait un certain temps, c'est un peu une gymnastique, et la deuxième condition, c'est le fait d'être un morphisme exact. C'est-à-dire le fait que si vous divisez par le noyau et si vous regardez par rapport à ce qu'on appelle l'image en la définissant par rapport au co-noyau, eh bien à ce moment-là, vous avez un isomorphisme entre le quotient par le noyau et l'image. Et ça, c'est extrêmement important, ce n'est pas vrai pour des applications dans des espaces topologiques par exemple, si vous prenez un espace de Hilbert et si vous prenez les applications linéaires continues dans l'espace de Hilbert, ça ne vérifie pas ces deux conditions. Ca n'est pas une catégorie abélienne et la raison, c'est que vous pouvez avoir un morphisme qui a une image, mais il est dense dans son image et son image n'est pas fermée et à ce moment-là, la deuxième condition AB2 n'aura pas lieu.

Alors il y a une misconception que Grothendieck reproduit quand il définit les catégories additives dans son article et qui est la chose suivante : c'est qu'en général, les gens définissent une catégorie additive en disant "une catégorie additive, c'est une catégorie où on rajoute une structure supplémentaire qui est la structure de groupe additif sur les morphismes." Eh bien, c'est une hérésie. Je vais vous expliquer pourquoi ; parce qu'en fait, ça n'est pas du tout une structure supplémentaire. Et il y a un exercice dans MacLane que je vous ai noté là qui montre que c'est une hérésie. Quelle est cette hérésie ? L'hérésie est que quand vous prenez une catégorie comme une catégorie abélienne, elle a des produits et des co-produits. Ca, c'est une chose très simple. Et elle a un objet qui est à la fois initial et final, c'est l'objet 0 ; dans les groupes abéliens, c'est le groupe qui est réduit à 0. D'accord ? C'est un objet initial parce que vous avez une seule flèche qui va de 0 vers n'importe quel groupe abélien, et c'est un objet final parce que vous avez une seule flèche qui va d'un groupe abélien vers 0. Tout s'envoie vers 0. Donc il y a un objet qui est à la fois initial et final. Eh bien, si vous avez ça, vous pouvez dire, quand la catégorie est abélienne. Comment ?

Eh bien, parce que ce qui se produit, vous avez une flèche complètement canonique, complètement naturelle, qui va du coproduit de deux objets vers le produit de deux objets. Parce qu'en utilisant le 0, vous pouvez envoyer la moitié sur 0 et l'autre moitié sur 0 et à ce moment-là, vous avez une flèche qui est complètement naturelle. Si vous demandez si cette flèche est un isomorphisme, vous avez fait la moitié du parcours. Parce que comme cela est expliqué dans ce texte de MacLane, à ce moment-là, vous avez une addition pour les morphismes. Simplement en utilisant le fait que cette flèche naturelle qui va du coproduit vers le produit est un isomorphisme. Vous avez une addition naturelle pour les morphismes et une fois que vous avez cette addition naturelle, vous pouvez prendre l'axiome supplémentaire qu'il y a un signe moins, si vous voulez, pour cette addition, bien sûr en général, vous n'aurez pas un signe moins, c'est ce qu'on appelle les catégories semi-additives, elles sont très intéressantes, mais si vous voulez une catégorie additive, vous demandez simplement qu'il y ait un inverse. Et alors, donc, ça n'est pas une structure supplémentaire. C'est une hérésie de croire qu'une catégorie additive est donnée par une catégorie + une structure supplémentaire. Ca n'est pas vrai. Donc c'est une misconception.

Alors, maintenant, je vais vous lire du Grothendieck, puisque le principe du séminaire est de s'effacer devant Grothendieck. Et même à un moment-donné, on va l'écouter. Et puis lorsqu'on aura lu et écouté suffisamment Grothendieck, là, je prendrai une métaphore, puis on verra un exemple. D'accord, donc soyez patients, je ne vais pas faire que lire ou vous faire écouter du Grothendieck, il faut être patient, mais écoutons-le quand-même. Voilà ce qu'il dit :

"Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les "espaces" et "variétés" en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace..."

Donc ce que dit Grothendieck, c'est que Leray avait envisagé un espace sous la forme des faisceaux sur cet espace, mais en fait, d'ailleurs, Leray ne considérait que les faisceaux de groupes abéliens. Et on va voir le changement que Grothendieck a apporté déjà même là.

"Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels "espaces", déjà familiers à tous. Or, il s'est avéré que cette notion d'espace est inadéquate pour rendre compte des "invariants topologiques" les plus essentiels qui expriment la "forme" des variétés algébriques "abstraites" (comme celles auxquelles s'appliquent les conjectures de Weil), voire celle des "schémas" généraux..."

Alors là, c'est le moment où je vais vous faire entendre Grothendieck. Pourquoi, parce qu'on va entendre Grothendieck qui définit ce que c'est qu'un faisceau. Donc, je pense que c'est important que vous l'écoutiez, d'accord, parce que vous ne savez pas forcément ce que c'est qu'un faisceau, on va écouter Grothendieck en parler, d'accord, et une fois qu'on aura écouté Grothendieck en parler, on reviendra à nos moutons. C'est le début de ses conférences à Buffalo.

"Topoi are the essence of general topology. A topos could be considered as the main object of study of topology. And so topoi is a generalisation of classical general topology... have some familiarity with... and on the other hand familiarity with... but in order to understand notions of topoi, one would require some familiarity with the language of sheaves on topological spaces. Now I guess that those notions..."

Voilà, je m'arrête ici, notre patience est sans doute épuisée. Mais, je vais dire qu'une des raisons pour lesquelles je vous ai fait entendre Grothendieck est assez compliquée : il faut qu'on s'habitue à cette incroyable patience qu'il a d'expliquer tous les détails, de rentrer, d'aller jusqu'au bout de tous les détails. Et ça, on le verra, je veux dire, c'est une qualité absolument essentielle dans sa démarche. Donc je continue à lire ce qu'il disait sur le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray. Grothendieck continue, il dit :

"Pour les "épousailles" attendues, "du nombre et de la grandeur", c'était comme un lit décidément étriqué, où l'un seulement des futurs conjoints (à savoir, l'épousée) pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais les deux à la fois ! "

Donc là, si vous voulez, il avait en tête effectivement toutes sortes de développements qui étaient de nature combinatoire, qui étaient reliés à la théorie des nombres, par opposition à ce qui se passait en topologie mais bon, bien sûr, il y avait le travail de Serre sur l'utilisation de la topologie de Zariski.

"C'est le point de vue des faisceaux qui a été le guide silencieux et sûr, la clef efficace (et nullement secrète), me menant sans atermoiements ni détours vers la chambre nuptiale au vaste lit conjugal. Un lit si vaste en effet (telle une vaste et paisible rivière très profonde. . .), que
"tous les chevaux du roi
y pourraient boire ensemble..." "

On y reviendra à ça.

"comme nous le dit un vieil air"

(que je vous ferai entendre tout à l'heure)

"comme nous le dit un vieil air que sûrement tu as dû chanter toi aussi, ou au moins entendre chanter. Et celui qui a été le premier à le chanter a mieux senti la beauté secrète et la force paisible du topos, qu'aucun de mes savants élèves et amis d'antan..." (rires)

Bon, il y a bien sûr dans cette phrase, le fait que nous connaissons, sans doute, beaucoup d'entre nous, qui est que le premier à dévoiler un certain paysage mathématique en a une appréhension qui est incomparable (c'est ce qui est arrivé à Galois par exemple) par rapport aux autres mathématiciens qui viennent après lui et le comprennent. Ca, c'est une chose très frappante, il dit quelque chose de plus méchant, de beaucoup plus méchant.

"La clef a été la même, tant dans l'approche initiale et provisoire (via la notion très commode, mais non intrinsèque du "site")" (dont je vous parlerai, bien sûr)

"...que dans celle du topos. C'est l'idée du topos que je voudrais essayer à présent de décrire.".

Donc laissons parler Grothendieck bien sûr.

"Considérons l'ensemble formé de tous les faisceaux sur un espace (topologique)"

Alors, à l'intention du mathématicien, à vrai dire, il s'agit ici des faisceaux d'ensembles, ça, c'est absolument fondamental, c'est un pas énorme, qu'il ait remplacé les faisceaux de groupes abéliens, qui étaient intéressants, on pensait que c'étaient les seuls intéressants, puisque ce sont les seuls qui vont donner une cohomologie, etc. Non ! Il a eu l'idée, qui paraît complètement naïve, de remplacer les faisceaux de groupes abéliens par des faisceaux d'ensembles, et on va voir la portée que ça donne.

"Je crois d'ailleurs".

(et c'est ce qu'il dit)

"être le premier à avoir travaillé systématiquement avec les faisceaux d'ensembles à partir de 1955. Quel est l'avantage de travailler avec les faisceaux d'ensembles, on va le voir, c'est que quand vous travaillez avec les faisceaux d'ensembles, vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe dans ce truc-là, vous pouvez définir ce que c'est qu'une algèbre dans ce truc-là, parce que ce que vous faites, c'est que vous travaillez comme si vous travailliez dans les ensembles mais il y a une variabilité. C'est-à-dire qu'il y a quelque-chose qui bouge, mais sinon, vous faites exactement comme si vous travailliez dans les ensembles, habituels. Donc vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe. Alors, si vous cherchez ce que c'est qu'un groupe abélien dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles, eh bien, vous trouvez les faisceaux de groupes abéliens. Donc on retombe sur ses pieds."

Ensuite ce que dit Grothendieck :

"Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, "à vue de nez"; à savoir, une structure dite de "catégorie"."

Alors bien sûr, nous, on a été éduqués, du moins à mon époque, avec la théorie des ensembles. En fait, c'était sans doute une erreur. La vraie manière de penser, c'est la théorie des catégories. Donc, il pense à cette espèce de théorie qu'il a devant les yeux comme une catégorie.

"(Que le lecteur non mathématicien ne se trouble pas, de ne pas connaître le sens technique de ce terme. Il n'en aura nul besoin pour la suite.)"

C'est-à-dire que ce qu'il faut que le lecteur non-mathématicien pense, simplement, c'est qu'il a un analogue, maintenant, de la théorie des ensembles, dans cette nouvelle catégorie, dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles. Il y a quelque chose qui ressemble à la théorie des ensembles, et on va voir que cette métaphore va très loin.

"C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace envisagé), qui sera dorénavant considérée comme "incarnant" ce qui est le plus essentiel à l'espace."

Alors on verra une métaphore, que je développerai plus loin, mais je peux déjà en dévoiler une partie. Si vous voulez, d'habitude, quand on parle d'un espace, je vais vous la montrer tout de suite parce que je ne veux pas attendre, pour cette métaphore. Voilà, la métaphore est la suivante : si vous voulez, avant Grothendieck, on avait l'habitude, quand on étudiait un espace, je ne sais pas moi, une courbe, ou n'importe quoi, on mettait l'espace... sur la scène. Et puis, on le regardait, on l'étudiait, comme un ensemble muni d'une structure, etc. Eh bien, ce que fait Grothendieck, c'est... non ! L'espace n'est pas sur la scène, l'espace, il est dans les coulisses. Sur la scène, il y a les acteurs habituels de la théorie des ensembles : les groupes abéliens, les algèbres, etc. Mais, l'espace en question, il est dans les coulisses, comme un espèce de *Deus ex machina* qui introduit une variabilité dans les personnages qui sont sur la scène. C'est-à-dire que maintenant les personnages qui sont sur la scène, ils vont dépendre d'un aléa. Cet aléa, il est gouverné par le topos. Et quand on a un topos de Grothendieck, il y a aussi les constantes, c'est-à-dire qu'il y a aussi les ensembles qui ne dépendent pas de l'aléa. Et la cohomologie, elle se définit en comparant les deux.

Donc c'est absolument fondamental que vous essayiez progressivement d'acquérir une image mentale, même si vous n'êtes pas mathématicien, pour comprendre que l'espace qui est donné par le topos, il va apparaître derrière, il est dans les coulisses, il n'est pas sur le devant de la scène, ça n'est pas lui qu'on étudie ; on étudie la théorie des ensembles, mais il y a ce bon Dieu de topos, qui est caché et qui fait tout varier, qui introduit une variabilité là-dedans, d'accord. Donc alors, c'est ce que dit Grothendieck d'une autre manière : *"ce qu'il considère comme cet ensemble ou "arsenal" comme muni de sa structure la*

plus évidente", il y pense comme à une catégorie, cette catégorie de faisceaux d'ensembles. Alors ensuite que dit-il ? *"Que c'est une chose licite d'oublier l'espace et de ne considérer que la catégorie des faisceaux d'ensembles."*

Pourquoi est-ce que c'est une chose licite ? C'est une chose licite parce qu'on n'a pas perdu l'espace en cours de route. On retrouve les points de l'espace. Alors, comment est-ce qu'on retrouve les points de l'espace dans la métaphore que je vous ai donnée ? Parce que lui dit *"c'est un simple exercice de le vérifier : une fois qu'on a posé la question."*. Bon. Effectivement, vous pouvez vous amuser, en pensant en termes classiques, si vous avez les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ordinaire, comment est-ce que vous allez retrouver l'espace lui-même, c'est-à-dire les points de l'espace ? Vous pouvez vous poser cette question. Alors en fait, dans la métaphore que je vous ai donnée, les points de l'espace, c'est quand vous prenez un instant donné, un temps figé. Quand vous prenez un temps qui est figé, eh bien à ce moment-là, il n'y a plus de variabilité, et vous avez la théorie des ensembles ordinaire. C'est ce qu'on appelle abstraitement dans la théorie des topos un point d'un topos, c'est-à-dire que c'est ainsi qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va de la théorie des ensembles ordinaire vers le topos considéré. Mais ça revient exactement à figer les choses à un instant donné.

Lui dit *"de vérifier est un simple exercice."*. En fait, ce n'est pas toujours vrai ; comme il dit *"(à l'intention du mathématicien) A strictement parler ceci n'est vrai que pour des espaces dits "sobres" "*. Il faut quand-même qu'il y ait un minimum de séparation dans l'espace. Et il y a un exemple extrêmement intéressant, que je vous invite à faire, parce qu'il faut toujours... on ne fait pas des maths en écoutant, on fait des maths en faisant des exercices. Donc il y a l'exercice déjà sur les catégories abéliennes de tout à l'heure. Et voilà un autre exercice maintenant. C'est que vous prenez une courbe avec sa topologie de Zariski. Ou vous prenez plutôt une surface avec sa topologie de Zariski. Et vous calculez les points du topos correspondant, c'est-à-dire de la topologie des faisceaux pour la topologie de Zariski. Eh bien vous allez vous apercevoir qu'il y a plus de points, parce que l'espace en question, il n'était pas sobre, et vous allez obtenir exactement les points du schéma correspondant. Donc je vais dire, déjà, dans cet exemple-là, on voit le potentiel absolument incroyable de cette manière de penser. Il dit :

"...nous pouvons désormais "oublier" l'espace initial, pour ne plus retenir et ne nous servir que de la "catégorie" associée, laquelle sera considérée comme l'incarnation la plus adéquate de la "structure topologique" (ou "spatiale") qu'il s'agit d'exprimer."

Alors ce qu'il explique après, c'est :

"Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion, (celle d'"espace"), en termes d'une autre (celle de "catégorie")."

Donc on a remplacé, toujours en suivant la métaphore, l'espace par cette catégorie, qui est une catégorie d'ensembles, ce sont des ensembles.

"A chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension."

Bien entendu.

"et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre."

"Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète")."

On dénie, a priori, à une catégorie le droit de représenter quelque-chose de continu. Or c'est le cas ici. C'est le cas parce qu'on retrouve les points et on retrouve la topologie des points, simplement à partir de la catégorie, qui *ressemble* à la catégorie des ensembles.

"Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" " (donc les catégories que l'on obtient comme catégories de faisceaux d'ensembles) *"sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière."*

"Le "miroir" dont il est question ici, comme dans Alice au pays des merveilles, est celui qui donne comme "image" d'un espace, placé devant lui, la "catégorie" associée."

Donc cette catégorie si vous voulez, c'est la catégorie de la scène derrière laquelle est le topos.

"Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, (on ne va pas en parler tout de suite) qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles." Quelle est la plus simple d'entre elles ? C'est la théorie des ensembles. Donc les catégories que vous obtenez comme ça, à partir d'un topos, sont des pastiches de la théorie des ensembles. C'est ce que dit Grothendieck.

"Ceci dit, un "espace nouveau style" (ou topos), généralisant les espaces topologiques traditionnels, sera décrit tout simplement comme une "catégorie" qui, sans provenir forcément d'un espace ordinaire, possède néanmoins toutes ces bonnes propriétés." Donc on les appelle topos, alors il va le dire d'ailleurs, attendez, il faut que je le trouve...

"Le nom "topos" a été choisi (en association avec celui de "topologie", ou "topologique") pour suggérer qu'il s'agit de "l'objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique. Par le riche nuage d'images mentales que ce nom suscite, il faut le considérer comme étant plus ou moins l'équivalent du terme "espace" (topologique), avec simplement une insistance plus grande sur la spécificité "topologique" de la notion. Ainsi..." Bon, il parle des espaces vectoriels, etc. Donc je reviens en arrière.

"Voici donc l'idée nouvelle. Son apparition peut être vue comme une conséquence de cette observation, quasiment enfantine à vrai dire, que ce qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses "points" ou ses sous-ensembles de points, et les relations de proximité etc. entre ceux-ci, mais que ce sont les faisceaux sur cet espace, et la catégorie qu'ils forment. Je n'ai fait, en somme, que mener vers sa conséquence ultime l'idée initiale de Leray - et ceci fait, ***franchir le pas****. Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d' "évidence", par sa simplicité."*

En fait, on sait quand on fait des maths, quand on est sur la bonne voie, quand quelqu'un vous dit *"Oh, ce n'est que ça !". (rires)*

Voilà ce que dit Grothendieck, donc :

"...par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : "Oh, ce n'est que ça !", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. A ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance..."

Donc là, il revient à la notion de schéma :

"Elle constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, une métamorphose de la notion d'espace."

Si vous voulez, ce qui est absolument extraordinaire, au départ, même, dans la notion de topos, c'est la manière dont l'espace est appréhendé. Comme je le disais, il n'est plus appréhendé par les points, il est appréhendé par l'aléa qu'il introduit : il introduit un aléa dans la théorie des ensembles ; il introduit une variabilité dans la théorie des ensembles. Et ça, c'est extraordinaire.

"Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au delà de celle-ci, de la géométrie. Dès à présent d'ailleurs, elle a joué un rôle crucial dans l'essor de la géométrie nouvelle."

Ca, c'est pour la cohomologie l-adique, ou pour la cohomologie cristalline.

"Comme sa sœur aînée (et quasi-jumelle)[2]*, elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici."*

Primo, il ne faut pas que cette notion soit trop vaste, je passe assez vite là-dessus ; il parle des topos, on en a parlé ; il faut que "les constructions géométriques les plus essentielles" s'appliquent bien entendu, qu'elles "puissent se transposer de façon plus ou moins évidente." Il ne faut pas qu'elle soit trop générale, il ne faut pas que la notion que vous preniez soit, par exemple, la notion générale de catégorie. Si c'était la notion générale de catégorie, on n'irait pas loin. Donc il faut qu'elle ait cette propriété.

Il explique : *"Parmi ces "constructions", il y a notamment celle de tous les "invariants topologiques" familiers."*

Il explique très bien : *"Pour ces derniers, j'avais fait tout ce qu'il fallait dans l'article déjà cité de "Tohoku" (1955)."*

Donc l'origine, vous voyez, elle vient de là. Comme je le disais tout à l'heure, dans l'article de Tohoku, il y avait à la fois les faisceaux sur un espace topologique et il y avait aussi, et c'était extrêmement important, les catégories de diagrammes, il parlait des catégories de diagrammes et on va voir qu'elles jouent un rôle absolument essentiel, de la même manière. Donc il parle des associations mentales, et de notions moins techniques, bien sûr.

"Secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique" - aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires."

Comme on le verra dans un exemple que je vous donnerai dans relativement peu de temps, comme on le verra, ce qui se produit dans la métaphore dont je vous parlais, ce qui va se produire, c'est que comme il y a cet aléa, comme il y a cette variabilité dans la théorie des ensembles, on ne peut plus appliquer le principe du tiers-exclus. Par contre, l'intuitionnisme marche. Et donc, ce que ça va engendrer, cette nuance, c'est pour ça que je veux vous y amener pas à pas, on est lent, mais il faut que nous soyons lents, donc je vous montrerai un exemple, comme je l'ai dit au début, dans lequel la notion de vérité associée au topos sera beaucoup plus subtile que la notion de vérité ordinaire, et j'aurai un transparent, sur lequel il y aura marqué "à deux pas de la vérité" et je vous donnerai un topos dans lequel on sera "à 10 pas de la vérité", "à 15 pas de la vérité", "à 20 pas de la vérité", etc. On prendra un exemple parce que tant qu'on n'a pas pris un exemple, tant qu'on parle abstraitement, on ne sait pas trop ce qu'on fait. Donc on se dirige vers là.

"La chose cruciale ici, dans l'optique des conjectures de Weil, c'est que la nouvelle notion est assez vaste en effet, pour nous permettre d'associer à tout "schéma" un tel "espace généralisé" ou "topos" (appelé le "topos étale" au schéma envisagé). Certains "invariants cohomologiques" de ce topos (tout ce qu'il y a de "bébêtes"!) semblaient alors avoir une bonne chance de fournir "ce dont on avait besoin" "

Il continue et on se relaxe un peu avant de venir aux exemples et aux choses vraiment cruciales.

"C'est dans ces pages que je suis en train d'écrire que, pour la première fois dans ma vie de mathématicien, je prends le loisir d'évoquer (ne serait-ce qu'à moi-même) l'ensemble des maître-thèmes et des grandes idées directrices dans mon œuvre mathématique. Cela m'amène à mieux apprécier la place et la portée de chacun de ces thèmes, et des "points de vue" qu'ils incarnent, dans la grande vision géométrique qui les unit et dont ils sont issus. C'est par ce travail que sont apparues en pleine lumière les deux idées novatrices névralgiques dans le premier et puissant essor de la géométrie nouvelle : l'idée des schémas, et celle des topos."

Et là, il insiste :

"C'est la deuxième de ces idées, celle des topos, qui à présent m'apparaît comme la plus profonde des deux. Si d'aventure, vers la fin des années cinquante..."

2. la théorie des schémas

Donc Grothendieck a introduit les topos dans une période un peu dépressive qu'il avait eue après la mort de sa mère en 1957, il a introduit les topos en 58. Donc on sera, l'année qui vient, au 60ème anniversaire de la naissance des topos.

"Si d'aventure, vers la fin des années cinquante, je n'avais pas retroussé mes manches, pour développer obstinément jour après jour,"

Ca, c'est Grothendieck : "Obstinément, jour après jour..."

"tout au long de douze longues années, un "outil schématique" d'une délicatesse et d'une puissance parfaites - il me semblerait quasiment impensable pourtant que dans les dix ou vingt ans déjà qui ont suivi, d'autres que moi auraient pu à la longue s'empêcher d'introduire à la fin des fins (fut-ce à leur corps défendant) la notion qui visiblement s'imposait, et de dresser tant bien que mal tout au moins quelques vétustes baraquements en "préfab", à défaut des spacieuses et confortables demeures[3] *que j'ai eu à cœur d'assembler pierre par pierre et de monter de mes mains."*

Là, il parle des schémas.

"Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des "sites"). Et, à supposer même cette idée-là déjà gracieusement fournie, et avec elle la timide promesse qu'elle semblait receler..."

Vous savez, quelqu'un vous dirait : "Je vais faire ça...". "Bonne chance !", vous diriez ! D'accord... *(rires*[4]

"...je ne vois personne d'autre, que ce soit parmi mes amis d'antan ou parmi mes élèves, qui aurait eu le souffle, et surtout la foi, pour mener à terme cette humble idée (si dérisoire en apparence..."

Qu'est-ce que c'est que de s'évertuer sur les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ?...

"...(si dérisoire en apparence alors que le but semblait infiniment lointain...) : depuis ses premiers débuts balbutiants, jusqu'à la pleine maturité de la "maîtrise de la cohomologie étale", en quoi elle a fini par s'incarner entre mes mains, au cours des années qui ont suivi."

Bon après, il parle de détails, enfin, de choses qui sont importantes pour le mathématicien, mais il parle de la cohomologie étale et c'est à ce propos, comme il le dit :

"C'est inspiré par ce propos que j'avais découvert la notion de site en 1958." Donc, il a découvert la notion de site en 1958, et c'est cette notion, bien sûr, et le formalisme cohomologique, qui ont été développés plus tard.

Il dit :

"Quand je parle de "souffle" et de "foi"," (ça, c'est toujours pour le mathématicien), *"il s'agit là des qualités de nature "non-techniques" "*

Grothendieck a écrit quelque-part dans Récoltes et Semailles qu'il n'était pas rapide, qu'il était entouré de gens beaucoup plus rapides que lui, mais bon, c'est un exemple qui montre à quel point, il ne faut pas se décourager, quand on n'est pas rapide, bon quand on parle avec des gens dont on s'aperçoit qu'ils comprennent dix fois plus vite que vous, il ne faut pas se décourager. Par contre, ce qui est absolument crucial, c'est d'être persévérant, et d'avoir la foi dans une idée.

C'est-à-dire si vous avez une idée, il faut d'abord que vous vous l'appropriez, que vous la fassiez vôtre. Et une fois qu'elle est vôtre, il faut la protéger ;au départ, il faut la protéger comme un tout petit enfant qui vient de naître. Il ne faut pas trop la montrer, pas trop, etc. *(petits rires)* Et puis après... Pas tellement parce que quelqu'un peut vous la prendre mais parce qu'il faut que vous la testiez, on va en parler plus

3. adresse de l'orateur au public : "là, il parle des schémas"
4. pour souligner l'ironie de l'euphémisme du Bonne chance par rapport à l'ampleur de la tâche que cela représente.)

tard, il faut que vous la testiez, il faut que vous vous habituiez à elle, en privé.

"A un autre niveau, je pourrais y ajouter aussi ce que j'appellerais le "flair cohomologique", c'est-à-dire le genre de flair qui s'était développé en moi pour l'édification des théories cohomologiques."

Après, il râle un peu contre ses élèves, mais ça, on en a l'habitude avec Grothendieck.

On va faire une petite pause : on ne va pas s'arrêter mais je vais vous faire écouter Yves Montand *(rires)*.

"Oui, la rivière est profonde, et vastes et paisibles sont les eaux de mon enfance, dans un royaume que j'ai crû quitter il y a longtemps. Tous les chevaux du roi y pourraient boire ensemble à l'aise et tout leur saoul, sans les épuiser ! Elles viennent des glaciers, ardentes comme ces neiges lointaines, et elles ont la douceur de la glaise des plaines. Je viens de parler d'un de ces chevaux, qu'un enfant avait amené boire et qui a bu son content, longuement. Et j'en ai vu un autre venant boire un moment, sur les traces du même gamin si ça se trouve -mais là ça n'a pas traîné. Quelqu'un a dû le chasser. Et c'est tout, autant dire."

La fille qui a tant d'amoureux qu'elle ne sait lequel prendre et qui a choisi son petit cordonnier...

Voilà, on revient aux choses sérieuses.

Alors, il continue, il dit :

"Je vois pourtant des troupeaux innombrables de chevaux assoiffés qui errent dans la plaine - et pas plus tard que ce matin même leurs hennissements m'ont tiré du lit, à une heure indue, moi qui vais sur mes soixante ans et qui aime la tranquillité. Il n'y a rien eu à faire, il a fallu que je me lève. Ca me fait peine de les voir, à l'état de rosses efflanquées, alors que la bonne eau pourtant ne manque pas, ni les verts pâturages. Mais on dirait qu'un sortilège malveillant a été jeté sur cette contrée que j'avais connue accueillante, et condamné l'accès à ces eaux généreuses. Ou peut-être est-ce un coup monté par les maquignons du pays, pour faire tomber les prix qui sait ? Ou c'est un pays peut-être où il n'y a plus d'enfants pour mener boire les chevaux, et où les chevaux ont soif, faute d'un gamin qui retrouve le chemin qui mène à la rivière..."

Alors, avec Pierre Cartier et Olivia Caramello, on a organisé un colloque, il y a de ça deux ans, à l'IHES, justement pour raviver l'idée des topos, mais vraiment des topos de Grothendieck, et le colloque a été remarquable, ça s'est très très bien passé.

Alors qu'est-ce qu'un topos de Grothendieck ? Donc maintenant on revient aux mathématiques. Donc il y a trois manières de les définir : c'est sans doute la première manière qui est la plus simple. Alors, si vous voulez, comme Grothendieck l'expliquait quand il fait son cours, la chose importante, au départ, c'étaient des pré-faisceaux, c'est-à-dire c'étaient des foncteurs contravariants qui allaient de la catégorie des ouverts, mais c'est une catégorie extrêmement simple, hein. Je veux dire c'est une catégorie pour laquelle entre deux objets, il y a au plus un morphisme donc c'est vraiment quelque-chose d'extrêmement simple. Donc on regardait les foncteurs contravariants qui allaient de cette catégorie vers les ensembles. Alors maintenant, on enlève toutes les conditions sur cette catégorie, sauf que c'était une petite catégorie. Qu'est-ce que ça veut dire une petite catégorie ? Ca veut dire que les objets forment un ensemble. Et puis les morphismes aussi bien entendu. Donc on regarde une petite catégorie et on regarde tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles. On oublie le fait qu'on avait les ouverts et qu'on avait une catégorie extrêmement particulière en regardant les ouverts. D'accord, on prend n'importe laquelle. Et alors maintenant, ce qu'on demande, bien sûr, on ne va pas prendre tous les foncteurs contravariants, puisqu'on sait bien, et Grothendieck l'expliquait dans ce qu'on a écouté, qu'on ne va pas prendre tous les pré-faisceaux. Parmi ces pré-faisceaux, on va en sélectionner qu'on va appeler des faisceaux. Quelle est la propriété importante de cette sélection ? Il y a deux choses qui sont très importantes dans cette sélection : la première, c'est qu'on ne va pas changer les morphismes ; la première chose qui est fondamentale, c'est que quand vous prenez un morphisme d'un faisceau vers un autre faisceau, en fait, vous pouvez oublier que ce sont des faisceaux. C'est un morphisme de pré-faisceaux, d'accord. Donc en fait, quand on va sélectionner la sous-catégorie de la catégorie des pré-faisceaux, on va prendre une sous-catégorie pleine. Sous-catégorie pleine, ça veut dire qu'on ne va pas changer la notion de morphisme. D'accord, c'est crucial, ça, si vous écoutiez Grothendieck plus loin, il en parle et il dit bien que c'est crucial. Donc première chose. Deuxième chose, qui est extrêmement importante, c'est qu'il y a un moyen, lorsque

vous avez un pré-faisceau de le faisceautiser, de le transformer en un faisceau. Donc ça veut dire que les faisceaux sont des pré-faisceaux particuliers, mais il y a une espèce de projection qui vous permet de remplacer un pré-faisceau par un faisceau. Alors quelle est la manière de le dire qui est correcte : c'est que le foncteur qui inclut la catégorie des faisceaux dans la catégorie des pré-faisceaux, bon d'abord il est plein, il est fidèle, parce qu'on n'oublie rien, mais surtout, il a un adjoint à gauche, qui est la faisceautisation, et par miracle, cette action à gauche, il est exact à gauche, ce qui n'est normalement jamais le cas pour un adjoint à gauche. Normalement, un adjoint à gauche, on sait que dans tous les cas, il va préserver ce qui s'appelle les colimites, mais c'est très rare qu'il préserve les limites. Eh bien là, ça préserve les limites. Donc c'est ça la condition. Donc si vous voulez une définition courte de ce que c'est qu'un topos, c'est ça.

Alors maintenant ce qu'on va voir, et puis on va voir ce que c'est qu'un site, il y a une autre manière de le dire qui est plus précise : c'est qu'en fait, on sait que toute faisceautisation, comme celle dont je vous parlais, en fait, elle provient de ce qu'on appelle une topologie de Grothendieck sur la petite catégorie dont on est parti. Alors on va voir ce que c'est. Et puis en fait, il y a une troisième définition de ce que c'est qu'un topos. Mais alors ça, c'est vraiment une définition, comment dire, très abstraite mais c'est une définition qui énonce des propriétés qui sont vraies pour la théorie des ensembles, d'accord. Et on demande que le topos les vérifie aussi. Alors ça, ça a engendré une autre théorie des topos, qu'on appelle la théorie des topos élémentaires, qui ne sont pas des topos de Grothendieck en général. Mais alors, qu'est-ce qu'il manque à un topos élémentaire, donc un topos qui vérifie des propriétés naïves de théorie des ensembles, pour être un topos de Grothendieck ? Ce qui lui manque, ce sont les constantes. C'est-à-dire que tout à l'heure, dans la métaphore, je vous disais qu'on a des ensembles variables, qui dépendent d'un aléa. Eh bien, quand on a un topos de Grothendieck, il y a ce qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va du topos vers le topos des ensembles, et ça permet de parler des constantes. Or parler des constantes, lorsqu'on fait de la cohomologie par exemple, c'est absolument essentiel. Parce que ce sont les constantes qui permettent par exemple de définir les sections globales d'un faisceau, etc., etc. Donc c'est pas du tout innocent, et il y a une différence très grande entre un topos de Grothendieck et ce qu'on appelle un topos élémentaire qui rassemblerait des propriétés élémentaires de la théorie des ensembles.

Alors les exemples. Bon alors parmi les exemples, il y a bien sûr l'exemple des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. C'est le premier exemple. Le deuxième exemple, j'en ai déjà parlé, ce sont les faisceaux pour la topologie de Zariski, donc c'est un cas particulier des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. Mais comme je le disais, l'intérêt, c'est que quand on cherche les points, pour ce topos-là, on trouve les bons points du schéma, d'accord. Et enfin, il y a un troisième exemple, qui est ce que Grothendieck a introduit en 58 pour avoir la cohomologie étale, c'est-à-dire qu'on part d'un schéma, et il y a un topos qui est associé au schéma, mais ça n'est plus un topos qui provient d'une topologie sur le schéma. Donc c'est quelque-chose qui est au-dessus et qui, bon, bien sûr, là, c'est déjà un topos au sens original si vous voulez, qui est en dehors des espaces topologiques.

Donc je reviens à Grothendieck, il dit :

Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas - mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques. Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas.

Il y a une espèce de malédiction sur les topos. Il y a une malédiction qui règne, on y reviendra peut-être si on a le temps. Alors voilà la métaphore. Donc la métaphore dont je vous parlais tout à l'heure. Il faut absolument que vous ayez une image mentale de ce que c'est qu'un topos. Donc on avait l'habitude, comme je le disais, de mettre l'espace à étudier sur le devant de la scène. Ce que fait Grothendieck, c'est de lui faire jouer ce rôle de Deus ex machina, qui n'est pas présent, qui reste dans les coulisses. Mais ce qui est important, c'est de savoir que, quand vous avez un topos, vous pouvez faire toutes les manipulations, vous pouvez parler de groupes abéliens, vous pouvez parler d'algèbres, etc., et si vous travaillez avec un topos provenant d'un espace topologique, ça vous donnerait les faisceaux de groupes abéliens, ou les faisceaux

d'algèbres, etc., c'est formidable, c'est formidable d'avoir cette liberté de manœuvre. Bon, alors, lorsqu'on travaille dans un topos, tout se passe comme si on manipulait des ensembles ordinaires. Donc c'est ça qu'il faut savoir. En fait, dès qu'on fait des fibrés vous savez sur un espace, on prend l'habitude de penser à un fibré comme à un espace vectoriel variable. Mais là, la variabilité, c'est la **bonne** notion de variabilité, parce que ça paramétrise les ensembles. Sauf que l'on ne peut plus appliquer la règle du tiers-exlus. Donc ce qui apparaît si vous voulez, c'est qu'on ne peut plus, pour une proposition dire la proposition p est vraie, ou la proposition *non* p est vraie, on n'a plus le tiers-exclus. Alors on va très vite voir un exemple concret d'un topos pour lequel cette notion de vérité devient plus subtile que le simple vrai ou faux que nous utilisons familièrement. Par exemple, si vous voulez, si vous regardez la télévision, et vous regardez une discussion politique à la télévision ; eh bien, nous avons l'habitude de dire "celui-là a raison et celui-là a tort". Eh bien, je prétends qu'on n'a pas l'outil conceptuel qu'il faut pour juger. Et je vais vous donner des exemples. Je vais vous montrer à quel point la notion de vérité est une notion beaucoup plus subtile et à quel point l'idée du topos permet de la formaliser. Donc on va faire marcher ça sur un exemple. Pour faire marcher ça, on va introduire des topos qui sont autres que les topos qui viennent d'un espace topologique et qui ont une nature extrêmement simple : ce sont les topos qui consistent à prendre une petite catégorie et à prendre simplement la catégorie de tous les foncteurs contravariants vers les ensembles. Donc là, on ne fait pas de distinction entre faisceaux et pré-faisceaux. On prend tous les pré-faisceaux. On dit que ce sont tous des faisceaux. Donc à une petite catégorie, on va associer un topos qui est son espèce de dual, si vous voulez, qui est tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, et on va s'amuser avec ça.

Alors en 91, Grothendieck était encore parfaitement en contact avec certains mathématiciens, et voilà ce qu'il écrivait, c'est dans une lettre à Thomasson, il dit :

"D'autre part pour moi, le paradis originel pour l'algèbre topologique n'est nullement la catégorie simpliciale..." donc, je ne sais pas si on aura le temps d'en parler, mais il parle des topos.

"En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $\hat{C}$, avec C une petite catégorie, sont de loin les plus simples des topos connus." Et c'est pour l'avoir senti qu'il insiste tant sur ces topos catégoriques dans SGA4. Donc si vous regardez SGA4, vous verrez qu'il y a deux exemples fondamentaux de topos ; bien sûr, il y a le topos étale, et puis il y a les topos qui sont duaux d'une catégorie. D'accord. Alors on va s'amuser avec ça.

Alors quelle est la notion de vérité dans un topos ? *(rires)* En quel sens la notion de vérité est différente dans un topos ? Alors, en quel sens d'abord, est-ce qu'on est capable, dans les ensembles, de définir le vrai et le faux ? Alors, comment va-t-on définir le vrai et le faux dans la théorie des ensembles ? On va s'intéresser à essayer de classifier les sous-ensembles d'un ensemble, d'accord. Vous voyez, si vous travaillez avec les ensembles ordinaires, et si je vous dis "j'ai un foncteur qui, si vous me donnez un ensemble, lui associe tous ses sous-ensembles.". C'est un foncteur parce que si vous avez une application qui va de X dans Y, vous pouvez rappeler en arrière les sous-ensembles de Y, donc c'est un foncteur. Alors maintenant, la question, c'est "est-ce que ce foncteur est représentable ?". C'est une notion mathématique, d'accord, et alors dans les ensembles, il est représentable à cause d'une notion que nous, nous connaissons très très bien : c'est qu'à un sous-ensemble, on associe ce qu'on appelle sa fonction caractéristique. C'est-à-dire quand on a un sous-ensemble d'un ensemble, on définit une fonction : cette fonction, elle vaut 1 si on est dans le sous-ensemble, et elle vaut 0 si on n'est pas dans le sous-ensemble. Alors cette fonction, il se fait qu'elle a une propriété assez miraculeuse : c'est qu'elle classifie, c'est-à-dire qu'elle représente ce foncteur. Dans le cas des ensembles, il y a un objet privilégié Ω qui est l'objet qui est formé de l'ensemble $\{0,1\}$, l'ensemble à deux points, et quand vous regardez tous les sous-ensembles d'un ensemble, ça revient à regarder toutes les applications de cet ensemble vers l'ensemble $\{0,1\}$. Puisque quand vous avez une application qui va vers l'ensemble $\{0,1\}$, le sous-ensemble, il est défini par le sous-ensemble sur lequel elle prend la valeur 1. Mais là où elle ne prend pas la valeur 1, eh bien, elle prend forcément la valeur 0. Eh bien, si on réfléchit suffisamment, en logique, en pensant dans le langage des topos, on s'aperçoit que c'est ce simple fait qu'il n'y avait que 0 et 1 dans les ensembles qui permet d'avoir le principe du tiers-exclus.

Donc maintenant on va s'amuser avec un topos qui est un tout petit peu plus compliqué. On va prendre, alors, c'est ce que j'appelle "à deux pas de la vérité". Alors, qu'est-ce qu'on va prendre comme topos ? On va prendre la catégorie C qui n'a qu'un seul objet, et qui a pour morphisme les puissances d'un seul morphisme. C'est-à-dire que je choisis un seul morphisme qui va de cet objet dans lui-même et je l'élève à des puissances, d'accord, T^n. Alors qu'est-ce que ça veut dire, un objet de la catégorie des foncteurs

contravariants de cette catégorie vers les ensembles ? Ca veut simplement dire un ensemble avec une application de X dans X. C'est tout. Pourquoi vous n'avez qu'un seul ensemble ? Parce que la catégorie n'avait qu'un objet. Donc vous n'avez qu'un ensemble. Et en fait, la catégorie, elle n'avait qu'un seul morphisme, bon, on l'élève à ses puissances, mais, je veux dire... il suffit de le connaître, il suffit de connaître son image. Qu'est-ce que c'est que son image ? C'est une transformation T de X dans X. Quel est le topos ? Eh bien, ce sont les ensembles munis d'une transformation. Bon eh bien, les ensembles munis d'une transformation, ça fait un topos. C'est une catégorie, d'accord. Comment est-ce une catégorie ? C'est une catégorie parce que si vous avez deux ensembles avec une transformation, vous avez les applications de X dans Y qui respectent la transformation. C'est à dire qu'ils vérifient que l'image de TX ($f(TX)$), c'est $Tf(x)$. Donc vous avez une catégorie, et cette catégorie, c'est un topos. Pourquoi c'est un topos ? Parce que c'est le dual d'une petite catégorie que je vous ai donnée.

Bon alors maintenant, on va chercher Ω, pour ça. Donc on va chercher à classifier les sous-objets d'un objet. Alors, pourquoi est-ce embêtant, d'essayer de classifier les sous-objets d'un objet ? Eh bien, on va essayer avec $0, 1$. On va essayer avec la fonction caractéristique, comme on faisait tout à l'heure. Après tout, si je prends un ensemble avec une application, si je prends un sous-objet, c'est un sous-ensemble qui est stable par l'application, d'accord. Donc si je prends mon X, je vais prendre un sous-ensemble Y qui était invariant, qui était invariant par l'application T. Bon. Très bien. Il est invariant par l'application T. Donc je vais associer la valeur 1 sur ce sous-ensemble, d'accord. Sur le sous-ensemble, je vais donner 1. Pourquoi est-ce que je ne peux pas donner la valeur 0, sur le complémentaire ? Eh bien parce qu'il peut y avoir des points du complémentaire qui vont finir par atterrir dans l'ensemble en question. Je ne suis pas du tout assuré que le complémentaire va être invariant par T. Il peut très bien se produire qu'un point du complémentaire, au bout d'un moment, tac !, il va taper dans le sous-ensemble en question. C'est pas parce que le sous-ensemble en question est invariant que son complémentaire est invariant. Bien sûr que non ! La transformation, je n'ai pas pris une action de Z, j'ai pris une action de N. Alors comment on va faire ? C'est embêtant ! Ca veut dire que l'application qui allait vers 0 et 1, elle ne marche pas, elle ne marche pas. Bon ! Eh bien, il faut se creuser la tête un petit peu. Qu'est-ce qu'il faut faire ? Eh bien, quand je prends un x qui est dans X, il va exister un plus petit entier, un premier entier, tel que quand j'applique T n fois, ça tape dans le sous-ensemble. D'accord. Donc je vais lui associer cet entier. Cet entier, il sera l'infini, bien sûr, si jamais on arrive dans le sous-ensemble.

Donc on voit qu'il faut remplacer l'ensemble $\{0, 1\}$ par l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$. Et comment va-t-on faire de cet ensemble un ensemble muni d'une transformation ? Eh bien, on s'aperçoit que si je regarde le h, c'est-à-dire le plus petit entier pour TX, eh bien le plus petit entier pour TX, ça va être le plus petit entier pour X moins 1 sauf si ça devient négatif ; si ça devient négatif, ça ne marche pas ; donc je prends le *sup* avec 0. D'accord.

Donc vous voyez que pour ce topos, alors la notion de vérité qui avant était simplement 0 ou 1, maintenant, elle est donnée par l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$, avec la transformation qui remplace par $N - 1$. Alors qu'est-ce que ça veut dire ? Eh bien, ça veut dire qu'on a un exemple incroyablement simple d'un topos qui permet de dire "Ouais, ce que tu fais, ouais, euh, je dirais, euh, c'est à 10 pas de la vérité...". Moi, j'ai toujours dit que les gens qui font de la théorie des cordes, c'est à une infinité de pas de la vérité. *(rires)*

Donc vous voyez que cette notion, pour innocente qu'elle soit, pour bêbête qu'elle ait l'air, en fait, elle a un potentiel d'une richesse absolue. Et ce que je prétends, c'est que notre esprit, notre formation logique, est extrêmement primitive parce que nous avons l'habitude, lorsque nous écoutons une discussion politique de décréter "oui ou non", "telle personne a raison, telle personne a tort" et on est dans l'erreur en faisant cela et s'il y avait des philosophes, bon, je rêve hein, s'il y avait des philosophes connaissant les maths, et qui comprennent les topos de l'intérieur, et il y en a très peu, qui comprennent les topos de l'intérieur, ils seraient capables de donner des modèles, qui seraient utiles, pour beaucoup mieux apprécier ce genre de discussions, ce genre de situations, qui sont en fait beaucoup plus subtiles par rapport à la notion de vérité, que cette notion d'une inefficacité absolue, que nous utilisons tout le temps, et qui est "un tel a raison ou un tel a tort.". Donc, je voulais absolument vous donner cet exemple pour que vous le gardiez en tête, et que vous essayiez de construire d'autres exemples semblables ; il y a des exemples finis bien entendu, ne soyez pas effrayés par le fait qu'il y a des n qui vont de 0 à l'infini, en fait, vous pouvez très bien imaginer des constructions finies, d'accord. Les constructions finies, il y a une richesse combinatoire dans les topos qui fait que les constructions finies ont un potentiel extraordinaire.

Alors qu'est-ce qu'un crible ? Cet exemple va nous permettre de définir ce que c'est qu'un crible. Qu'est-

ce que c'est qu'un crible ? Je vous ai donné un exemple de crible. Le Ω en général, quand vous prenez la catégorie, qui est donnée par, euh le topos pardon, qui est donné par tous les foncteurs contravariants d'une petite catégorie vers les ensembles, eh bien on construit le Ω et comment est construit le Ω ? Le Ω, il est construit à partir d'un crible. Alors qu'est-ce qu'un crible ? Eh bien un crible sur un objet d'une catégorie, le Ω va être construit à partir des objets de cette catégorie, rappelons-nous que la catégorie dont j'ai parlé tout à l'heure, elle n'avait qu'un seul objet. Donc pour le moment, on n'a rien. On a un seul objet. Alors, un crible sur un objet X, sur notre objet $\star$, c'est la donnée d'une famille de morphismes $C(x)$ qui est contenue dans tous les morphismes dont l'image est X... enfin, ça va d'un ensemble Z vers X, dont le codomaine est X, et qui est stable par composition à droite.

Quels sont les cribles, dans l'exemple de tout à l'heure ? On avait un seul objet ; les morphismes qui allaient dans cet objet, c'étaient simplement les entiers, puisque c'étaient les puissances de T, il y avait $T^0, T^1, T^2, \ldots$. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Eh bien, un crible, c'est un espèce d'idéal si vous voulez, c'est-à-dire que c'est une famille de morphismes qui est stable par composition à droite, par n'importe quel morphisme. Donc dans le cas de tout à l'heure, qu'est-ce que c'est que la composition à droite ? Ca rajoute à un entier, eh bien, ça lui rajoute n'importe quel entier. Ca revient à regarder tous les intervalles infinis d'un côté. Alors, parmi les intervalles infinis, vous avez quoi, vous avez 0, jusqu'à l'infini, ça, c'est ce qu'on appelle... enfin, c'est un crible qui doit être toujours présent ; c'est le crible qui est formé de tous les morphismes. Et puis ensuite, on avait tous les morphismes qui étaient à partir d'un certain entier n. Ca, c'était un crible, d'accord, et c'était quand on était à distance n. Et puis, il y a le crible où il n'y en a aucun, c'est l'ensemble vide, et ça, ça correspondait à l'infini tout à l'heure. Voilà.

Alors il se fait que donc en général, on peut définir le Ω, les valeurs de vérité si vous voulez, pour le dual d'une petite catégorie, et on le définit exactement à partir des cribles. Quand on calcule Ω donc, on construit cet objet, simplement comme toujours comme un foncteur contravariant d'un ensemble etc., mais on le construit à partir des cribles sur chacun des objets de la catégorie. Dans notre cas, il y avait un seul objet donc c'était très simple. C'était très très simple.

Alors moi j'ai été longtemps fasciné par l'idée que Grothendieck avait appelé crible et qu'il n'ignorait pas que ce nom avait déjà été utilisé par les mathématiciens, et qu'il y a par exemple un crible qui est bien connu et qui est le crible d'Eratosthène. Alors j'ai finalement trouvé la réponse, j'ai finalement trouvé pourquoi le crible d'Eratosthène est un crible, au sens de Grothendieck et ça, ça vient d'un travail en commun qu'on a fait avec Katia Consani et dans lequel la catégorie qu'on prend, elle est très semblable à celle de tout à l'heure, où il y avait une seule transformation, mais cette fois, elle est un peu plus compliquée quand-même, parce que, au lieu d'avoir (on a toujours un seul objet, comme avant), mais au lieu d'avoir les puissances d'un seul morphisme, on a une action des entiers multiplicatifs. C'est-à-dire que pour chaque entier, on a un morphisme, et quand on fait le produit de deux entiers, les morphismes se composent. Alors c'est un exercice de démontrer que le crible d'Eratosthène est un crible de la manière suivante : c'est très amusant. Parce que... qu'est-ce que c'est que le crible d'Eratosthène ? Le crible d'Eratosthène, ça consiste à prendre le premier nombre non trivial. On va foutre en l'air 1, hein, on s'en fout de 1, d'accord. Donc on prend le premier nombre non trivial qui est 2. Et que fait le crible ? Le crible considère tous les multiples de 2, tous les nombres pairs, sauf 2. Et puis après, il reste des choses, bon. Il reste 3 par exemple, alors il prend tous les multiples de 3 sauf 3. Et puis il reste des choses, 4 on l'a déjà pris puisque... Donc il prend tous les multiples de 5 sauf 5. Eh bien, je prétends que si vous regardez les entiers comme les morphismes, les entiers multiplicatifs, comme les morphismes d'une catégorie qui n'a qu'un seul objet, et si vous regardez tout ce que je viens de vous dire, c'est-à-dire si vous regardez tous les entiers pairs sauf 2, tous les multiples de 3 sauf 3, etc., ça, ça fait un crible au sens que je vous ai donné tout à l'heure. Et ça vous montre à quel point la notion de vérité est subtile pour cette catégorie-là, parce que ça, je vous ai donné seulement **un** exemple de crible. Vérifier que c'est un crible, c'est trivial, c'est pas la question, c'est pas la difficulté.

Alors maintenant, une fois qu'on a la notion de crible, on va voir la notion de topologie de Grothendieck. Je ne pouvais pas faire un exposé sur les topos sans donner la définition d'une topologie de Grothendieck. Alors, moi, je vais vous dire le moment qui pour moi a été crucial dans l'appréciation de la notion de topos. Le moment qui a été crucial, c'est le suivant : c'est que avant, quand on me présentait un topos, on me présentait toujours un topos en me disant "je prends une catégorie, une petite catégorie, et je suppose qu'elle est stable par produit fibré." A ce moment-là, mon oreille se fermait et je pensais à autre chose, d'accord *(rires)*. Et la raison, c'est la suivante : c'est que, quand on dit ça, et qu'après on écrit ce que c'est qu'une base, etc., on a bien sûr en tête l'intuition topologique ; c'est-à-dire que quand on dit que la

catégorie a des produits fibrés, on pense à deux ouverts qui ont une intersection. Et à partir de là, bon, on peut développer les choses. Et alors, ce qui pour moi a été crucial, c'est le moment où j'ai compris en fait que, déjà dans SGA4, Grothendieck avait défini les sites, et les produits fibrés sur les sites, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, on n'a absolument pas besoin de supposer *quoi que ce soit* sur la petite catégorie, et l'avantage énorme, c'est que lorsqu'on fait ça, on comprend mieux ce dont on parle. Vous savez, en mathématiques, il y a une chose qu'il faut comprendre, c'est que la principale difficulté quand on est devant un problème, c'est d'arriver à **penser juste**. Et penser juste, ça a l'air idiot, ça a l'air de... chercher à penser juste... mais une fois qu'on arrive à penser juste, les choses tombent comme des fruits mûrs, mais il faut savoir penser juste. Et ça n'est pas penser juste que de demander à la petite catégorie d'avoir des produits fibrés. Penser juste, c'est ce qu'il y a là, c'est-à-dire le crible maximal, le fait que quand vous avez un crible... Donc, qu'est-ce que c'est qu'une topologie de Grothendieck, c'est une collection de cribles, on donne pour chaque objet une collection de cribles, et on a des conditions de compatibilité. Mais quelle est l'intuition qu'il faut avoir derrière ? Peu importe le détail des axiomes. Quelle est la... Quand vous faites de la topologie, vous avez l'intuition des recouvrements ouverts. C'est une intuition qui est très délicate, je vais vous expliquer pourquoi elle est très délicate. Prenez par exemple l'intervalle $[0,1]$. Et puis ne prenez dans l'intervalle $[0,1]$ que les nombres rationnels. Ils sont denses, donc vous reconnaîtrez les ouverts, avec les nombres rationnels, puisque les ouverts, ce sont des réunions d'intervalles. Un intervalle, je le connais par son intersection avec les rationnels. D'accord ? Qu'est-ce qui va changer ? Pourquoi est-ce que si je prends le topos qui est donné par les rationnels avec ces ouverts-là, j'obtiens quelque-chose de différent que le topos qui est donné par l'intervalle $[0,1]$ avec ses ouverts ordinaires ? Ils se ressemblent, ils ont l'air d'être les mêmes. Eh bien, si vous cherchez, vous allez trouver qu'en fait, il y a beaucoup plus de recouvrements ouverts pour les rationnels qu'il n'y en a pour les réels. Pour les rationnels, il y a des recouvrements ouverts qui sont là alors qu'ils ne sont pas là pour les réels. Voilà. Typiquement si vous voulez, c'est que si vous prenez une suite d'ouverts de plus en plus grands mais dont la limite est un nombre irrationnel, eh bien, cela, ça va apparaître comme un recouvrement au niveau rationnel mais ça ne sera pas un recouvrement au niveau réel. D'accord ? C'est-à-dire qu'au niveau réel, si vous prenez le complémentaire de ça, la réunion des deux, ça ne sera pas un recouvrement ouvert. Donc en fait, il y a beaucoup moins de recouvrements ouverts pour les réels qu'il n'y en a pour les rationnels. Quand on pense topologiquement, on pense comme ça. Quand on pense au niveau des topos, on pense différemment : comment on pense au niveau des topos ? On pense que les cribles, ça signifie des choses petites, ça signifie des objets petits. Passer au crible, ça revient à donner des objets qui sont petits. Et à ce moment-là, les axiomes, ils deviennent presque absolument évidents. Et qu'est-ce que ça signifie qu'un objet est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Qu'est-ce que ça signifie qu'un recouvrement est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Ca signifie qu'il passe à travers, ça signifie qu'il est contenu dans un des ouverts du recouvrement : il passe à travers un trou. Donc, c'est ça l'intuition qu'il faut avoir : l'intuition du crible, c'est que ce sont des choses qui sont petites, et qui passent à travers les trous. D'accord.

Alors ceci dit, maintenant, on a l'intuition d'une topologie de Grothendieck quand il y a une base, etc. ; je ne vais pas vous embêter avec ça. Alors il y a une notion essentielle dans les topos mais c'est pareil, je ne vais pas en parler trop longtemps : c'est la notion de point. Et surtout la notion de morphisme géométrique. Donc si vous voulez, les topos... Il se fait qu'une fois qu'on pense juste à propos des topos, les mêmes propriétés qui sont vraies pour les espaces topologiques continuent à avoir un sens, mais évidemment, elles sont beaucoup plus subtiles. Typiquement, ce qui se produit, et ça, j'ai copié une page de SGA4, c'est ce que c'est qu'un morphisme d'un topos dans un autre, ce qu'on appelle un morphisme géométrique.

Alors pour comprendre ce que c'est qu'un morphisme géométrique, c'est-à-dire un morphisme d'un topos dans un autre, il faut avoir une certaine familiarité avec les faisceaux sur un espace. Pourquoi ? Parce que lorsqu'on a une application continue d'un espace X vers un espace Y, si j'ai une application continue f qui va de X dans Y, eh bien, il se fait qu'il y a deux manières de relier les faisceaux sur X avec les faisceaux sur Y. Il y a deux manières de le faire. Et ces deux manières, il y en a une qui est tautologique, presque triviale, et qui consiste à prendre un faisceau sur X et à l'envoyer en avant vers un faisceau sur Y. Et ça, en quel sens c'est trivial ? C'est trivial parce qu'il vous suffit, quand vous prenez un ouvert sur Y, de prendre son image inverse et de regarder les sections du faisceau sur X sur cet ouvert, sur l'image inverse. Donc ça, ça fait un faisceau, il n'y a pas de problème. Donc cette définition, elle va de soi. Mais il y a une autre manière de relier les faisceaux de X et les faisceaux de Y qui va dans l'autre sens, c'est-à-dire qui envoie un faisceau sur Y vers un faisceau sur X, et celle-là, elle est beaucoup plus intéressante, elle est beaucoup moins triviale. Elle est visuellement évidente si on pense à un faisceau

comme un espace étalé sur l'espace de base, et c'est en particulier le cas pour les faisceaux d'ensembles, mais, là où elle est extrêmement intéressante, c'est que cette application qui va dans l'autre sens, elle a une propriété merveilleuse, elle a une propriété totalement inattendue. D'abord, elle est adjointe à gauche de l'autre. Ca, ça se vérifie, ça n'est pas une grande chose, on aurait pu la définir comme ça. Donc elle est adjointe à gauche de l'autre, de celle qui allait en avant, très bien. Mais elle a une propriété merveilleuse, et cette propriété merveilleuse, c'est la propriété qu'elle est exacte à gauche, c'est-à-dire qu'elle commute avec les limites. Donc ça, c'est une propriété extrêmement puissante, extrêmement étonnante, et je pense que l'exemple qui est dû à Pierre, l'exemple le plus frappant de ça, il faut être frappé par un exemple, tant que vous n'êtes pas frappé par un exemple, vous ne comprendrez pas. L'exemple le plus frappant de ça, c'est ce qu'on appelle les ensembles simpliciaux, les complexes simpliciaux. Donc ce que vous faites, il y a une petite catégorie, donc un peu plus compliquée que celle de tout à l'heure, (intervention de Pierre Cartier) *dont Grothendieck ne veut pas*, repris par Alain Connes, dont Grothendieck ne veut pas, précisément. Je vais revenir à la page de Grothendieck parce qu'il n'en veut pas. C'est amusant d'ailleurs. Voilà.

C'est celle dont Grothendieck ne veut pas. C'est cette petite catégorie qu'on appelle Δ^{op}, c'est la catégorie semi-simpliciale, c'est quoi ? Ce sont les ensembles finis, totalement ordonnés, avec les applications non décroissantes. Cette catégorie, elle est très importante pour la raison suivante : en topologie, dans les années 40-50, s'est développée une notion, au départ, elle était formulée de manière un peu trop simple, qui était la notion de complexe simplicial. On prenait un espace et on le triangulait. Quand on prend l'espace ordinaire, on peut le trianguler, ou bien en dimension plus grande, etc. Quand on le triangule, on peut donner une donnée combinatoire qui encode la triangulation. Cette donnée combinatoire, on peut la formuler en regardant ce qu'on appelle le complexe simplicial mais de manière entièrement combinatoire, en prenant des simplexes, etc. Alors, il se fait que si on fait les choses comme ça, ça ne marche pas très bien du tout pour le produit. C'est-à-dire que comme le produit de deux simplexes n'est pas un simplexe, par exemple, le produit de deux intervalles, c'est un carré, ça n'est pas un simplexe, mais ça ne marche donc pas bien du tout pour le produit. Mais c'est parce qu'on n'a pas pensé juste. Et c'est parce qu'on n'a pas fait une chose qui paraît triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale. Et cette chose qui est triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale, c'est qu'il faut beaucoup mieux comprendre la réalisation géométrique de cet objet combinatoire, et cette réalisation géométrique de l'objet combinatoire, en fait, c'est un point d'un topos. Il se fait qu'à cette catégorie est associé un topos, le topos bêbête, le topos des foncteurs contravariants qi va de cette catégorie vers la catégorie des ensembles, et que, c'est un théorème qu'on peut démontrer facilement, les points de ce topos, dans un sens sur lequel on ne va pas s'éterniser, les points de ce topos, ce sont exactement les intervalles. C'est-à-dire ce sont exactement les ensembles totalement ordonnés qui ont un plus petit élément et un plus grand élément. Donc les points de ce topos sont donnés exactement comme ça. Et quand on a un point du topos, eh bien, le foncteur d'image inverse, qui va vers les ensembles, eh bien, ce foncteur, c'est le foncteur de réalisation géométrique si on prend pour l'espace totalement ordonné avec un plus petit élément et un plus grand élément, si on prend l'intervalle $[0, 1]$, ça donne exactement la réalisation géométrique du simplexe, du complexe simplicial.

Alors maintenant, merveille des merveilles : ce foncteur préserve les limites finies et donc, il préserve les produits. Et donc, quand on prend le produit bêbête de deux ensembles simpliciaux, c'est-à-dire de deux foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, eh bien, quand on prend la réalisation géométrique, ça va donner le produit des réalisations géométriques. C'est un exercice immédiat de vérifier que c'est compatible avec la topologie. Ca ne présente pas de difficulté, la difficulté, elle est purement ensembliste. Et, Pierre, c'est toi qui as démontré ce théorème pour la première fois, non ? (Pierre Cartier répond "Milnor"). Oui, Milnor ou toi. Mais, ce qu'il faut bien voir, c'est que la notion de topos comprend cette chose-là. Elle comprend cette chose-là et elle la généralise à un point absolument incroyable, c'est-à-dire qu'un point d'un topos maintenant, va justement préserver non seulement les colimites arbitraires, mais va préserver les limites finies, donc va préserver les produits, etc.

Et c'est pourquoi quand on prend un point d'un topos, ça nous emmène vers la théorie des ensembles mais en respectant tout ce qu'on sait. C'est à dire que ça va transformer un groupe abélien dans le topos en un vrai groupe abélien ; ça va transformer toutes les notions élémentaires qu'on peut avoir en une vraie notion en théorie des ensembles. Alors, il y a un pas sur lequel je ne vais pas m'attarder du tout, mais qui est extrêmement important et dans lequel justement, il y a des travaux très très intéressants qui se font maintenant, qui est celui des topos classifiant. C'est-à-dire qu'exactement comme il y a un espace classifiant pour les fibrés, ou vectoriel, etc., il y a un topos classifiant pour des notions logiques. Et une des merveilles de ça, qui répond un peu à la question de Grothendieck quand il dit "la sempiternelle catégorie Δ^{op}", c'est que le topos qui est associé, pas cette catégorie, mais le topos qui est associé à cette catégorie,

c'est exactement le topos qui classifie les intervalles. C'est-à-dire que si on définit abstraitement ce que j'ai expliqué tout à l'heure, c'est-à-dire un intervalle, un ensemble totalement ordonné, mais il ne faut pas parler d'ensemble, dans une théorie arbitraire, eh bien on s'aperçoit que cette notion a un topos classifiant et que ce topos classifiant, c'est exactement le dual de la catégorie Δ^{op}. Bon.

Alors on ne va pas rentrer dans les détails. Maintenant on va faire autre chose : je ne veux pas rentrer dans les détails techniques, je ne veux pas. On va revenir à Grothendieck, on va relire du Grothendieck et puis on terminera en lisant la fin de l'échange entre Grothendieck et Serre dans leur correspondance. Donc voilà ce que dit Grothendieck. Bon, c'est très important d'avoir parlé des topos, mais c'est encore plus important d'essayer d'avoir perçu la manière de travailler de Grothendieck, parce que c'est de ça dont nous avons besoin. Bon, bien sûr, on va peut-être utiliser les topos pour faire toutes sortes de choses, mais on a aussi besoin, terriblement, dans notre civilisation : quand on assiste maintenant à un laïus qui est fait en public, on s'aperçoit qu'il y a un tiers des gens qui ont leur ordinateur ouvert devant eux et qui font leurs emails, *(rires)*, ou qui font autre chose, ou téléphone portable. Mais c'est une catastrophe, parce que quand on lit Grothendieck et quand on s'imprègne de sa manière de penser, on s'aperçoit d'une chose, la chose qui frappe le plus, c'est le temps dont il disposait. On a l'impression qu'il disposait d'un temps infini, d'un temps infini, qu'il n'était pas constamment dérangé. Vous savez, maintenant, on parle de la génération Y, c'est-à-dire ce sont les gens qui font 3 choses à la fois. On croit qu'on gagne du temps, mais ça n'est pas vrai. On a un besoin maintenant fondamental, dans notre civilisation, de s'isoler, et de pouvoir penser lentement, et de prendre le temps de tout vérifier, pour être sûr des choses, pour le faire deux fois, pour le faire trois fois, etc. C'est pour ça que j'ai fait durer, quand Grothendieck parlait des faisceaux, ça durait, hein, *(rigolard)*, ça durait, mais c'est exprès que je l'ai fait, je l'ai fait à dessein, parce que je voulais que vous vous rendiez compte de cette lenteur fondamentale. C'est une lenteur qui, quand on la ressent au premier degré, est irritante. C'est la lenteur de la tortue et du lièvre, si vous voulez *(rires)* Et c'est elle qui gagne. Donc voilà ce que dit Grothendieck :

"Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. J'y crois plus ou moins, à mon affirmation, ça dépend bien sûr du point où j'en suis dans la compréhension des choses que je suis en train de regarder. Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il la faire pour pouvoir s'en convaincre. Souvent, il suffisait de l'écrire.".

Une chose fondamentale que fait souvent Grothendieck, c'est qu'il est capable d'écrire une idée qui n'est pas encore mûre. Il est capable de se mettre à écrire, ça, c'est fantastique comme qualité.

"Souvent, il suffisait de l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ca permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque". Plus souvent encore, l'affirmation prise au pied de la lettre s'avère fausse, mais l'intuition qui, maladroitement encore, a essayé de s'exprimer à travers elle est juste, tout en restant floue."

Je m'arrête une seconde : quand il parle d'écrire, c'est encore une catastrophe l'ordinateur, parce qu'on écrit mieux, dans ce genre de situation lorsqu'on écrit sur du papier avec un crayon, parce que quand on écrit sur l'ordinateur, il faut que ça ait l'air parfait. On va se poser des question de LaTex, on va se poser des questions comme ça, mais c'est complètement ridicule, on n'en est pas là, on en est à un point où on a envie de laisser le crayon qui fait ce qu'il veut sur la feuille de papier. C'est très très important ça. Donc voilà ce qu'il dit :

"Cette intuition peu à peu va se décanter d'une gangue toute aussi informe d'abord d'idées fausses ou inadéquates, elle va sortir peu à peu des limbes de l'incompris qui ne demande qu'à être compris, de l'inconnu qui ne demande qu'à se laisser connaître, pour prendre une forme qui n'est qu'à elle, affiner et aviver ses contours, au fur et à mesure que les questions que je pose à ces choses devant moi se font plus précises ou plus pertinentes, pour les cerner de plus en plus près. Mais il arrive aussi que par cette démarche, les coups de sonde répétés convergent vers une certaine image de la situation,..."

Ca, ça veut dire qu'on est en train de se faire une image mentale.

"...sortant des brumes avec des traits assez marqués pour entraîner un début de conviction que cette

image-là exprime bien la réalité - alors qu'il n'en est rien pourtant, quand cette image est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. Le travail, parfois laborieux ; qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse. à partir des premiers "décollages" constatés entre l'image obtenue et certains faits patents, ou entre cette image et d'autres qui avaient également notre confiance".

Il faut dire là, que c'est très bien, dans ces cas-là qu'il décrit, de prendre un peu de recul, de faire autre chose, et Grothendieck avait souvent, Cartier me disait souvent qu'il avait 100 fers au feu. Quand on voit que les choses ont tendance à déconner un petit peu, il vaut mieux prendre du champ, parce qu'en fait, on est viscéralement attaché aux idées qu'on avait, et on ne veut pas accepter qu'elles soient fausses.

"Ce travail est souvent marqué par une tension croissante, au fur et à mesure qu'on approche du noeud de la contradiction, qui de vague d'abord se fait de plus en plus criante - jusqu'au moment où enfin elle éclate, avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense, comme une libération. La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte, qu'il s'agisse d'un travail mathématique, ou d'un travail de découverte de soi. C'est un moment où notre connaissance de la chose sondée soudain se renouvelle."

Et voilà maintenant un des paragraphes les plus magnifiques que je connaisse :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mûs, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée.".

Si un jour, vous n'avez pas le moral ou tout ça, relisez cette phrase. C'est une espèce de talisman. Alors je vais terminer en... J'avais commencé par la discussion entre Serre et Grothendieck, au tout début, sur l'article de Tohoku de Grothendieck, et je vais terminer avec une note assez différente, d'une tonalité très différente, qui est justement la réaction de Serre quand il a reçu *Récoltes et Semailles*. Donc euh, bon, je ne sais pas si vous connaissez Serre, mais je veux dire, il n'a pas l'habitude de mâcher ses mots, et il n'aime pas trop les états d'âme en général et donc, je veux dire, c'est extrêmement intéressant que dans la correspondance entre Serre et Grothendieck, ils aient continué leurs échanges, au moment où Grothendieck, qui s'était isolé si vous voulez délibérément du monde mathématique. Je veux dire, ce n'est pas le monde mathématique qui l'avait chassé, c'est Grothendieck qui s'est chassé lui-même, qui s'est isolé du monde mathématique, il a écrit ce texte ; tous les passages que je vous ai lus de Grothendieck sont dans *Récoltes et Semailles*, donc c'est un texte admirable, et il faut le lire avec un certain recul, bien entendu, parce qu'il y a des moments où, si vous voulez, il dit des choses qui ne sont pas idéales, mais en tout cas, il s'exprime. Alors voilà ce que dit Serre après l'avoir reçu :

"Cher Grothendieck,
J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées." (rires)

Bon évidemment, il y a tellement de pages. Moi, je dois vous dire, d'ailleurs, que c'est un texte qu'il faut lire... il ne faut pas lire plus de 5 pages à la fois. Je me souviens d'avoir passé un été extraordinaire en lisant en parallèle *Récoltes et Semailles* et *A la recherche du temps perdu* de Proust. Et je veux dire, de la même manière. C'est-à-dire que, bien sûr, les gens qui cherchent des anecdotes croustillantes, ils vont le lire en sautant les pages, si vous faites ça, vous perdez tout. C'est exactement pareil avec Proust. Proust, on ne peut pas le lire en lisant plus de 5 pages à la fois, il faut les méditer, il faut les repenser, etc. Il faut se laisser pénétrer par une atmosphère qui est absolument extraordinaire. Donc voilà ce que dit Serre, il dit :

"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"." (rires)

C'est quand-même une sacrée question. Et alors après, ce qui est formidable, c'est que Serre a une réponse, et ce n'est pas du tout une réponse évidente. Non, non, mais c'est une lettre de Serre mais il continue sa lettre et il a une proposition pour expliquer pourquoi Grothendieck est parti. Alors voilà ce qu'il dit, il dit :

"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue, Tu étais tout simplement fatigué de l'énorme travail que tu avais entrepris."

Bon ça, tout le monde le comprendra. Je veux dire quand je parlais du temps, ça veut dire qu'il avait peu de temps pour faire autre chose. Donc je veux dire, c'est immense. Au début, je vous ai lu des passages dans lesquels il parlait de tout ce qu'il devait absorber, etc., bon je veux dire, c'est monstrueux comme quantité de travail.

"D'autant plus qu'il y avait aussi les SGA qui prenaient du retard, année après année. Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5 où les rédacteurs se perdaient dans des masses de diagrammes, dont ils étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes." (rires)

"et ces commutativités étaient essentielles pour la suite. C'est à cet état désastreux et non pas idyllique, tel qu'on le croirait à lire Récoltes et Semailles que se réfère ma phrase du séminaire Bourbaki, la version définitive du SGA5 qui devrait être plus convaincante que les exposés et polycopiés existant."

C'est du Serre craché.

"On aimerait avoir tes impressions sur tout ceci, même modifié par 15 ans d'enterrement pour employer tes termes, on reste sur sa faim."

Alors maintenant, il va aller à une explication beaucoup plus profonde :

"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

C'est ce dont je parlais tout à l'heure quand je parlais de penser juste. Et par exemple, il y a une anecdote, Cartier ne me contredira pas, qui est qu'une fois, en remontant de la cafétéria à l'IHES, il y a je crois que c'est Demazure qui pose une question à Grothendieck sur $SL(\mathbb{Z})$ ou sur... voilà. Et alors Grothendieck dit que ça n'est pas la bonne manière de formuler cette question et le résultat, ça a été SGA3, c'est-à-dire la théorie des groupes algébriques de Grothendieck *(rires)*. Voilà, donc, ce que fait Grothendieck, c'est... il peut avoir une question précise, on peut lui formuler une question précise, mais il va dire "cette question n'est pas dans le bon cadre". Et il va développer une théorie générale de telle sorte que la question devienne naturelle. Et à partir du moment où la question est naturelle, et où on a pris la peine et le temps de penser juste, elle va tomber comme un fruit mûr. Donc c'est ce que dit Serre quand il dit :

"...mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

Donc la question se dissout. Et dans *Récoltes et Semailles* d'ailleurs, Grothendieck a de très belles images, il parle d'une noix, et il dit qu'il y a deux manières de s'occuper de la noix : la première manière, c'est de prendre un marteau et de la casser, et la deuxième manière, c'est justement de la laisser s'assouplir dans de l'eau, etc., de telle sorte que finalement, elle s'ouvre d'elle-même.

"Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement, du moins pour les EVT[5] *et la géométrie algébrique."*

Alors voilà ce que dit Serre, et ça, c'est du sérieux. Il dit :

5. Espaces vectoriels topologiques

"C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres, où les structures en jeu sont loin d'être évidentes, ou plutôt, toutes les structures possibles sont en jeu."

Et je préfère terminer là-dessus. C'est-à-dire, si vous voulez, c'est extrêmement frappant de voir ces deux manières de penser les mathématiques. La manière de Grothendieck, d'accord, qui est une manière qui consiste justement à essayer de penser juste, et à essayer de formuler, si un problème est donné, de le formuler de telle sorte qu'il tombe tout seul, et si vous voulez, d'explorer tous les coins, les moindres recoins. Dans sa demeure, la demeure dont il parle, il n'y a aucun coin qui est sale, qui n'est pas exploré, etc. Il veut que tout soit impecc. Et il ne peut penser que quand c'est comme ça. Et le prix à payer, c'est un travail colossal. Mais c'est un travail qui n'est pas vraiment difficile, au sens où, on développe les choses, etc., etc. A aucun moment donné si vous voulez, on n'est sur une falaise raide, et on risque de tomber, à aucun de ces moments-là. C'est un peu comme si vous connaissez Israël, comme la manière dont les romains ont voulu attaquer Massada, je ne sais pas si vous connaissez. Bon, c'est quelque-chose de très frappant parce qu'ils ont remblayé de la terre, de la terre, de la terre, pour que ça arrive finalement au niveau... et ça leur a pris, je ne sais pas, je crois que c'est une dizaine d'années ou quelque-chose comme ça. *(le public donne son avis, 3 ou 4 ans).*

La méthode de Grothendieck, c'est ça. Et ce que l'on voit avec le recul, c'est tout ce qu'on peut en apprendre, de cette méthode. Tout ce que nous pouvons en apprendre... Par opposition à une autre méthode, que moi, j'aime beaucoup, qui consiste à, dans les couloirs de l'Ecole Normale, dans le temps, quand j'étais à l'Ecole, il y avait un copain qui m'avait posé un problème : il était au troisième étage et moi, j'étais au rez-de-chaussée, et puis j'étais parti en week-end, et puis j'avais passé tout mon week-end à essayer de résoudre... bon. C'est le problem solver, si vous voulez, on vous donne un problème, et vous cherchez à le résoudre, eh bien, vous cherchez à le résoudre de la manière la plus efficace possible. Ce sont deux manières complètement orthogonales d'agir et en fait, Grothendieck a toute une discussion dans *Récoltes et Semailles* sur ces deux manières d'agir et il les distingue, bon, il les formule avec le yin et le yang. Bon, mais c'est très très important : il dit que la méthode qu'il a, elle est plus féminine, si vous voulez, que l'autre, qui est une méthode masculine. Ca, c'est difficile de le dire exactement. Mais c'est très important, quand on fait des maths, de s'imprégner de cette idée, effectivement, qu'il y a ce besoin, et que souvent, on ne le croit pas. Par exemple, récemment, j'avais un collègue qui m'avait posé un problème à l'Académie que j'ai fini par résoudre, mais j'étais sidéré de voir que je l'ai résolu quand j'ai commencé à penser juste. Ca m'a sidéré ! Parce qu'on me dirait "mais tu veux résoudre un problème, mais pourquoi est-ce que tu te préoccupes de ça ?". Non, ça n'est pas vrai, c'est quelque-chose de fondamental, arriver à penser juste, c'est quelque-chose d'absolument fondamental. Jamais, ça ne sera inutile d'essayer de penser juste. Jamais ça ne sera inutile, d'accord.

Donc j'espère que je vous aurai donné envie de lire *Récoltes et Semailles* et puis surtout, de manipuler des topos les plus simples, et d'essayer de vous en servir, par rapport à notre logique, qui est bien pauvre, même dans des circonstances tout à fait extérieures aux mathématiques. Evidemment, ça demande du travail, ça demande un travail qui est très lent, etc. qui est celui de s'approprier la notion. Et c'est une notion qui est maudite, elle est maudite : avec Pierre, et puis surtout avec Laurent Lafforgue, par exemple, on a essayé pendant plusieurs années, de soutenir une mathématicienne très très brillante, qui est Olivia Caramello, et on s'est heurté à l'hostilité, pour ne pas dire le mépris, du monde mathématique en général. Et on a pu expérimenter à cette occasion à quel point il y a une espèce de, je ne sais pas, de fatalité, sur la notion de topos, il y a quelque-chose qui irrite les gens, parce que sans doute, ils ressentent, c'est ce que dit Grothendieck, il le dit tellement bien, il le dit explicitement, il l'avait déjà ressenti à son époque, sans doute, ils ressentent qu'il y a quelque-chose, mais ils ne le comprennent pas vraiment. Et pour le comprendre vraiment, il faut en faire, bien sûr, mais il y aura un moment où la notion va vous appartenir et vous allez arriver à vous l'approprier. Et la meilleure manière, c'est cette métaphore, c'est le fait que l'espace n'est pas au-devant de la scène, il est derrière, c'est une espèce de Deus ex machina, et c'est lui qui fait tourner les ensembles, c'est lui qui introduit un aléa, un aléa dans les ensembles, dans la théorie des ensembles. De même qu'il y a un aléa dans les nombres premiers, que nous connaissons tous, et de même qu'il y a un aléa du quantique, donc voilà, il faut garder tout cela en tête, et je vais m'arrêter là.

Conseils au débutant

Alain Connes
Collège de France,
Institut des Hautes Etudes Scientiques
Université de Vanderbilt.

Les mathématiques sont la colonne vertébrale de la science moderne et une source remarquablement efficace de nouveaux concepts et outils pour comprendre la réalité à laquelle nous participons. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée humaine.

On m'a demandé de donner quelques conseils aux jeunes mathématiciens. La première observation est que chaque mathématicien est un cas particulier et en général, les mathématiciens ont tendance à se comporter comme des "fermions", i.e. à éviter de travailler dans des endroits trop "branchés" alors que les physiciens se comportent comme des "bosons" qui fusionnent en gros paquets et souvent "sur-vendent" leurs travaux, une attitude que les mathématiciens méprisent.

Il peut être tentant à première vue de voir les mathématiques comme l'union de parties séparées telles que la Géométrie, l'Algèbre, l'Analyse, la Théorie des nombres, etc. avec la Géométrie dominée par la compréhension du concept d'"espace", l'Algèbre par l'art de manipuler les "symboles", l'Analyse par l'accès à l'infini et le continu, etc.

Cela pourtant ne rend pas justice à l'une des caractéristiques les plus essentielles du monde mathématique, notamment au fait qu'il est virtuellement impossible d'isoler l'une quelconque des parties ci-dessus des autres sans la priver de son essence. En cela, le corpus mathématique ressemble à une entité biologique qui ne peut survivre que comme un tout et qui mourrait si on la coupait en morceaux disjoints.

La vie scientifique des mathématiciens peut être décrite comme un voyage à l'intérieur de la géographie de la "réalité mathématique" qu'ils révèlent graduellement dans leur schéma mental personnel.

Traduction de l'article Advice to the beginner ici
http://alainconnes.org/docs/Companion.pdf

Cela commence souvent par un acte de rébellion par rapport à la description dogmatique existante qu'on peut trouver dans les livres de la littérature mathématique. Les jeunes "mathématiciens-en-devenir" réalisent dans leur propre esprit que leur perception du monde mathématique capture quelques aspects qui ne s'adaptent pas au dogme existant. Ce premier acte est souvent dû à l'ignorance mais il permet à la personne de se libérer de la révérence à l'autorité en l'enjoignant à faire confiance à son intuition propre, à condition que celle-ci s'appuie sur des démonstrations effectives. Lorsque ces jeunes mathématiciens acquièrent une réelle connaissance, obtenue d'une manière originale et "personnelle", d'une petite partie du monde mathématique, aussi ésotérique qu'elle puisse avoir l'air au départ [1], leur voyage peut vraiment commencer. C'est bien sûr vital tout au long du parcours de ne pas rompre ce "fil d'Ariane" qui permet de garder constamment un regard neuf sur tout ce que l'on pourra rencontrer en chemin, et de revenir à la source lorsqu'on se sent perdu parfois...

Il est aussi vital de toujours rester en mouvement. Le risque sinon est de rester confiné dans une petite zone de spécialisation extrêmement technique, rétrécissant notre perception du monde mathématique et de sa diversité déroutante.

Le point vraiment fondamental par rapport à ça c'est qu'alors que de nombreux mathématiciens ont passé leur vie scientifique entière à explorer ce monde, ils tombent tous d'accord sur ses contours et sa connexité : quelle que soit l'origine de l'itinéraire, un jour ou l'autre, on est amené à atteindre une ville bien connue, i.e. par exemple à rencontrer les fonctions elliptiques, les formes modulaires, les fonctions zeta. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connecté". Bien sûr, cela ne signifie pas que toutes les parties des mathématiques se ressemblent et il convient de citer Grothendieck (dans "Récoltes et semailles") dans sa comparaison du paysage de l'analyse dans laquelle il a travaillé au départ avec celui de la géométrie algébrique dans laquelle il a passé le reste de sa vie mathématique :

> *"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît*

1. Mon point de départ a été la localisation des racines des polynômes, mais j'ai eu la chance d'être invité très jeune à une conférence à Seattle où j'ai trouvé les racines de tous mes travaux futurs sur les facteurs.

à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller...".

La plupart des mathématiciens adoptent une attitude pragmatique et se voient comme des explorateurs de ce "monde mathématique" dont ils n'ont aucun souhait de mettre l'existence en doute, et dont ils découvrent la structure par un mélange d'intuition, pas si étranger au "désir poétique" [2], et une bonne dose d'intenses périodes nécessitant leur concentration rationnelle.

Les générations successives de mathématiciens construisent l'"image mentale" de leurs propres compréhensions de ce monde et construisent des outils mentaux de plus en plus profonds (pénétrant) pour explorer des aspects précédemment cachés de cette réalité.

Là où les choses deviennent vraiment intéressantes, c'est lorsque des points inattendus émergent entre différentes parties du monde mathématique, qui étaient précédemment comprises comme étant éloignées les unes des autres dans les outils mentaux qu'une génération avait élaborés. A ce moment, on a le sentiment qu'un vent soudain a balayé le brouillard qui était sur les parties cachées d'un beau paysage. Dans mon propre travail, ce genre de "grande surprise" est venu principalement de l'interaction avec la physique. La profondeur des concepts mathématiques qui proviennent directement de la physique a été décrite dans la citation suivante de Hadamard :

> *"Non cette nouveauté à la vie courte qui trop souvent ne peut qu'influencer le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses."*

Je terminerai par quelques conseils pratiques [3].

- *Marches*
  Un exercice très sain, quand on se bat avec un problème très difficile (impliquant souvent de nombreux calculs), est d'aller faire une longue promenade (sans papier ou crayon) et de faire les calculs dans sa tête (en dédaignant le premier sentiment "c'est trop compliqué pour être fait comme ça !"). Même si l'on n'y parvient pas, cela entraîne la "mémoire vive" et aiguise les compétences.

- *Se coucher*
  Les mathématicien(ene)s ont habituellement du mal à expliquer à leur

2. comme souligné par le poète Paul Valéry.
3. En rappelant que chaque mathématicien est un "cas particulier", ne prenez pas ce conseil trop à la lettre.

compagnon que les moments où ils travaillent le plus intensivement sont ceux où ils sont couchés dans le noir sur un canapé. Malheureusement, avec les emails et l'invasion des écrans d'ordinateurs dans tous les instituts de mathématiques, bien que cette manière de s'isoler soi-même et de se concentrer tende à devenir de plus en plus rare, elle reste la meilleure façon de réfléchir.

- *Etre courageux*
  Il y a plusieurs phases dans le processus amenant à une "nouvelle découverte" mathématique. Et alors que la phase de "vérification" est effrayante et ne nécessite que rationnalité et concentration, la phase "créative" est d'une nature totalement différente. En un certain sens, elle nécessite une sorte de protection de sa propre ignorance dans la mesure où il y a toujours des billions de raisons rationnelles de ne pas étudier un problème qui a déjà été étudié par des générations de mathématiciens.

- *Reculs*
  Cela arrive souvent dans la vie d'un mathématicien et à n'importe quelle niveau (souvent très tôt) de leur vie scientifique, d'obtenir un preprint d'un compétiteur par exemple et de se sentir perturbé. La seule recette que j'ai là est d'"essayer" de transformer (ce n'est pas toujours facile) ce sentiment de frustration en énergie positive pour travailler encore plus dur.

- *Approbation à contrecœur*
  Un collègue à moi m'a dit un jour "Nous [4] travaillons pour l'approbation à contrecœur de quelques amis". Il est vrai que dans la mesure où le travail de recherche est de nature plutôt solitaire, nous avons sérieusement besoin de cette approbation d'une manière ou d'une autre, mais franchement, n'en attendez pas beaucoup... En fait, il n'y a pas moyen de leurrer le seul juge que l'on est à soi-même, et attendre trop du jugement d'autrui est un gaspillage de temps : jusqu'à aujourd'hui, aucun théorème n'a été prouvé par résultat d'un vote. Comme Feynman l'a dit "Pourquoi te préoccupes-tu de ce que les autres pensent ? !".

4. les mathématiciens.

MES RENCONTRES AVEC JACQUES

Entretien d'Alain Connes avec Jacques Dixmier

Alain Connes : Je vais essayer de raconter ma première rencontre avec Jacques, y a eu une suite de circonstances favorables, la première c'est que j'avais été invité en 71 à Seattle pour une conférence, et en fait, j'avais acheté, au hasard un *Lecture Notes* quand j'étais passé par Princeton, c'était un mathématicien japonais, Takesaki, qui exposait le travail d'un autre mathématicien japonais, qui est Tomita. Et j'avais été fasciné, sans vraiment comprendre, pendant tout le voyage en train qu'on faisait à travers le Canada, euh, parce que ça me paraissait extrêmement intéressant. Et quand j'étais arrivé à la conférence, que j'avais vu qu'il y avait le Japonais juste avant qui expliquait la théorie, j'avais trouvé ça formidable, et donc j'avais décidé, en voyant ce hasard, de n'aller écouter que ce cours et de travailler complètement là-dessus. Et quand je suis rentré de ce voyage aux Etats-Unis, donc, j'étais jeune marié, avec Danye, j'ai décidé...

Le séminaire de Dixmier

...d'aller au séminaire de Jacques Dixmier, qui était à Paris, qui avait pour sujet les algèbres d'opérateurs et y a eu un concours de circonstances extraordinaire qui a fait que, à nouveau au hasard, parmi les articles que Jacques proposait d'exposer au séminaire, j'en ai choisi un, et quand je suis rentré en banlieue en train, en lisant cet article, je me suis rendu compte qu'en fait il y avait un lien formidable entre les deux théories. A ce moment-là, j'ai envoyé une petite lettre d'une page à Jacques, il m'a répondu presque tout de suite en me disant : « Je comprends pas, c'est trop court, il faut beaucoup plus de détails », je lui ai réécrit, deux jours après, en lui envoyant une lettre de quatre pages, et c'est là que notre entente a commencé, il m'a reçu dans son bureau, et je me souviens très, très bien qu'il m'a dit un seul mot, il m'a dit : « Foncez ! »

Jacques Dixmier : La deuxième rédaction qu'il m'a envoyée et qui était détaillée, je me souviens qu'il obtenait des résultats qui étaient nouveaux, visiblement importants, et inattendus, j'ai été ahuri de voir ça démontré en quatre pages, quoi... C'est pour ça que j'ai dû lui dire « Foncez ! » Et puis

http://llx.fr/site/wp-content/uploads/2017/04/Connes-Dixmier_tapuscrit.pdf

alors, bon, les quatre pages sont devenues quand même les cent et quelques pages de ta thèse...

La trace de Dixmier

AC : Y a un autre épisode où on a vraiment renoué ensemble, c'était à l'IHES ! Jacques avait fait dans les années 50 une découverte, il avait trouvé une trace exotique sur les opérateurs...

JD : Euh, on parlait, je crois, des algèbres hilbertiennes, et je t'ai dit, « je m'étonne que cet exemple que j'ai fabriqué n'ait pas servi à faire des contre-exemples »... Parce que, ce que j'avais trouvé, tu dis exotique, pour moi c'était une monstruosité mathématique ! Et une monstruosité mathématique, souvent ça ressert à faire d'autres monstres ! Je me souviens encore Alain disant, « mais c'est exactement c'qu'y m'faut ! »

AC : Oui, alors en fait, maintenant ça s'appelle la trace de Dixmier, mais il se fait que dans les bons cas, cet objet converge, c'est-à-dire que normalement, c'est un objet qui est exotique ou monstrueux parce que y a une quantité qui n'a pas de limite, mais en fait dans les bons cas, la quantité en question a une limite ! C'est une espèce de mesurabilité... Et alors y a un phénomène extraordinaire qui se produit, c'est qu'en fait pratiquement toutes les intégrales qu'on connaît, en mathématiques, sont un cas particulier de cette construction...

JD : Oh là, t'exagères, quand même...

AC : Ah, j'exagère pas ! J'exagère pas, c'est-à-dire que, d'habitude en mathématiques, quand on écrit $\int f(x)dx$, le signe d'intégrale est indissociable de ce qu'on appelle la mesure, c'est-à-dire ce qu'on appelle $d\mu(x)$. Y a pas un sens à l'intégrale et un sens séparé pour $d\mu(x)$... C'est l'ensemble, c'est le package, qui a un sens... Eh bien, grâce à ce procédé, on peut donner un sens à l'intégrale, on peut donner un sens aux infinitésimaux, etc., etc., et à ce moment-là on peut dissocier l'intégrale de l'autre côté. Alors il y a un autre intérêt, c'est qu'en fait les physiciens se sont aperçus que dans leurs travaux, y a beaucoup de, ce qu'on appelle de divergences et en particulier ce qu'on appelle les divergences logarithmiques. Et ce qu'a fait Jacques, quand

il a défini sa trace, il a montré que le coefficient d'une divergence logarithmique, ça définit une trace, ça a permis de donner un statut mathématique à quelque chose qui normalement n'aurait pas de statut mathématique, qui sont précisément ces divergences logarithmiques...

JD : Ah, si Leibniz y savait ça ! Ah, là là !

AC : Oui, mais justement, là, y a une différence extrêmement forte et frappante entre Leibniz et Newton ! Ce que la trace de Dixmier permet de faire et ce que le formalisme quantique permet de faire, c'est beaucoup plus quelque chose qui va dans le sens de Newton que dans le sens de Leibniz, c'est-à-dire que Newton avait l'idée que les quantités infinitésimales, ce ne sont pas des nombres, ce sont des variables... Or, en mathématiques, on s'aperçoit que la bonne formulation de la notion de variable réelle, la seule qui permette la coexistence entre les variables continues et les variables discrètes, c'est le formalisme quantique, c'est-à-dire que les variables réelles, ce sont des opérateurs auto-adjoints dans l'espace de Hilbert, et les opérateurs auto-adjoints y peuvent avoir un spectre continu mais y peuvent aussi avoir un spectre discret, et tout ça, ça agit dans le même espace de Hilbert... Et alors ce qui est formidable, c'est que quand on lit le détail de la définition de Newton, de ce qu'il appelle les variables infinitésimales, on tombe exactement sur ce qu'on appelle les opérateurs compacts... Non seulement on tombe sur les opérateurs compacts, mais on tombe aussi sur le fait qu'un infinitésimal peut avoir un ordre 1, un ordre α où α est un nombre réel, donc y a toute une hiérarchie d'infinitésimaux, et précisément la trace que Jacques avait construite, c'est une trace qui intègre les infinitésimaux d'ordre 1, et qui donne un résultat nul pour tous les infinitésimaux d'ordre plus élevé que 1... Donc sa trace c'est une espèce de filtre, qui va filtrer tous les détails quantiques, d'une certaine manière, et qui va donner une image classique d'un résultat... Et ça, ça a joué, dans les développements qu'on a faits ensuite, un rôle absolument essentiel !

JD : On, c'est pas moi, hein !

AC : Mais, donc, ce que je veux dire, c'est que, on a eu cette nouvelle rencontre, qui s'est faite aux déjeuners de l'IHES, par hasard...

Le boson de Dixmier

AC : Et alors l'épisode relativement récent, c'est, il y a peut-être cinq ou six ans, on était à la campagne avec Danye, et on reçoit une petite carte postale, que Jacques nous avait envoyée : Voilà, j'ai le titre d'un livre... Alors c'était : *"Bossons sur le boson... !*. Et alors y dit, vous l'écrivez, je corrigerai les épreuves !

JD : Ah, y faut dire que c'était dans un contexte où on parlait beaucoup de découverte du boson de Higgs, qui était pas encore trouvé...

AC : Au même moment, j'avais eu vent, par Etienne Klein, d'une anagramme qui était assez étonnante, qui s'intéressait précisément au boson de Higgs... Cette anagramme c'était le boson scalaire de Higgs, et de l'autre côté c'était l'horloge des anges ici-bas... Voilà...Et si on passe au commutatif, c'est-à-dire si on ignore l'ordre des lettres, on obtient exactement la même chose... Alors, on avait trouvé une horloge ornée d'anges, comme y en avait au début du XXème siècle, on fait une belle image, et puis on avait répondu à Jacques... Bien sûr pour le moment c'était encore une boutade, et puis on a commencé à communiquer énormément avec Jacques, et puis le bouquin a pris forme ! Et dans lequel au bout d'un moment on a rajouté de plus en plus de détails scientifiques, mais qui a existé comme ça, presque, bon, je dirais pas sans efforts...

JD : Pour ce qui est des efforts, là je peux dire que je ne suis plus capable d'inventer des mathématiques et je trouve que c'est infiniment plus facile d'écrire un roman que d'écrire un article de maths !

Les matroïdes de Dixmier

AC : Mais y a aussi un épisode récent, et qui était que je suis arrivé une après-midi chez Jacques et je lui ai montré la note au compte-rendu qu'on avait écrite avec Katia Consani sur ce qu'on appelle le site arithmétique. Jacques a lu cette note avec attention et...

JD : Sans y comprendre grand-chose !

AC : Oh, oh, oh... Oui, sauf qu'il a compris quelque chose d'extraordinaire,

La géométrie de l'incertitude

Dana Mackenzie

Pour additionner ou multiplier des nombres, chacun sait que l'ordre des termes n'a aucune importance : $1 + 2 = 2 + 1$. Mais, dans la vie quotidienne comme en mathématiques, la propriété de pouvoir ainsi "commuter" sans difficulté n'est pas la règle générale. Voici plus d'un siècle et demi qu'un astronome irlandais transforma la non-commutativité en élément perturbateur des mathématiques classiques. Après avoir bousculé l'algèbre et participé à l'avènement de la physique quantique, elle est désormais au cœur des développements de la géométrie contemporaine. Serait-elle aussi cachée derrière la physique des interactions fondamentales ?

Professeur de mathématiques en premier cycle universitaire pendant des années, je suis toujours resté stupéfait du nombre d'erreurs que commettaient les étudiants à propos de la commutativité. Glissez l'expression $(x+y)^2$ dans un examen et, comme attiré par un miroir aux alouettes, même quelques-uns des meilleurs élèves la développeront en $x^2 + y^2$ (au lieu de $x^2 + 2xy + y^2$). Comme si les règles de l'arithmétique leur permettaient d'effectuer les opérations "additionner" et "élever au carré" dans n'importe quel ordre.

D'où vient cette fâcheuse habitude ? Je soupçonne qu'elle découle, en grande partie, d'une analogie incorrecte. A l'école primaire, en classe d'arithmétique, les enfants apprennent très tôt que l'ordre n'a aucune importance lorsqu'ils additionnent deux nombres. Pourquoi s'étonner si ces mêmes élèves, des années plus tard, confrontés à des expressions plus compliquées et pressés par le temps, s'en remettent inconsciemment à cette règle familière ?

Il est cependant curieux de procéder de la sorte. Après tout, hors de la salle de classe, personne ne tient la commutativité pour acquise. Lorsque l'on s'habille le matin, peu importe si on met sa montre avant ou après ses chaussures : "mettre sa montre" commute avec "mettre ses chaussures". "Mettre ses chaussettes", en revanche, ne commute pas avec "mettre ses chaussures" et même les jeunes enfants savent dans quel ordre effectuer ces gestes pour obtenir un résultat satisfaisant (quoiqu'ils puissent en décider autrement, histoire de rire un peu). En règle générale, en mathématiques, les nombres

Magazine La Recherche n° 307, Mars 1998, ©La Recherche.

commutent mais pas les opérations, ni les actions. La seconde partie de cette assertion, la non-commutativité des actions, est la pierre de touche de mathématiques peu connues, dont les implications vont du trivial au complexe. Elle sème souvent l'anarchie au cœur de théories dociles et prévisibles. Véritable farfadet théorique, elle surgit régulièrement, sous différents visages, dans les débats entourant les grands chambardements de la pensée mathématique. On la retrouve dans les bizarreries de la mécanique quantique, y compris dans le fameux principe d'incertitude du physicien allemand Werner Heisenberg. Au cours des dernières années, le sujet s'est libéré de ses origines algébriques et a permis d'élaborer une géométrie radicalement nouvelle qui, peut-être, contribuera au prochain bond en avant des physiciens vers une "théorie du tout" unifiée.

Pour se familiariser avec la non-commutativité, il faut tout d'abord savoir que toutes les opérations non commutatives ne sont pas similaires. Cela peut paraître étrange - après tout, les choses commutent où ne commutent pas, n'est-ce pas ? En fait, pas vraiment. Prenez deux navires qui lèvent l'ancre côte à côte à l'équateur. Un des navires parcourt 100 milles vers l'est puis vire de bord et couvre 100 milles vers le nord. Le second navire parcourt 100 milles vers le nord puis 100 milles vers l'est. Se retrouvent-ils au même endroit ?

Non ! Le second navire termine sa course à près d'un trentième de mille à l'est du premier. Si le trajet avait été dix fois plus long dans chaque direction, l'écart aurait atteint à peu près 32 milles - presque mille fois plus. La commutativité ne peut s'appliquer ici à cause de la courbure de la Terre ; de plus, l'erreur commise en l'appliquant dépend de la route suivie par les navires.

La non-commutativité s'impose quand il s'agit de démêler des nœuds. Alexandre le Grand, s'y essayant il y a vingt-trois siècles, finit par couper en morceaux le légendaire nœud gordien. De nos jours, les mathématiciens ne cessent d'apporter de surprenants raffinements à cette approche brutale. Grâce à la non-commutativité, John Horton Conway, de Princeton University, a pu mettre sur pied une ingénieuse méthode pour dénouer certains nœuds sans jouer du sabre.

C'est un Irlandais prodige en mathématiques, William Rowan Hamilton,

qui fit entrer le fauve de la non-commutativité dans l'arène. Nommé astronome royal d'Irlande à 22 ans, il fut anobli à 30, et avait déjà atteint l'âge avancé de 38 ans lorsque, le 16 octobre 1843, il eut un trait de génie et résolut un problème qui lui résistait depuis plus d'une dizaine d'années. Hamilton fut l'un des premiers à reconnaître l'importance des nombres complexes. Il s'est ensuite acharné à découvrir de nouveaux systèmes numériques "par-delà" les nombres complexes. Observant que les nombres réels et complexes ordinaires obéissent aux règles de l'arithmétique - notamment l'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication -, il espérait découvrir de nouveaux nombres exotiques ayant les mêmes propriétés. Mais, en dépit de tous ses efforts, ses recherches n'aboutirent pas (les mathématiciens savent aujourd'hui que de tels nombres n'existent pas). Hamilton comprit finalement qu'il pouvait se contenter d'un sujet de moindre envergure. Ce jour d'automne, il imagina en effet un système numérique satisfaisant toutes les règles habituelles sauf une : la commutativité de la multiplication. Il baptisa son nouveau système quaternions.

Avant même la fin du XIXème siècle, les quaternions furent largement supplantés par d'autres outils plus flexibles, mais leur découverte ne manqua pas de laisser derrière elle au moins un héritage durable : les mathématiciens se sentirent libres de construire de nouvelles structures algébriques enfreignant les règles de l'arithmétique conventionnelle. Ces structures parmi lesquelles les groupes, ou l'algèbre de Clifford (cette dernière étant la plus réussie des généralisations modernes des quaternions), font maintenant partie de la panoplie du chercheur en mathématiques.

L'esprit d'Hamilton survit à travers les travaux des spécialistes contemporains de la géométrie non commutative, En supprimant la commutativité des axiomes d'un type particulier de structure algébrique découverte dans les années 1940, ils ont ouvert une voie menant à de nouveaux types d'espaces géométriques. Leurs travaux ont également été profondément influencés par un autre rebondissement qui, lié à la non-commutativité, se produisit dans le domaine de la physique.

Au début du siècle, la physique du monde subatomique semble prendre un visage de plus en plus étrange. Jusqu'alors, des particules telles que les photons et les électrons étaient considérées comme des objets ponctuels, auxquels on pouvait attribuer des nombres représentant des quantités observables,

l'énergie par exemple. Puis, en 1925, Heisenberg esquisse le formalisme mathématique de la physique quantique moderne. Forts de la nouvelle théorie quantique, les physiciens passent "de l'autre côté du miroir". Des quantités observables comme l'énergie ne sont plus décrites par des nombres mais par ce qu'on appelle des opérateurs, ou actions, agissant sur les particules. Ces dernières ne sont plus des points mais des fonctions d'onde.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les nombres réels commutent mais, en général, les actions ne le font pas. En réinterprétant ce qui est observable à l'aide d'opérateurs, Heisenberg introduisit du même coup l'idée de non-commutativité. En particulier, il découvrit que les actions "mesurer la position de" et "mesurer la quantité de mouvement de" ne commutent pas. Lorsque l'on mesure la position d'une particule, son état est perturbé de telle sorte que sa quantité de mouvement ne peut pas être connue avec une précision optimale. On peut done voir le principe d'incertitude d'Heisenberg, qui stipule que la position et la quantité de mouvement d'une particule ne peuvent pas être connues simultanément avec des degrés de précision indépendants, comme une conséquence de la non-commutativité.

Les fondateurs de la théorie des quanta firent certainement preuve d'audace à propos de la matière et de l'énergie, mais ils se montrèrent plus conservateurs et tolérants vis-à-vis de la géométrie de l'espace. Ils assimilèrent l'Univers à ce que les mathématiciens appellent une variété, quelque chose de semblable à une feuille de caoutchouc lisse et continue ne possédant ni bords ni faux plis.

Dans un sens, les variétés sont des modèles de commutativité. Que l'on mesure la position d'une particule d'abord par rapport à un axe horizontal puis par rapport à un axe vertical ou vice versa, cela n'a aucune espèce d'importance : on obtient le même résultat dans les deux cas.

Il y a à peu près une quinzaine d'années, des théoriciens commencèrent cependant à concevoir de nouveaux espaces bizarres - des espaces originaux dans lesquels même des opérations simples telles que "mesurer la distance à partir du mur arrière" et "mesurer la distance à partir du mur latéral" ne commutent pas. La non-commutativité donnant lieu à l'incertitude, il s'ensuit que ces distances ne peuvent être connues simultanément. Imaginez-vous en train de chercher vos chaussures dans un placard quantique de cet acabit.

Dès que vous connaissez leur position exacte de la gauche vers la droite, leur image se dilue dans le sens de la profondeur.

Les espaces non commutatifs ont ouvert de nouveaux horizons en géométrie, comme le fit la théorie des quanta en physique. Depuis Euclide, les spécialistes de la géométrie considéraient les points comme des éléments fondamentaux, les "atomes" à partir desquels toutes les autres structures géométriques sont construites, le combustible des fonctions - ces relations mathématiques qui transforment les points en nombres. Les spécialistes de la géométrie non commutative balaient cette tradition vieille de 200 ans et, dans la foulée d'Heisenberg, ils opèrent une refonte de la géométrie, donnant la prépondérance non plus au point, mais à la fonction - un peu comme les physiciens remplacèrent l'idée de *particule* par celle de *fonction d'onde* en physique des quanta.

Le paysage qui en résulte est un monde chimérique, un monde composé exclusivement de verbes et dépourvu de noms, un monde où les seules réalités sont des actions mais où aucun obiet (points ou particules) n'est là pour s'y soumettre. Si les mathématiciens peuvent se satisfaire d'un tel univers fictif, il n'en reste pas moins qu'ils doivent savoir en revenir pour en expliquer les retombées sur le monde observable, ils doivent pratiquer une "ingénierie inverse" et transformer les fonctions en points, jusqu'à ce que tout objet ou relation dans l'un des espaces ait une interprétation dans l'autre. Etablir une telle correspondance est en tout point similaire à ce que Conway fit lorsqu'il trouva le moyen de coder numériquement les enchevêtrements de cordes.

Le problème de la transformation inverse fut résolu en 1943 grâce à un théorème démontré par le mathématicien Israël M. Gelfand, à l'époque exerçant en Union soviétique, actuellement à la Rutgers University de New Brunswick, dans le New Jersey. La méthode utilisée par Gelfand pour reconstruire l'espace est à la fois élégante et ironique. Dans un monde où les verbes sont des objets, fit-il remarquer, les noms doivent devenir des actions. Dans un sens, Gelfand apporta une réponse mathématique à la question posée par le poète irlandais William Butler Yeats à la fin de son poème *Among School Children* : "Comment connaître le danseur à partir de la danse ?". Les danseurs sont des points, les danses sont des fonctions. L'approche de Gelfand (qui va à l'encontre de l'entendement) suggère que "la danse précède le danseur". Pour connaître un danseur, il suffit d'observer l'artiste en train de

danser - pas seulement *une* danse, plutôt *toutes* les danses possibles.

D'après le théorème de Gelfand, il est possible de reconstruire l'espace à partir de l'univers fictif des fonctions (auquel les mathématiciens donnent le nom obscur d'"algèbre C^*- commutative") si ce dernier satisfait à une courte liste de spécifications, ou axiomes. En tête de liste vient la commutativité : la multiplication des fonctions est commutative, tout comme la multiplication des nombres réels. Supposons alors que, suivant l'idée de Hamilton, on supprime la commutativité de cette liste d'axiomes. Ce critère aboli, des fonctions jusqu'alors interdites jaillissent du système axiomatique comme d'une boîte de Pandore. Mais quelle sorte d'espace obtient-on alors ? L'exemple le plus simple en a été proposé par Alain Connes, professeur de mathématiques à l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette. Connes est souvent considéré comme le père de la géométrie non commutative ; ses travaux lui ont d'ailleurs valu la médaille Fields, équivalent mathématique du prix Nobel. L'espace proposé par Connes est composé de deux points seulement.

Une fonction ordinaire opérant dans cet espace peut être représentée simplement par une paire de nombres. Mais Connes fait alors quelque chose d'extraordinaire : en inscrivant ces deux nombres dans les coins d'un tableau 2×2, il passe des fonctions ordinaires à une algèbre non commutative bien connue, l'ensemble des matrices 2×2. Or une de ces matrices a la propriété irritante d'interchanger les deux points. Cette matrice M étant néanmoins une citoyenne légitime du territoire fictif, il n'existe aucun moyen d'immuniser les points contre ses effets. Il est par conséquent impossible de distinguer les deux points. C'est bien là un principe d'incertitude !

L'exemple peut paraître badin mais il est loin d'être frivole. Connes a montré qu'en raffinant légèrement son espace à deux points, on pouvait obtenir un modèle d'univers permettant de faire des prédictions identiques à celles de la théorie physique qui unifie la force électromagnétique et la force faible responsable de la radioactivité. Connes soutient que, moyennant quelques modifications supplémentaires, il peut également incorporer la troisième force fondamentale de la physique : la force nucléaire forte.

L'essence même de l'espace quantique, on s'en souvient, est d'être "imprégné" d'incertitude. L'espace engendré par le modèle de Connes a une couleur

beaucoup plus classique. Comme dans son espace à deux points, chaque point y "est jumelé" avec un alter ego indiscernable, Le déterminisme classique est maître des lieux, et l'incertitude provient uniquement du fait que l'on ne sait pas à quel point on a affaire. Mais Connes assure que cette incertitude est suffisante pour engendrer la totalité du modèle classique décrivant les interactions entre particules élémentaires.

Le modèle de Connes va encore plus loin : il permet en effet d'atteindre un niveau de prédiction inaccessible au modèle classique. En 1995, les physiciens Bruno lochum, Daniel Kastler et Thomas Schücker du Centre de physique théorique de Marseille montrèrent par exemple que, si la structure de Connes est correcte, la masse du boson de Higgs, une particule dont l'existence est prévue par la théorie peut être calculée avec précision, une fois la masse du quark top déterminée. Personne n'a encore observé le boson de Higgs, mais lochum et ses collègues pensent avoir découvert un lien entre cette particule et le quark top. *"Nous pensons,* déclarent-ils dans leur publication*, que la géométrie non commutative est sur le point de révolutionner la physique comme [...] le fit la géométrie de Riemann".*

Connes insiste sur le fait que la géométrie non commutative est davantage qu'un simple outil facilitant l'étude de la théorie des champs quantiques. Même si elle ne permettait pas aux physiciens de réaliser leurs rêves, elle n'en resterait pas moins un outil mathématique valide et utile. Des ajouts récents au bestiaire des espaces non classiques pourraient d'ailleurs être mieux compris dans le contexte de la nouvelle formulation de Connes. La géométrie non commutative constitue par exemple un environnement naturel pour les fractales, ces figures devenues matière première du pop'art et de la science populaire. Il en est de même pour les pavages non périodiques, motifs construits à partir de formes s'imbriquant à l'infini sans laisser aucun vide et sans jamais se répéter. Pour les mathématiciens, l'aspect le plus surprenant des travaux de Connes est peut-être la facilité avec laquelle ils permettent de rassembler des concepts apparemment sans relation au sein d'une structure commune.

En géométrie non commutative, il existe une opération technique permettant de fusionner certains objets. Non sans humour, les mathématiciens l'ont baptisée en anglais *Connes fusion.* L'expression pourrait certainement s'appliquer à l'ensemble du sujet : un nouveau modèle fusionnant de nombreux cas particuliers, trop rebelles pour les géométries classiques et dont la

non-commutativité est le lien caché.

Encarts et légendes des illustrations

Les nœuds de Conway

J.H. Conway s'est penché sur un type de nœuds appelés *tangles*, qu'il définit comme des enchevêtrements quelconques de deux brins dont les quatre bouts restent visibles. Par commodité, on les prend répartis sur les quatre sommets d'un carré, et deux *tangles* sont considérés comme équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre en faisant tourner l'ensemble des brins à l'intérieur du carré. Le but est de démêler les deux brins de telle sorte qu'ils finissent parallèles et horizontaux sur le carré, comme les deux barres du signe =. Conway a démontré que pour une importante classe de *tangles* baptisés *tangles* rationnels, il suffit d'une suite de deux opérations élémentaires. La première opération consiste à saisir le paquet de brins et à le faire tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Si l'on commence avec deux cordes côte à côte mais verticales (||), *tourner* donne le signe =.
Seconde opération : *torsader*. Tout en immobilisant les deux bouts situés à gauche, on torsade les deux bouts de droite de manière à faire passer le bout du haut par-dessus celui du bas. En torsadant la conformation = on obtient un *tangle* en forme de X pour lequel le brin descendant en diagonale vers la droite passe par-dessus l'autre. Si l'on torsade le *tangle* ||, on retrouve ce même *tangle* ||. Il est facile de s'apercevoir que les opérations *tourner* et *torsader* ne commutent pas. Par exemple, si l'on tourne puis torsade le *tangle* =, on obtient le *tangle* ||. Mais si l'on torsade avant de tourner, on obtient un X.
Conway attribue à chaque *tangle* un nombre qui représente son nombre de torsades. Le *tangle* = ne comportant aucune torsade, son nombre de Conway est zéro. Ensuite, on ajoute 1 par torsade. L'opération *torsader* pour les *tangles* correspond à l'opération ajouter 1 pour les nombres. Et pour l'autre opération, *tourner* ? A première vue, faire tourner un nœud ne semble pas affecter le nombre de torsades qu'il renferme. C'est là que Conway eut une intuition étonnante : tourner un *tangle* correspond en fait à prendre l'opposé de l'inverse de son nombre de Conway $(-1/n)$. Par exemple, si l'on tourne un fangle contenant trois torsades, le *tangle* obtenu possède moins un tiers de torsade (nombre de Conway = $-1/3$).

On comprend aisément que n'importe quelle fraction puisse être obtenue avec une séquence appropriée de torsades et de tours. Etonnant, non ? Peut-être, mais ça marche. Pour démêler un *tangle* rationnel quelconque, il suffit d'annuler son nombre de Conway en lui infligeant une série d'opérations appropriée peu importe comment il avait été formé. En conférence, Conway a coutume d'expliquer sa méthode en sortant deux bouts de corde et en orchestrant la danse arithmétique de quatre volontaires autour d'un carré. Vous préférerez peut-être essayer avec des lacets de chaussures. Quoi qu'il en soit, jetez un coup d'œil au *tangle* figurant sur cette page (nombre de Conway : $-3/5$). Il résulte de la séquence $torsader - torsader - torsader - tourner - torsader - torsader - tourner$. Vous pourriez bien sûr le déméler en appliquant la séquence inverse, mais vous pourriez aussi procéder de la manière suivante : *torsader* ($-3/5 + 1 = 2/5$), puis *tourner* (-1 divisé par $2/5 = -5/2$), puis *torsader* trois fois ($-5/2 + 3 = 1/2$), *tourner* (-1 divisé par $1/2 = -2$), et enfin *torsader* deux fois ($-2 + 2 = 0$). Essayez !
Cette méthode fonctionne pour une raison : les manipulations correspondant à la torsade et au tour sont les reflets exacts des opérations arithmétiques utilisées pour calculer le nombre de Conway. Autrement dit, l'absence de commutativité affecte de manière similaire les opérations *torsader* et *tourner* d'une part et les opérations plus 1 et prendre l'opposé de l'inverse d'autre part. Par exemple, en prenant par deux fois l'opposé de l'inverse d'un nombre quelconque, on retombe systématiquement sur le même nombre. Transposé dans le langage des *tangles*, cela implique que tourner l'un quelconque d'entre eux deux fois d'affilée devrait redonner le même *tangle*. Pourtant, si l'on tente de tourner deux fois le *tangle* $3/5$, on obtient un *tangle* d'aspect très différent. Il existe néanmoins un moyen de retomber sur la version initiale en manipulant les brins de ce dernier (voir schéma ci-dessous). On peut facilement trouver des relations plus subtiles. Par exemple, pour tout *tangle* rationnel, la séquence d'actions $torsader - tourner - torsader - tourner - torsader - tourner$ donne un *tangle* équivalent. Voyez-vous pourquoi ?

Hamilton

Passionné d'astronomie et d'optique, Hamilton est nommé astronome royal d'Irlande en 1827 à 22 ans. Egalement mathématicien, il a longtemps cherché à généraliser les nombres complexes avec des triplets de réels. Mais en 1843 il réalise soudain, lors d'une promenade dans Dublin, qu'il faut considérer des quadruplets. Sur la pierre d'un pont, il écrit alors les équations

définissant les quaternions, première algèbre non commutative.

Heisenberg

En 1924, Heisenberg définit une loi de multiplication non commutative pour certaines variables quantiques décrivant la position et l'impulsion. Puis il donne les fameuses relations d'incertitude sur ces variables.

Le principe d'incertitude d'Heisenberg peut s'interpréter comme une conséquence de la non-commutativité.

Illustration par un tableau de Magritte

De même que Magritte défie les lois de la réflexion sur le miroir, la géométrie non-commutative malmène l'intuition en supprimant une habitude vieille comme le monde mathématique.

Promenades sur la sphère

Les trajectoires orange et jaune ne se terminent pas au même point, ce qui montre que les opérations "faire route de 100 milles au nord" et "faire route de 100 milles à l'est" ne commutent pas. On voit surtout que pour une distance de 1 000 milles, l'écart à l'arrivée est beaucoup plus grand. La noncommutativité n'affecte donc pas tous les résultats de la même manière.

Pour le mathématicien, cela signifie qu'il faudra modéliser les ensembles non commutatifs au cas par cas : quaternions, nœuds de Conway ou espaces de fonctions en mécanique quantique ne sont pas semblables ; il n'y a pas de non-commutativité universelle.

Non-commutativité et Alain Connes

Les spécialistes de la géométrie non commutative donnent la prépondérance aux fonctions et non plus aux points.

La géométrie non commutative est davantage qu'un simple outil facilitant l'étude de la théorie quantique des champs.

Père de la géométrie non commutative qu'il a développée à partir de 1977, Alain Connes a reçu la médaille Fields en 1982. Connes modélise l'incertitude quantique avec un espace où chaque point a un jumeau indiscernable.

La vérité est mathématique

Alain Connes

Lauréat de la médaille Fields, Professeur au Collège de France, organisateur de la "Rencontre du millénaire", Alain Connes est l'un des grands "découvreurs" de notre époque. Défenseur de la doctrine platonicienne selon laquelle le monde mathématique a une existence indépendante des constructions mentales, il vient de publier "Triangle de pensées", un livre d'entretiens avec André Lichnerowicz et Marco Schützenberger.

TANGENTE : Vous êtes le plus connu des mathématiciens français, mais vous l'êtes moins que d'autres scientifiques, les prix Nobel de physique, par exemple. Pourtant, la médaille Fields est en mathématiques l'équivalent du prix Nobel, et vos travaux figurent parmi ceux qui jouissent de la plus importante reconnaissance mondiale. On ne sait donc que peu de choses de vous. Einstein affirmait que l'univers appartenait aux monomaniaques. Avez-vous d'autres centres d'intérêt que les mathématiques ou la physique quantique ?

ALAIN CONNES : Les scientifiques connus du public ont tout fait pour qu'on parle d'eux. Pierre-Gilles de Gennes, par exemple, n'a pas hésité à faire le tour des établissements scolaires ou à prendre des positions discutables. Pour répondre à votre question, bien sûr qu'il y a d'autres activités dans la vie d'un chercheur ! La concentration fatigue. La musique, par exemple, permet de se libérer d'une certaine anxiété suscitée par cet excès de concentration.

Le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.

C'est ce qui m'arrive quand je joue du piano, surtout quand j'improvise. J'ai appris le piano à 5 ans, dans la ville de Draguignan où j'ai passé ma petite enfance. Puis je l'ai interrompu lorsque mon père, qui pensait que c'était préférable pour mon éducation, s'est installé à Marseille, adoptant pour la circonstance une vie dangereuse : d'inspecteur des contributions, il est devenu chef d'une brigade d'intervention qui arrêtait des trafiquants.
En reprenant le piano à 20 ans, je n'avais rien perdu de mes qualités (je peux jouer n'importe quel morceau d'oreille), mais j'ai eu du mal à me remettre à la discipline du solfège.

TANGENTE : La musique fait bon ménage avec les mathématiques, c'est connu. Avez-vous dû faire un choix entre disciplines littéraires et scientifiques ?

ALAIN CONNES : A passer des mathématiques à la musique, on ne ressent pas de véritable rupture. La similitude des structures ne peut être niée. Il y a là quelque chose de très profond. Songez au développement en fractions continues

Revue Tangente, août-septembre 2000, n° 76, © Tangente, l'aventure mathématique.

de $\log 3/\log 2$ et à la partition du "Clavier bien tempéré" de J.-S. Bach. Mais j'ajouterai que le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.
Pour les disciplines littéraires, j'ai mis plus de temps à mûrir. Aujourd'hui, en revanche, j'apprécie hautement la littérature.

Tangente : Von Neumann aimait le gin, Hardy s'intoxiquait à la cigarette, Erdös avalait de la Benzédrine. D'après-vous, peut-on se dispenser de drogues dans une activité de recherche ?

Alain Connes : Moi, je suis drogué au café. J'ai un autre stimulant : l'agression des autres. Lorsque je subis des attaques ou des préjudices, cela décuple mon énergie. Le premier exemple auquel je pense est une affaire de plagiat dont j'ai été victime alors que j'étais jeune et naïf. J'écrivais des lettres de vingt pages pour leur faire part de mes progrès à des chercheurs qui travaillaient sur le même thème que moi. Une fois, un de mes "espions" dans l'ex-Union Soviétique me rapporta un fascicule recensant mes dernières trouvailles sous la signature d'un mathématicien dont je tairai le nom. Le milieu scientifique n'échappe pas aux margoulins. Le plagiaire en question s'estimait-il protégé par le rideau de fer ? Toujours est-il que j'ai attendu une occasion favorable, qui s'est présentée aux Etats-Unis, pour le mettre en face de son imposture.

Tangente : Comment travaillez-vous ? Quelle est la part de la recherche dans votre emploi du temps ?

Alain Connes : Avec l'expérience, j'ai mis au point une méthode pour ne pas travailler dans le vide, et éviter que la mémoire de moments de recherche me trahisse : mes carnets. Ecrits au crayon mais très proprement, ils recèlent tous mes calculs et toutes mes idées qui ont abouti à quelque chose. D'un style plus libre que dans des articles, ils sont rigoureusement tenus à jour, au prix d'une ascèse quelquefois contraignante. Une sorte de "journal scientifique". J'ai aujourd'hui cent carnets.
Il m'est arrivé de passer trois semaines sur le même calcul, à raison de huit heures par jour, pour vérifier un résultat (nous étions deux à calculer indépendamment). Il m'arrive aussi, par exemple après l'intense période de recherche que représente un cours au Collège de France, de rester un mois à me consacrer à la littérature.

La recherche en temps réel

Un cours au Collège de France est un exercice extraordinaire de recherche en temps réel. Comme vous le savez, les cours ne doivent pas porter sur des sujets ayant déjà fait l'objet de publication. Alors, on prépare une piste, et on la suit, quinzaine après quinzaine, avec l'obligation d'apporter, d'un cours sur l'autre, de nouveaux résultats. Quelle stimulation ! La moitié de mes résultats de cette année a été produite pendant cette période de cours ! L'obligation de donner quelques cours - à dose homéopathique - est peut-être la seule chose qui manque au système français du CNRS, par ailleurs fort bon.

Tangente : Nous avons un bon système de recherche en France ?

Alain Connes : Excellent. Je parle du CNRS et non des enseignants-chercheurs tiraillés entre deux missions incompatibles. A l'étranger, les situations des chercheurs sont fortement dépendantes de leur densité de publication. Vous connaissez le slogan "Publish or Perish". Alors, on est tenté de s'intéresser à des problèmes mineurs, pour faire paraître régulièrement des articles, au détriment des problèmes profonds, conceptuels. Savez-vous que Wiles, qui, pour parachever la démonstration du théorème de Fermat, n'a pas publié d'articles pendant quelques années, a failli perdre son poste ?

Tangente : Les sept problèmes du millénaire sélectionnés par le Clay Mathematic Institute sont conceptuels ? Est-ce pour cela qu'aucun d'entre eux ne peut être compris par le commun des mortels ?

Alain Connes : Les sept problèmes résument l'inconnu d'un sujet, voire d'une branche des mathématiques, puisqu'ils ont été choisis pour recouvrir l'ensemble des domaines étudiés par les mathématiques. On ne peut donc les expliquer simplement, sauf à décrire en détail l'historique de chaque sujet. Des questions explicables en peu de mots à un public non averti peuvent être intéressantes, elles resteront anecdotiques, sauf exception. Le miracle de Fermat, c'est qu'un problème a priori mineur a pu être résolu parce qu'on l'a transformé, quelques siècles plus tard, en problème conceptuel.

Tangente : Il reste une place pour la recherche en amateur ?

Alain Connes : Bien sûr ! Je pense même que ce sont des non professionnels qui trouvent souvent les choses les plus merveilleuses ! Je pense, par exemple, à l'algorithme de Lucas (voir en fin d'article). Mais il est peu vraisemblable que des amateurs résolvent une des sept questions Clay.

Tangente : Cette difficulté n'a pas gêné la médiatisation très forte de leur proclamation. En aurait-on parlé autant s'il n'y avait pas eu les millions de dollars ?

Alain Connes : Non, bien sûr ! Même ainsi, ce n'était pas gagné d'avance. Il a fallu déployer une énorme énergie pour faire de cette conférence une réussite. Mais une telle organisation est intéressante, et reposante pour le cerveau. Nous avons bénéficié de circonstances favorables, le travail fait par les différents acteurs de l'année mondiale des mathématiques, l'efficacité du service communication du Collège de France...
Mais j'ai craint jusqu'au bout que la presse, ou même les mathématiciens, ne répondent pas à notre invitation.

Un continent à explorer

Tangente : Il est important que la presse parle de mathématiques ?

Alain Connes : Vital. Il faut que l'opinion publique, en particulier les jeunes en formation, comprennent ce que sont les mathématiques, et ce qu'elles ne sont pas.
Qu'elles sont à l'opposé de ce qu'Allègre a dit d'elles. Qu'elles n'ont pas vocation à être un instrument de sélection, qu'elle ne sont d'ailleurs plus. Qu'en aucun cas, et jamais, elles ne pourront être remplacées par des ordinateurs.
Qu'elles sont une irremplaçable usine à concepts.
Qu'elles constituent un continent à explorer qui n'attend que ses découvreurs.

Tangente : Un continent à explorer, c'est l'approche platonicienne que vous défendez depuis votre livre d'entretiens avec Jean-Pierre Changeux. Cette fois, dans "Triangle de pensées", les interlocuteurs sont des mathématiciens, aujourd'hui disparus. Le dialogue est plus crédible. car dans le premier livre, on avait souvent l'impression que Changeux ne comprenait rien à vos propos. Un livre passionnant, mais au prix de quels efforts de compréhension ! Pour qui ce livre est-il écrit ?

Alain Connes : C'est vrai que le livre est difficile. Un de ses buts est de faire comprendre aux mathématiciens eux-mêmes les conséquences du théorème de Gödel. Une grande découverte du siècle, avec ses conséquences philosophiques.

Tangente : L'autre partie du livre est consacrée aux liens avec la physique, la physique quantique en particulier. Vous êtes au fait, si ce n'est au cœur, des derniers états de la recherche en physique théorique. Y a-t-il beaucoup d'autres mathématiciens dans ce cas ?

Une explication à a renormalisation

Alain Connes : La physique utilise la géométrie non commutative. Et j'ai eu la satisfaction extraordinaire d'apporter, avec le physicien Dirk Kreimer avec qui je travaille ici à l'IHES, une explication à la renormalisation (voir définition en fin d'article) en la reliant au vingt-et-unième problème de Hilbert, qui fait appel aux mathématiques les plus profondes.
C'est vrai que les mathématiciens n'abordent pas toujours les problèmes de physique comme il le faudrait. Il y a ceux qui les sortent de leur contexte pour les résoudre comme des problèmes de mathématiques, et à l'opposé ceux qui cherchent carrément à lire dans la pensée de Dieu.
Moi, ce qui m'intéressait, c'était de savoir pourquoi les physiciens utilisaient telle ou telle recette, et pourquoi elle marchait. Et nous avons fini par trouver !
Il faut dire que tout le monde n'a pas la chance d'avoir, comme ici à l'IHES, des chercheurs de haut niveau de l'autre discipline à proximité. C'est presque par hasard que j'ai rencontré Dirk Kreimer, en allant écouter une de ses conférences.

Tangente : Cela serait exceptionnel qu'un mathématicien obtienne, après la médaille Fields, le prix Nobel de physique ! Pourquoi n'avez-vous pas invité des physiciens à vos entretiens de "Triangle de pensées" ? A quand des entretiens avec un philosophe ?

Alain Connes : C'est vrai, nous aurions pu inviter un physicien. Cela s'est trouvé comme cela. Mais ce furent des moments extraordinaires. Aujourd'hui, chaque fois que je relis ce livre, j'entends leurs voix. Un entretien avec un philosophe ? Curieusement, j'ai peur que nous ayons du mal à trouver un langage commun. Je redoute les tiroirs, la classification. J'apprécie la clarté de pensée, mais je crains une philosophie qui ne se heurte pas à une réalité.
Je préfèrerais carrément un poète ! J'ai plus confiance dans la poésie que dans la philosophie.

Tangente : Pourtant, même à votre corps défendant, vous êtes vous-même un philosophe. Votre conception de la vérité mathématique est une philosophie. Vous avez affirmé dans La Recherche : "On s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique". Qu'entendez-vous par là, et y voyez-vous une des raisons de la "redoutable efficacité des mathématiques" ?

Alain Connes : Les grandes découvertes nous le disent : rien n'est trop beau pour être vrai. Considérez d'un côté les trajectoires paraboliques, de l'autre côté les orbites elliptiques. Newton arrive. Une équation, quelques principes et tout s'éclaire. Envisagez maintenant une idée terriblement abstraite : le principe d'exclusion de Pauli. Et qu'obtient-on à la sortie ? Le tableau périodique des éléments de Mendeleïev. Si vous passez l'effroyable complexité du monde matériel à travers le tamis de la vérité scientifique, que reste-t-il ? De merveilleuses pépites mathématiques.

Propos recueillis par Francis Casiro et Gilles Cohen

Textes des encarts

La renormalisation

Les équations de la théorie quantique des champs engendrent des infinis et des divergences indésirables.
J. Schwinger, R. Feynman, S. Tomonaga et F. Dyson résolurent partiellement le problème aux alentours des années 50.
La théorie de la renormalisation permet d'escamoter par un tour de passe-passe mathématique les infinis qui pénalisaient la théorie.
Par exemple, un électron ne peut s'imaginer sans son champ électromagnétique. L'idée est de dissocier l'électron de sa charge, d'attribuer au premier une masse infinie et à la seconde une énergie infinie, et de s'arranger pour que les contributions réciproques se compensent afin de donner un résultat fini qui coïncide

avec la quantité observable.

Le test de primalité de Lucas-Lehmer

$2^p - 1$ est un nombre premier si et seulement si $2^p - 1$ divise $L(p-1)$, où $L(n)$ est la suite définie par $L(1) = 4$ et $L(n+1) = L(n)^2 - 2$ pour $n > 1$.
On a successivement, $L(1) = 4, L(2) = 14, L(3) = 194, L(4) = 37\ 634$. Ainsi, $15 = 2^4 - 1$ n'est pas premier car 15 ne divise pas $L(3) = 194$. En revanche, $31 = 2^5 - 1$ est premier car 31 divise $L(4) = 37\ 634 = 31 \times 1214$.

Ordinateur : le meilleur et le pire

Tangente : Quelle est donc la place de l'ordinateur dans la recherche mathématique ? Dans quelle mesure l'Internet a-t-il accéléré la vitesse de la transmission de l'information ? La masse des informations ne devient-elle pas démentielle ?

Alain Connes : Mon opinion sur l'ordinateur est contrastée. Un ordinateur peut être un excellent assistant, mais il ne faut pas lui donner plus d'importance que cela.
Oui, pour la circulation des idées et des informations. Avoir accès de manière instantanée aux dernières recherches, pouvoir lire des abstracts, consulter des encyclopédies électroniques vous donnant de manière ramassée les bonnes définitions et les théorèmes essentiels, facilitent grandement la vie d'un chercheur et représentent un gain de temps formidable. Alors, tout cela représente une masse d'informations considérable, mais les outils existent pour la digérer. Les choses se simplifient avec le temps. On a coutume de dire que les derniers mathématiciens universels, à pouvoir embrasser l'ensemble des connaissances, furent Hilbert et Poincaré. Ce n'est que partiellement vrai.
En dehors de cela, l'ordinateur est, pour moi, essentiellement nocif. Faites l'expérience. Arpentez les couloirs d'un centre de recherche. Et que voyez-vous dans les bureaux ? Des chercheurs vissés à leur machine, consultant leur courrier électronique ou tapant un article. Ce n'est pas du boulot de chercheur. Autrefois, avant l'avènement de l'ordinateur, quand on pénétrait dans un bureau, on se cognait à un matheux allongé sur le plancher, les yeux fixés au plafond, ruminant une idée ou en quête d'une illumination. "Sécher" devant sa feuille blanche est indispensable. L'ordinateur propose une échappatoire nuisible. On devrait imposer chaque mois une semaine sans e-mails.
Il existe un argument plus subtil à opposer à l'engouement pour l'ordinateur. La puissance calculatoire de la machine nous prive du sentiment, de l'intuition que peuvent apporter de longs calculs faits à la main. Je vous ai raconté qu'avec un collègue, chacun de son côté, nous nous sommes lancés dans une longue suite de calculs. On a obtenu le même résultat. Résultat décevant par ailleurs. On était parvenu à une certaine somme de trente-six termes. Si on changeait le signe de huit termes, on tombait sur un cocycle. Résultat qui lui était pertinent. On a pensé à une erreur. On a recommencé nos calculs, en pure perte. En se concentrant sur les détails du calcul, on a constaté l'oubli d'une donnée qui contribuait de manière négative à deux fois l'apport des huit termes. On retombait ainsi sur

nos pieds. A travers des détails de mille petits calculs, on a vu poindre l'esprit d'une algèbre de Hopf. La machine nous aurait donné un résultat brut, inexploitable, nous privant ainsi d'un résultat intéressant.
D'ailleurs vous pouvez constater qu'il n'y a pas d'ordinateur dans mon bureau.

Questions posées à Alain Connes dans le livre Mathématiques, un dépaysement soudain

Une démonstration est-elle éternelle ? Un théorème est-il éternel ?

La position du raisonnement mathématique par rapport à la vérité mathématique est analogue à celle des déductions du tribunal par rapport à la réalité extérieure. Un raisonnement juste est éternel mais il ne dévoile qu'une réalité partielle. Si l'on s'en tient même aux propriétés des entiers naturels, la plupart des propriétés vraies sont non démontrables à partir des axiomes de Peano. Un exemple simple est le fait que ce soit la tortue qui gagne dans la fable suivante du lièvre et de la tortue. L'on part d'un entier n par exemple $n = 9$ et on l'écrit en base 2. $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi tous les exposants en base 2, et ainsi de suite s'il y a à nouveau des exposants, de sorte que dans notre exemple on écrit l'exposant $3 = 2 + 1$ et $9 = 2^{2+1} + 1$. Le lièvre arrive et remplace tous les 2 par des 3, ce qui remplace 9 par $3^{3+1} + 1$, la tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 3, puis remplace tous les 3 par des 4, ce qui dans notre exemple donne 4^{4+1}. La tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 4, ce qui donne $3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3$, puis remplace tous les 4 par des 5, la tortue soustrait 1 et ainsi de suite. Eh bien, l'on sait démontrer grâce à la théorie des nombres ordinaux que, comme dans la fable, c'est la tortue qui gagne, c'est-à-dire que quel que soit l'entier n dont on parte, on arrivera toujours à 0 au bout d'un nombre fini d'étapes, malgré les bonds prodigieux du lièvre ! L'on sait aussi que l'énoncé "pour tout n c'est la tortue qui gagne" n'est pas démontrable au sein de l'arithmétique de Peano, de même que la non-contradiction de cette arithmétique n'est pas démontrable en son sein ! On peut comprendre que le nombre de pas nécessaires est extrêmement grand en prenant l'exemple très simple $n = 4$ pour lequel le nombre de pas est de l'ordre de $10^{121210694}$.

Vous souvenez-vous d'un rêve mathématique ?

La recherche mathématique se nourrit du "rêve" bien que celui-ci n'ait aucun droit de cité officiel, mais reste l'expression la plus pure de l'intuition. Mon "rêve" actuel a trait aux nombres que l'on définit, comme le faisait Euler, à partir d'expressions asymptotiques mais divergentes tels les nombres qui apparaissent naturellement dans les calculs de physique quantique. Ils sont

définis de manière ambiguë et cette ambiguité n'implique plus des groupes finis comme dans la théorie de Galois, mais des groupes connexes comme ceux qui font encore défaut dans la théorie globale des corps de nombres.

Lorsque vous fermez les yeux, voyez-vous quelque chose de mathématique ?

Le propre du mathématicien est de créer des images mentales, c'est ainsi qu'une page de formules "parle" à un mathématicien, mais ces images mentales ont peu en commun avec la figuration du monde extérieur et n'ont de "sens" que de manière très intériorisée et difficilement transmissible.

Misha Gromov distingue quatre mystères dans le monde : la nature des lois de la physique, le mystère de la vie, le rôle du cerveau, le mystère de la structure mathématique reliée aux trois premiers. En voyez-vous autant, moins ou plus ?

L'on peut formuler nombre de questions. L'une des évolutions actuelles les plus frappantes est l'émergence progressive mais bien réelle d'une "super intelligence" qui se traduit par exemple au niveau de l'expérimentation en physique par l'expérience du LHC au CERN ou bien au niveau de la mémoire globale par Google. La puissance de l'ordinateur comme assistance au mathématicien est indéniable. Il reste heureusement ce terrain pour le moment inaccessible de l'intuition, de l'analogie où le cerveau humain a encore une avance considérable, que nous devons chérir et préserver à tout prix.

Le périple du mathématicien est un voyage dans une autre géographie, dans un autre paysage, au cours duquel il se heurte à une autre réalité. Cette réalité mathématique est tout aussi dure, tout aussi résistante, que la réalité matérielle dans laquelle nous vivons.

Texte extrait du livre Les déchiffreurs

L'impitoyable réalité

Préambule

Ce texte décrit une relation très personnelle avec les mathématiques, n'oublions pas que chaque mathématicien(ne) est un "cas particulier" et ce qui est dit ci-dessous n'engage que son auteur et ne saurait en aucun cas passer pour un point de vue "générique".

Les mathématiques sont de mon point de vue, avant toute chose, l'outil de pensée, le générateur de concepts, de loin le plus élaboré que nous ayons, simplement pour comprendre, en particulier, le monde qui nous entoure. Les nouveaux concepts sont engendrés par un lent processus de distillation dans l'alambic de la pensée.

Il est tentant au départ de vouloir diviser les mathématiques en domaines séparés comme la géométrie, science de l'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, qui donne accès à l'infini et au continu, la théorie des nombres, etc., mais ceci ne rend pas compte d'un trait essentiel du monde mathématique, à savoir qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence.

Acte de rébellion

En mathématiques de mon point de vue, le b a-ba c'est que l'on ne devient pas mathématicien en apprenant, on devient mathématicien en faisant des mathématiques. Donc ce n'est pas le "savoir" qui compte, ce qui est important, c'est le savoir-faire. Bien entendu, les connaissances sont absolument nécessaires - et il n'est pas question de faire table rase des savoirs acquis - mais j'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant devant un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.

Ainsi, à mes yeux, on commence à devenir mathématicien plus ou moins par un acte de rébellion !

En quel sens ? Au sens où le futur mathématicien va commencer à réfléchir à un certain problème, et il va s'apercevoir qu'en fait, ce qu'il lit dans la littérature, ce qu'il lit dans les bouquins, ne correspond pas à la vision personnelle qu'il a du problème. Bien sûr, très souvent, cela correspond en

fait à de l'ignorance, mais cela est sans importance du moment qu'il s'appuie sur une intuition personnelle et, bien entendu, sur la démonstration. Ainsi peu importe, parce qu'il va comprendre à cette occasion qu'en mathématiques il n'y a pas d'autorité ! Un élève de douze ans peut très bien tenir tête à son professeur s'il a trouvé une démonstration de ce qu'il avance et que cela singularise les maths par rapport aux autres disciplines où le professeur aurait beau jeu de se retrancher derrière des connaissances que l'élève n'aura pas. Un enfant de cinq ans peut dire à son père "Papa, il n'y a pas de plus grand nombre" et en être sûr, non parce qu'il l'a lu dans les livres mais parce qu'il en a trouvé une démonstration dans sa tête... Il y a un espace de liberté grand ouvert à celui qui sait le découvrir en respectant ses règles. Et la première chose qui compte, c'est de devenir soi-même sa propre autorité. C'est-à-dire, pour comprendre quelque chose, ne pas chercher tout de suite à vérifier si c'est écrit dans un livre, non ! Cela ne ferait que retarder l'éveil à cette indépendance. Ce qu'il faut, c'est vérifier dans sa tête que c'est comme ça. A partir du moment où l'on a compris cela, on peut, petit à petit, devenir très familier avec une toute petite portion du territoire mathématique et commencer un long parcours à travers ces territoires merveilleux que l'on essaie de dévoiler depuis son repère personnel.

Elan poétique

On peut dire qu'il y a deux aspects dans la tâche du mathématicien, il y a celui qui consiste à démontrer, à vérifier, etc., et qui demande une intense concentration, qui demande un rationalisme exacerbé, mais heureusement, il y a aussi l'aspect vision ! Et cet aspect vision, c'est un peu comme une mise en mouvement par l'intuition, qui n'obéit pas à des certitudes mais est plus proche d'une attirance de nature poétique. En simplifiant, il y a deux temps dans la découverte mathématique. Il y a un premier temps dans lequel l'intuition n'est pas encore formulable en termes transmissibles de manière rationnelle. Et dans cette période-là, ce qui compte, c'est la vision ! Non pas le côté statique, mais un espèce d'élan poétique.

Cet élan poétique est presque impossible à transmettre par les mots. Lorsqu'on essaie de le transmettre, lorsqu'on essaie de le dire, on arrive presque à le statufier, pour ainsi dire, et on perd cette espèce de mouvement qui est essentiel dans la découverte.

Ensuite, lorsqu'on a mis en place suffisamment de pièces du puzzle, et qu'on s'aperçoit que cette vision se traduit par des résolutions de problèmes,

les choses changent. Par exemple, lorsque j'ai commencé à devenir mathématicien, une des choses qui m'a le plus frappé dans ce que j'avais trouvé - c'était au temps de ma thèse avec Jacques Dixmier - c'est qu'une algèbre non-commutative tourne avec le temps ! Ce que j'avais montré, c'est qu'en fait une algèbre non-commutative a une évolution dans le temps, qui lui est donnée de manière complètement canonique. Plus précisément, l'évolution qui était donnée par la théorie de Tomita, mais qui dépendait d'un état, ne dépendait en fait de cet état que modulo les automorphismes intérieurs, qui sont triviaux, qui n'existent pas. Donc ce que cela montrait, c'était que la non-commutativité engendrait le temps ! A partir de rien ! Simplement ! Comme ça ! Bien sûr il en résultait tout de suite qu'une algèbre a quantité d'invariants comme par exemple ses périodes, c'est-à-dire les temps t où l'évolution est triviale. Mais ces résultats, bien que parfaitement formulables et transmissibles n'épuisent pas le contenu poétique, la mise en mouvement merveilleuse de la trouvaille initiale.

Réalité mathématique

Il y a des poètes que j'admire beaucoup, comme Yves Bonnefoy, pour leur proximité au niveau méthodologique avec les mathématiques. Ce qui distingue, à mes yeux, le poète du mathématicien est que le matériau brut du poète, c'est l'expérience humaine dans la réalité matérielle. Et la poésie a pour ingrédient principal ce heurt entre l'être intérieur d'un individu et la réalité extérieure, qui tout le temps nous surprend par sa brutalité. Alors que le périple du mathématicien est un voyage dans une autre géographie, dans un autre paysage, au cours duquel il se heurte à une autre réalité. Cette réalité mathématique est tout aussi dure, tout aussi résistante, que la réalité matérielle dans laquelle nous vivons. Et la période qui est la partie vision ne suffit pas pour faire des mathématiques. C'est-à-dire qu'en contrepoint de cette partie vision, dans celle qui vient après la démonstration il y a les heures d'incertitude, de souffrance, qui consistent à avoir toujours peur de s'être trompé. C'est un peu la descente de la paroi qui consiste, cette fois, à être constamment obligé de regarder... On est obligé constamment de se dire : "Tiens, j'aurais pu me tromper ici, peut-être me suis-je trompé". On n'en sait rien, on a toujours peur ! Il arrive qu'on passe des heures et des heures d'anxiété terrible, justement parce qu'on se heurte à une vraie réalité. Donc, ce n'est pas la réalité au sens ordinaire, mais elle est sans doute encore plus impitoyable.

La notion de vérité s'adresse alors à un monde qui est autre, qui n'est pas le monde de l'expérience humaine dans la réalité extérieure, mais qui est celui de la réalité mathématique. Le point crucial à comprendre est qu'alors que tant de mathématiciens ont passé leur vie à explorer ce monde, ils sont tous d'accord sur ses contours et sa connexité : quelle que soit l'origine de son itinéraire, un jour ou l'autre si le parcours est assez long et si l'on se garde de se confiner dans une aire de spécialisation extrême, l'on atteindra l'une de ces cités bien connues comme les fonctions elliptiques, les formes modulaires, les fonctions zêta, etc. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connexe". Bien sûr cela ne signifie pas que toutes ses parties se ressemblent et Grothendieck dans *Récoltes et semailles* décrit ainsi son passage des paysages de l'analyse où il commença son parcours à ceux de la géométrie algébrique :

"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective, certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller..."

Alexandre Grothendieck

Galois

Ce que Galois a compris, d'une certaine manière, et c'est un peu le point de départ des mathématiques vraiment modernes, c'est qu'en fait, il faut être capable d'aller au-delà des calculs. C'est-à-dire ne pas faire les calculs, mais *en pensée* les faire ! Et comprendre quelle sera leur nature, comprendre quelles seront les difficultés qui vont se présenter, etc., mais sans vraiment effectuer concrètement les calculs, comprendre de quelle forme sera le résultat. Quelle symétrie aura le résultat. Et donc, dépasser cette espèce de gangue dans laquelle on s'engluerait facilement si l'on ne levait pas le nez du guidon. Il faut essayer d'en sortir par le haut, de réfléchir au niveau des symétries, etc.

"Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est selon moi, la mission."

Evariste Galois

Alors que ses prédécesseurs recherchaient des fonctions symétriques des racines d'une équation, Galois, lui, commence par briser la symétrie, pour y voir clair... Son point de départ est le choix arbitraire d'une fonction des racines qui n'admet *aucune* symétrie. La merveille est que le groupe d'invariance qu'il déduit du passage de cette fonction aux racines est en fait indépendant du choix arbitraire initial.

Loin d'être passées de mode, les idées de Galois irriguent encore les mathématiques contemporaines, simplement par leur simplicité et le mouvement qu'elles engendrent. La théorie des motifs due à Grothendieck est une généralisation naturelle de la théorie de Galois en dimension > 0 c'est-à-dire, si l'on veut, aux polynômes à plusieurs variables. Ces développements actuels, comme ceux de la théorie de Galois différentielle, se situent directement dans la dynamique des idées de Galois. Il convient de citer la fin de sa lettre testament.

"Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori *dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore assez développées sur ce terrain qui est immense."*

Evariste Galois

Algèbre et musique

Il est crucial, à mes yeux, pour un enfant, d'être exposé très tôt à la musique. Je pense qu'exposer un enfant à la musique, vers l'âge de cinq ou six ans, permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue, de cette richesse incroyable purement visuelle, qu'un enfant acquiert très tôt et qui donc, en fait, est reliée à la géométrie. La musique permet de l'équilibrer par l'algèbre, c'est-à-dire qu'elle s'inscrit dans le temps, exactement comme l'algèbre s'inscrit dans le temps. Dans les mathématiques il y a cette dualité fondamentale entre d'un côté la géométrie, qui correspond aux aires visuelles du cerveau, et qui donne une intuition instantanée, immédiate. On voit une figure géométrique, boum ! C'est ça, c'est tout, on

n'a même pas besoin d'expliquer, on n'a pas envie d'expliquer. Et d'un autre côté, il y a l'algèbre. L'algèbre, cela n'a rien de visuel, en revanche, cela a une temporalité, ça s'inscrit dans le temps ! C'est le calcul, etc. C'est quelque chose qui évolue, et c'est quelque chose qui est très proche du langage et qui donc a la précision diabolique du langage. Et l'on peut percevoir cette puissance, l'élaboration de l'algèbre, à travers la musique. Donc, pour moi, il y a une connivence incroyable, justement, entre la musique perçue comme cela, et l'algèbre. Par exemple, j'adore certains préludes de Chopin parce que je trouve qu'ils ont exactement cette merveilleuse propriété de condensation, de distillation. C'est une musique qui arrive dans une pièce un petit peu comme si la fenêtre s'ouvrait brutalement par un coup de vent, et puis repart de l'autre côté. Condenser une idée sous sa forme la plus limpide, sous la forme la plus pure qui soit... L'algèbre, c'est ça, d'une certaine manière.

Conseils

Je terminerai ce texte sur quelques conseils "pratiques".

Faire un tour
Une pratique bien saine, quand on est aux prises avec un problème très compliqué (souvent impliquant des calculs), est de partir faire un long tour à pied (sans papier ni crayon) et de faire les calculs mentalement (en ignorant l'impression de départ "c'est trop compliqué pour ça"). Même si l'on n'y réussit pas, cela entraîne la "mémoire vive" et aiguise les dents de l'intellect.

Divan
Les mathématicien(ne)s ont en général le plus grand mal à faire comprendre à leur conjoint que le moment où ils travaillent le plus intensément est lorsqu'ils sont couchés dans l'obscurité sur un lit. Malheureusement l'invasion des écrans d'ordinateur et du courrier électronique tend à rendre cette manière de se concentrer de moins en moins courante ; elle n'en est que plus précieuse.

Etre courageux
Il y a deux temps dans la découverte mathématique, il y a un temps dans lequel il faut être courageux : il faut monter le long de la paroi, et ne jamais regarder en bas... Pourquoi ? Parce que si vous commencez à regarder en bas, vous allez dire : "Oui ! Mais bien sûr, Untel a déjà regardé ce problème, il n'est pas arrivé à le résoudre, donc il n'y a aucune raison que j'y arrive."

Et vous allez trouver trente-six raisons rationnelles qui vont vous empêcher de monter. Donc il faut faire complètement abstraction de cela. Il faut en quelque sorte "protéger son ignorance" pour permettre l'éclosion d'une idée sans la dissoudre prématurément dans le bain des connaissances à l'instant t.

Stress
Il arrive souvent dans la vie d'un mathématicien (souvent dès le début) d'être confronté à des difficultés dues à l'âpreté de la compétition. Par exemple, on reçoit un "preprint" d'un compétiteur sur le même sujet que celui sur lequel on travaille et l'on sent une pression déraisonnable pour publier vite. La seule recette que je connaisse dans ces cas-là est d'essayer de transformer ce sentiment de frustration en énergie pour travailler plus dur.

De mauvaise grâce
Un de mes collègues me confiait il y a longtemps : "Nous (les mathématiciens) travaillons pour l'approbation à contrecœur de quelques amis." Il est vrai que comme le travail de recherche est de nature plutôt solitaire, le chercheur ressent le besoin d'approbation, d'une manière ou d'une autre. En vérité il ne faut pas attendre grand-chose, les mathématiciens sont avares de louanges. La vérité est qu'il n'y a qu'un seul véritable juge qui compte en la matière, c'est soi-même. Et il n'y a pas moyen de transiger avec celui-là. Trop se préoccuper de l'opinion des autres est simplement une perte de temps, aucun théorème n'a été jusqu'à présent démontré par référendum et comme le dit Feynman : "Why do you care what other people think !"

Le point de vue d'Alain Connes [1]

Dès que j'ai su compter, j'ai été fasciné par la clarté des nombres, et ce sentiment de sérénité a été amplifié à mesure que j'ai assimilé de nouvelles connaissances. Je n'ai toutefois jamais eu l'impression que les mathématiques étaient d'accès facile : ma démarche est assez lente... mais pugnace. En recherche, les mathématiciens dits «rapides», s'ils voient et formulent très vite la difficulté centrale d'un problème, ne le résolvent pas plus rapidement que les autres : une chose est d'arriver au pied du mur, une autre de le sauter. Ce qui m'attriste un peu dans la sélection par les mathématiques, c'est qu'elle est fondée sur la rapidité à résoudre des problèmes.

J'ai toujours eu le désir de vérifier mon aptitude à surmonter les difficultés ; mes collègues tenaces me sont plus sympathiques et me semblent plus productifs que ceux qui, bien que très rapides, abandonnent trop vite devant l'obstacle. J'ai résolu à 28 ans un problème sur lequel j'ai travaillé un an à temps plein et trois ans à temps partiel.

Bien sûr, il faut faire des gammes pour maîtriser la technique mathématique d'un domaine. La semaine qui suit un mois de vacances est difficile : on se sent «sale», on souffre de courbatures comme un sédentaire après un effort physique. À l'inverse, quand on est immergé dans un sujet, on en maîtrise la technique et on est à l'aise avec sa conscience de mathématicien.

La vie à Draguignan, puis à Marseille, où j'étais lycéen, me laisse un souvenir de soleil. J'aimais le baby-foot et le rugby, et je lisais assez peu : j'avais des préoccupations normales mais non supérieures. L'atmosphère parisienne me surprit : à Marseille, je n'étais pas beaucoup tracassé par mes possibilités

1. extrait d'un Dossier intitulé Les mathématiciens d'un ancien magazine Pour la Science.

intellectuelles ; à Normale et dans le milieu étudiant, tout le monde avait des préoccupations intellectuelles.

Je ne voudrais pas donner l'impression que mon enfance et mon adolescence n'ont pas été studieuses. Mes parents s'occupaient beaucoup de nous, nous faisaient réciter toutes nos leçons deux fois et ne nous accordaient, à mes frères et à moi, qu'un mois de vacances : en dehors de cette période, nous avions des devoirs à faire, ce qui créa entre nous une certaine connivence pour trouver les solutions corrigées des problèmes et les traductions des versions latines. Beaucoup de mes impressions de lycée sont des souvenirs de bon élève : l'affectueuse mais ferme discipline parentale ne laissait pas de place à l'échec. Un des problèmes actuels de l'éducation est que les parents se reposent peut-être trop sur l'école et sont trop stressés ou épuisés pour aider leurs enfants. C'est dans la disponibilité qu'il y a une inégalité sociale, plutôt que dans les capacités techniques des parents à aider les enfants. Comment s'étonner que les enfants laissés sans soutien réussissent mal ? Bien des difficultés à l'école sont d'ordre psychologique et affectif,la non-compréhension des mathématiques par exemple.

Mon examen d'entrée à l'École Normale a été picaresque : j'ai été paralysé d'incompréhension pendant la première épreuve, la composition principale de mathématiques, et j'ai rendu une feuille quasiment blanche ; j'étais obnubilé par un autre candidat qui couvrait à toute allure sa feuille de calculs. En sortant de la salle, je vis en un éclair ce que j'aurais dû faire, constatation qui acheva de me démoraliser. Si des amis ne m'avaient soutenu en m'emmenant à la plage et en me distrayant, je ne serais pas allé aux autres épreuves où je réussis suffisamment bien pour passer l'obstacle. Ainsi j'ai réussi grâce à mes copains ; nous sommes tous, un jour ou l'autre, exposés à un échec que nous surmontons plus facilement quand nous pouvons puiser dans un

réservoir affectif.

Après l'École Normale, nous habitions dans la banlieue Nord de Paris, en dehors de tout. Mes beaux-parents m'avaient prêté un bureau où je travaillais tous les jours, seul. Je me promenais beaucoup et, pendant ces promenades, je réfléchissais au problème qui m'intéressait, et qui me battait dans la tête ; lorsque j'avais trouvé quelque chose, je revenais pour l'écrire dans un de mes cahiers de travail. Une fois par semaine, j'allais à un séminaire, et quand j'avais fait une petite avancée je l'expliquais à mon directeur de thèse, Jacques Dixmier. Je vivais cette journée comme un test de ma compréhension des mathématiques, mais j'avais besoin de l'isolement pour cultiver mon propre jardin mathématique qui combinait l'algèbre et l'analyse. Cette combinaison de sujets était difficile, car elle faisait appel à des sensibilités que les mathématiciens ne développent en général pas simultanément. J'ai bien aimé cette vie qui paraît monacale, car on forme ses outils en attaquant un problème difficile, en dehors de la mode du moment.

En taupe, je m'intéressais déjà à des techniques personnelles, en dehors des sentiers battus : je traduisais les propriétés différentielles en propriétés de différences finies ; j'ai rempli des cahiers de résultats et je regardais tout à partir de ce jardin privé. Quand je suis en voyage, une de mes distractions est d'acheter un cahier ; je le choisis avec un soin maniaque, puis je l'entrepose dans un tiroir, comme un souvenir, pour l'utiliser quelques années plus tard. J'ai ainsi accédé à ce que l'on appelle la réalité mathématique en m'appropriant un petit territoire que j'ai agrandi par la suite. Plus tard, à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, j'ai élargi mon champ d'intérêt de manière naturelle, avec ma méthode personnelle et polarisée de voir les choses. Il y a des domaines des mathématiques qui sont simples, mais que je ne comprends pas, car ils ne s'insèrent pas dans mon domaine de recherches.

J'ai un souvenir précis des circonstances exactes de deux de mes découvertes. Pour la première, j'avais accompagné ma femme en voiture, au lycée où elle enseigne : en revenant, alors que je pensais, croyais-je, à tout autre chose, j'eus la certitude absolue, devant un feu rouge, que les calculs longs et pénibles que je faisais depuis six mois s'éclairaient à la lueur d'une astuce mathématique qui allait devenir classique, le *two by two matrix trick*. Je n'étais pas parvenu à la découverte par un raisonnement, tout s'était passé comme si mon inconscient s'était brutalement exprimé.

La seconde expérience se passe au Canada, où j'avais été envoyé au titre de la coopération. Je faisais régulièrement la même promenade sans progresser d'un millimètre dans mon problème, lorsqu'un jour j'eus l'impression que tout pouvait se débloquer, ce que je vérifiai à ma table de travail. J'eus alors le sentiment de ne pouvoir exprimer ma joie ; des éléments chaotiques et incontrôlables s'organisaient en un tout cohérent.

Le mois qui a suivi a été assez pénible, car je devais remplacer l'intuition par une démonstration rigoureuse et je naviguais d'épouvante en épouvante : ne me serais-je pas trompé ? Le résultat me comblait tellement que je ne pouvais laisser une erreur ou même un doute ; aussi je refaisais cette assez longue démonstration qui fondait mon résultat, dans le bus, quand j'étais invité à dîner, partout. Ensuite j'ai pu la montrer à des collègues. On reproche quelquefois aux mathématiciens d'être introvertis ; comment pourrait-il en être autrement, du moins pendant la période de leur vie où ils cherchent ? Pour naviguer ainsi à l'aveugle dans des zones inexplorées, il faut qu'ils soient persuadés qu'une petite lumière éclairera leurs travaux. Le parcours personnel semble métaphysique, mais il y a une différence fondamentale : la nature universelle de la réalité mathématique. Qu'est-ce que cette réalité mathé-

matique ? En physique on peut définir de façon précise la réalité qui est perceptible par le grand public, même si certains objets de la physique, les particules élémentaires par exemple, ne sont pas directement accessibles aux sens. La réalité mathématique est d'assimilation plus difficile, elle s'acquiert par un sens que l'homme ne possède pas naturellement.

Pour expliquer cette réalité, il ne faut pas choisir un beau théorème car on rentre trop vite dans la technique ; je choisirai plutôt les contraintes qui établissent les limites de l'univers mathématique. Comme un enfant, qui apprend à se déplacer, perçoit les contraintes du monde extérieur en se heurtant à des obstacles, le mathématicien distingue le possible de l'impossible. Abel et Galois ont démontré qu'on ne pouvait résoudre les équations de degré supérieur à 4 avec des radicaux ; c'est par ces impossibilités que la réalité mathématique se manifeste et aussi par la structure harmonieuse que notre invention mathématique élabore. Ainsi la théorie des groupes rassemble en une structure une multitude d'objets et d'opérations mathématiques disparates.

À la différence de la métaphysique, la réalité mathématique est objective : elle n'est pas tangible, mais éternelle et immuable. C'est un monde virtuel non localisé dans l'espace ni dans le temps. La science la plus proche des mathématiques serait, à ce point de vue, la cosmologie qui étudie les propriétés de l'espace et d'un univers également immuable.

On peut se demander pourquoi les mathématiciens ont mis si longtemps pour résoudre des problèmes d'énoncés assez simples comme le théorème de Fermat. Je crois que c'est parce qu'ils ne s'intégraient pas de façon harmonieuse dans l'univers des mathématiques ou encore que l'on ne comprenait pas assez bien la signification du problème posé.

Distinguons, en recherche, les méthodes inductives et projectives ; le théorème de Fermat a été une constatation inductive, il est vérifié par tous les nombres que l'on essaie. Les mathématiciens élaborent des structures pour cerner la vérité de façon projective, établissant des résultats jusqu'à ce que les questions non résolues et pressenties de manière inductive tombent naturellement dans leur escarcelle. C'est alors qu'ils ont l'impression que la question est bien comprise, qu'elle s'insère bien dans le corpus des mathématiques.

Mathématiques
Médaille d'or du CNRS pour Alain Connes

Le CNRS a décerné ce matin la Médaille d'Or 2004 au mathématicien français Alain Connes, l'un des plus grands mathématiciens de notre temps, professeur au Collège de France et l'un des fondateurs de la géométrie non commutative.

Tout au long de sa carrière, Alain Connes s'est intéressé à la résolution des problèmes mathématiques soulevés par la physique quantique et la théorie de la relativité. Il a en particulier révolutionné la théorie des algèbres d'opérateurs et créé une nouvelle branche des mathématiques, la géométrie non commutative. Ses travaux ont été récompensés par la médaille Fields, en 1982 et par le prix Crafoord en 2001. Alain Connes est né en 1947, à Draguignan dans le Var. Elève de l'école Normale Supérieure de 1966 à 1970, il a soutenu sa thèse en 1973. Chargé de recherche au CNRS de 1970 à 1974, il passe l'année 1975 à l'Université de Kingston au Canada dans le cadre de la coopération. A son retour, il est nommé maître de conférence puis professeur à l'Université Paris VI (1976 à 1980). Depuis 1979, il est professeur à l'institut des hautes études scientifiques (IHES) à Bures-sur-Yvette. Directeur de recherche au CNRS de 1981 à 1984, il est depuis cette date titulaire de la chaire d'analyse et de géométrie du Collège de France.

Le fondateur de la géométrie non commutative

Les travaux d'Alain Connes sur les algèbres d'opérateurs et sur la géométrie non commutative, dont il est l'un des fondateurs, sont

Futura Sciences, 10.11.2004,
https://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/mathematiques-mathematiques-medaille-or-cnrs-alain-connes-4776/

issus de la physique quantique et de la recherche d'un cadre mathématique pour expliquer les problèmes qui en découlent. En effet, avec la mécanique quantique et la théorie de la relativité apparaissent des problèmes qui ne peuvent être résolus par l'algèbre et la géométrie classiques, commutatives, c'est à dire où l'ordre des termes d'une opération n'a pas d'importance (A fois B est égal à B fois A). En mécanique quantique, avec l'intervention d'une nouvelle dimension, le temps, certaines opérations ne sont plus commutatives et leur résultat dépend de l'ordre des différents facteurs, d'où les termes d'algèbre et de géométrie non commutatives pour désigner les mathématiques qui s'y appliquent. En 1925, Heisenberg découvre la mécanique quantique. Les algèbres d'opérateurs y jouent un rôle central. Dans les années trente, John Von Neumann, un mathématicien hongrois, développe une théorie des algèbres d'opérateurs dans ce qui est appelé l'espace de Hilbert. C'est seulement entre 1966 et 1971 que des recherches reprennent sur les nombreux problèmes soulevés par les "algèbres de Von Neumann" et restés sans solution. En 1972, Alain Connes commence à s'intéresser à cette question. Au cours des 10 années qui suivent, il va révolutionner la théorie des algèbres d'opérateurs et résoudre la plupart des problèmes de ce domaine. Pour ces travaux, il reçoit en 1983 la médaille Fields, qui récompense les travaux exceptionnels de mathématiciens de moins de 40 ans. Alain Connes est alors âgé de 36 ans.

Poursuivant dans le domaine des mathématiques associées à la mécanique quantique, Alain Connes va ensuite fonder une nouvelle branche des mathématiques, la géométrie non commutative. La géométrie développée depuis Descartes est basée sur la notion de point dont la position est définie par un système de coordonnées dans les trois dimensions de l'espace. Depuis la découverte de la mécanique quantique, la notion de point a laissé la place à la notion "d'états", qui correspond plutôt à un nuage de points, aux diffé-

rents états possibles d'un point dans l'espace à l'image d'un électron autour du noyau d'un atome. Dans cet espace, comme nous l'avons dit précédemment, il arrive que des opérations ne soient plus commutatives et que A fois B par exemple ne soit plus égal à B fois A. La géométrie classique ne permettait pas de résoudre de telles opérations. Alain Connes a imaginé un espace géométrique fictif qui permet de résoudre les algèbres non commutatives. Récemment, ces travaux ont également permis de résoudre d'autres problèmes mathématiques soulevés par la physique quantique. Alain Connes a en particulier travaillé sur le problème de la "renormalisation", qu'il appelle le "tour de passe-passe" imaginé par les physiciens pour éliminer les valeurs infinies qui apparaissent pour la masse de certaines particules élémentaires dans leurs calculs en théorie des champs (une particule ne pouvant avoir une masse infinie). Alain Connes a publié plus de 150 articles scientifiques. Il a également publié un livre, *Géométrie non commutative*[1], qui fait référence dans le domaine et a été traduit et publié en anglais. Il a par ailleurs écrit deux livres sur la pensée mathématique : *Matière à pensée*[2] en collaboration avec le neurobiologiste Jean-Pierre Changeux, et *Triangle de pensées*[3], écrit avec deux autres mathématiciens. Il a des responsabilités éditoriales dans de nombreuses revues internationales de mathématiques.

"Laisser parler l'intuition"

Interrogé sur son parcours, Alain Connes évoque ce cours de sixième où un professeur de mathématiques trop exigeant posait aux élèves des problèmes normalement destinés à des élèves de terminale. Appelé au tableau, Alain Connes énonça la solution d'un tel problème sans savoir lui-même comment

1. Géométrie non commutative, Alain Connes, éd. InterEditions, 1990
2. Matière à pensée, Jean-Pierre Changeux, Alain Connes, éd. Odile Jacob, 1989
3. Triangle de pensées, Alain Connes, André Lichnerowicz, Marcel-Paul Schützenberger, éd. Odile Jacob, 2000

il était parvenu au résultat. C'est l'idée qu'il se fait de la capacité de chacun à aborder les mathématiques. "*Il faut laisser parler l'intuition, présente en nous mais que la plupart des gens refoulent*". Surtout, il ne faut jamais accepter ni autorité ni dogme, "*la seule autorité en maths, c'est soi-même*". Sur le mode de travail des mathématiciens, Alain Connes raconte l'anecdote du chercheur trouvé par un visiteur allongé sur son bureau, dans le noir, les yeux au plafond. "*Le mathématicien doit avoir l'ensemble du problème à résoudre en tête*", et il peste contre l'ordinateur, qui certes, peut être une aide intéressante pour le calcul mais représente surtout une sollicitation permanente qui empêche de penser. **Il est convaincu que pour bien travailler, il ne faut pas être un suiveur et qu'il faut protéger sa propre ignorance**. Il oppose le mode de travail des mathématiciens et celui des physiciens : "*les physiciens sont des bosons (qui s'attirent), les mathématiciens sont des fermions (qui se repoussent), il faut lutter contre la "bosonisation" des mathématiciens*". Pianiste de talent, il dit "apprendre autant en déchiffrant les partitions de Chopin qu'en lisant des articles de mathématiques".

L'imagination joue un rôle crucial en mathématiques
Alain CONNES

Alain Connes, mathématicien, explique comment sa discipline peut décrypter le monde.

"Les maths c'est comme l'humour", osait l'un de vos collègues, "si on le comprend, on est du club, sinon, on est exclu". L'incommunicabilité des maths est-elle irréductible ?

Oui, et j'aborderai cette question en parallèle avec la notion d'imagination en mathématiques. Cette incommunicabilité est liée au fait qu'on ne peut comprendre les maths, ou simplement les percevoir, de manière passive mais seulement en les pratiquant. Si la géométrie peut donner l'illusion d'une perception, en raison du raffinement des aires cérébrales consacrées à la vision, tant qu'elle n'est pas travaillée, relayée par le langage formalisé et algébrique, cette perception reste une illusion, vague et confuse. L'imagination joue en fait un role crucial en mathématiques ; le chercheur ne l'utilise pas pour inventer des histoires farfelues, mais pour créer des images mentales, à partir de la géométrie, bien sûr, mais aussi de l'écrit, des formules algébriques ou d'un texte qui sembleront opaques au profane, mais qui vont ainsi s'éclairer pour le mathématicien. Une page de formules n'acquiert de sens qu'à ce prix-là.

Difficile, alors, d'expliquer ce que fait un mathématicien...

On peut l'illustrer par une anecdote. Un jour, un journaliste se présente au domicile d'Henri Cartan - l'un des membres de Bourbaki [1] - et n'y trouve que sa femme de ménage. Il lui demande : "Que fait Henri Cartan lorsqu'il travaille ?". Elle répond qu'il passe son temps dans son bureau à écrire sur des bouts de papier qu'il froisse ensuite, avant de les jeter consciencieusement à la poubelle ! Décrire au non-mathématicien l'objet de la recherche mathématique pose un problème spécifique, qui a trait à la nature de la réalité mathématique. L'astronome peut désigner les étoiles, le physicien la matière, le géologue une pierre, mais le mathématicien...

Vous présentez souvent cette recherche comme une exploration géographique, à l'image de celle de la Terre. Est-ce plus qu'une métaphore ?

Deux points de vue extrêmes s'opposent sur l'activité mathématique. Le premier, dans

article de Sylvestre Huet, ou Week-end Rencontre du journal Libération, samedi 1er et dimanche 2 décembre 2001, p. 48.

1. Un groupe de mathématiciens français qui, sous ce nom collectif, se fixa l'objectif de réécrire les bases des maths, dans les années 30.

lequel je m'inscris volontiers est d'inspiration platonicienne : il postule qu'il existe une réalité mathématique, brute, primitive, qui préexiste à sa découverte. Un monde dont l'exploration passe par la création d'outils, comme il a fallu inventer les navires pour passer les océans. Le mathématicien va donc inventer, créer des théories dont le but est de lever un coin du voile sur cette réalité préexistante. Le second point de vue est celui des formalistes : il nie toute préexistence aux mathématiques, estimant qu'elles sont un jeu formel, fondé sur les axiomes et les déductions logiques, donc une pure création humaine. Ce point de vue paraît plus naturel au non-mathématicien, qui renâcle à postuler un monde inconnu dont il n'a aucune perception. Les gens comprennent que les mathématiques sont un langage, mais pas qu'elles constituent une réalité extérieure à l'esprit humain. Les grandes découvertes du XXème siècle, en particulier les travaux de Gödel [2], ont pourtant montré que le point de vue formaliste n'est pas tenable. Quel que soit le moyen exploratoire, le système formel, il y aura toujours des vérités mathématiques qui lui échapperont, et on ne peut réduire la réalité mathématique aux conséquences logiques d'un système formel.

Radicalement distincts, pour vous, ce monde mathématique et celui exploré par les sciences de la nature se rencontrent toutefois ; comment est-ce possible ?

Les mathématiques représentent, de mon point de vue, la seule stratégie cohérente pour comprendre et désigner de manière non ambiguë la réalité matérielle extérieure. Toutes les autres stratégies, y compris la philosophie, reposent sur un système circulaire, analogue à celui des mots du dictionnaire. Ils ne sont compréhensibles que par référence à un autre mot. Si une intelligence extérieure, un jour, nous demande de spécifier où nous vivons dans l'Univers, répondre sur "la Terre" ne peut convenir, c'est un mot que nous avons choisi. Si l'on répond : "nous sommes sur la troisième planète d'un système planétaire autour d'une étoile, elle sera confondue avec les milliers d'autres planètes semblables. En mathématiques, on arrive à isoler certains objets par des considérations générales, et ce type de convergence n'a pas vraiment d'analogue ailleurs. Finalement, le langage mathématique est le meilleur instrument pour définir sans ambiguité ce qu'on lui oppose *a priori*, la réalité extérieure, dont l'existence nous paraît évidente.

Cela veut-il dire que nous pourrions parler maths avec n'importe quelle intelligence extraterrestre ?

Bien sûr ! La première chose que l'on peut transmettre, c'est le nombre. Un signal, absence de signal, à nouveau un signal : c'est clair... Mais si nous commençons par transmettre une phrase, nous n'avons aucune chance d'être compréhensible ! Alors qu'on peut

2. L'Autrichien Kurt Gödel démontra dans les années 30 l'"incomplétude" des systèmes formels.

communiquer la table d'addition ou de multiplication de manière non ambiguë. Même un spectre d'atome ne sera pas aussi fondamental, universel.

Même si les maths sont une exploration et non une pure création, elles ont tout de même une histoire où les relations avec les sciences de la nature semblent primordiales, au point qu'Eugène Wigner [3] a pu s'interroger sur leur efficacité "déraisonnable" en physique. Comment voyez-vous ces relations ?

D'abord à travers ce phénomène surprenant : ce sont souvent des développements mathématiques parmi les plus purs, les plus éloignés de toute application pratique qui se révèlent les plus utiles en sciences de la nature. A priori, quel problème plus gratuit que de savoir si l'un des axiomes de la géométrie est superflu ou pas ? En l'occurrence, celui de l'unique parallèle à une droite passant par un point. Au XIXème siècle, des mathématiciens se sont aperçus que l'on pouvait construire des modèles cohérents où tous les axiomes de la géométrie euclidienne étaient vérifiés sauf celui-là. Pure théorie ? Mais c'est cette piste qui a conduit à la géométrie de Riemann [4], puis à la relativité générale d'Einstein, l'une des théories physiques majeures de notre temps. Le cheminement entre recherche mathématique et sciences de la nature est donc imprévisible et il ne faut surtout pas tenter de le conditionner par la rentabilité à court terme. Quand Jacobi [5] s'est vu reprocher, il y a plus d'un siècle et demi, de ne pas travailler sur des mathématiques "*utiles*", il répondit qu'il le faisait "*pour l'honneur de l'esprit humain*".

Que vouliez-vous dire par : "A bout de ressources, un physicien théoricien en arrive à devenir mathématicien, faute de mieux." ?

Il est rare que l'on soit en panne d'expériences, de données. Aujourd'hui, l'un des principaux défis des physiciens est de réconcilier la mécanique quantique (la théorie des particules élémentaires) et la gravitation (celle des relations de l'espace-temps avec la matière), aujourd'hui incompatibles. Ils disposent de nombreuses données expérimentales, comme les valeurs des masses des particules ou de l'intensité de leurs interactions. Ces paramètres sont livrés par l'expérience. Mais les physiciens ne disposent d'aucune explication théorique à ces valeurs. A court de concepts physiques, certains peuvent avoir tendance à se tourner vers les mathématiques, tant il est vrai que la frontière entre les deux est floue. Mais ce détour ne peut être productif, pour les physiciens, que s'il permet de développer un concept physique qui résistera à la confrontation avec l'expérience, sinon, au pire, il fera progresser les mathématiques.

3. L'Allemand Eugène Wigner fut Nobel de physique en 1963 pour ses travaux en mécanique quantique.

4. Bernhard Riemann, mathématicien allemand, créateur de la géométrie riemanienne qui fournit à Einstein le cadre géométrique nécessaire à la relativité.

5. Carl Jacobi, mathématicien allemand (1804-1851).

Lui-même ou en provoquant la réflexion de mathématiciens ?

Dans mon propre travail, j'ai abordé, avec le physicien allemand Dirk Kreimer, le problème dit de la renormalisation, c'est-à-dire les tours de passe-passe opérés par les physiciens pour éliminer les infinis rencontrés lorsqu'ils font des calculs en théorie des champs, utilisée pour prévoir les interactions entre particules élémentaires comme l'électron, les quarks, etc. Evidemment, l'énergie d'une particule ne peut pas être infinie... Les physiciens ont trouvé une méthode, à la fin des années 40, baptisée "renormalisation", pour éliminer ces infinis des calculs. Du point de vue des concepts de la physique, elle est tout à fait justifiée. Pour prendre un exemple macroscopique, c'est comme pour le calcul de la force qui s'exerce sur une balle de ping-pong que l'on plonge sous cinq mètres d'eau. Si vous appliquez simplement la loi d'Archimède, le calcul dit qu'elle doit partir avec dix fois l'accélération de la pesanteur. C'est manifestement faux. Il faut corriger la loi de Newton en remplaçant la masse inerte ou "nue" de la balle par sa masse "effective" qui est différente en raison de la présence d'eau autour d'elle.

Au niveau microscopique, c'est pareil. Lorsque l'on prend en compte la masse "effective" de la particule, déterminée par son environnement, les infinis disparaissent des calculs, ce qui permet de parvenir à un résultat ayant un sens physique. Au plan mathématique, cela nous semblait horrible, dépourvu de sens ; essentiellement parce que la méthode n'avait rien d'analogue dans aucune branche des mathématiques. Or l'une de nos découvertes, avec Dirk, est que les physiciens avaient en réalité, et sans le savoir, utilisé un cas particulier d'une théorie mathématique connue. Autrement dit, la méthode, justifiée en physique, a rencontré un problème mathématique merveilleux, dont la résolution et la subtilité ouvrent la voie à une meilleure compréhension.

Parmi les interactions actuelles entre les sciences de la nature et les mathématiques, lesquelles vous semblent les plus fructueuses ?

Le dialogue entre physique et mathématiques est si serré que la frontière entre les deux est floue. Il existe cependant une différence notable dans le mode opératoire des physiciens et des mathématiciens. Les physiciens se comportent à l'instar des bosons (les particules portant les forces) et ont tendance à se regrouper autour d'un même problème. Les mathématiciens, eux, sont plutôt des fermions (les particules de matière) : ils s'excluent les uns les autres, travaillent rarement en groupe. L'un des sujets qui nous rapprochent est cette incompatibilité apparente entre mécanique quantique et théorie de la gravitation. Elle oblige les mathématiciens à réfléchir à ce qu'est la géométrie, à raffiner le paradigme de l'espace géométrique et du temps. C'est fondamental, y compris au plan philosophique. Les liens avec la biologie, l'exploration du génome, sont aussi une frontière intéressante, mais les mathématiques n'y ont pas encore montré la puissance

qu'elles déploient en physique. Cela pourrait changer, comme le montrent des avancées récentes sous la direction de Misha Gromov qui travaille à l'IHES de Bures-sur-Yvette. Quelle partie des mathématiques leur sera utile ? Elles sont si riches, si complexes, offrent tant de facettes développées pour elles-mêmes qu'il est impossible de répondre. Je suis toutefois persuadé que ce sont les idées les plus abstraites qui seront les plus utiles aux biologistes pour percer les secrets de l'évolution comme la création de nouvelles fonctions.

Vous n'avez pas mentionné la simulation numérique, sur ordinateur, qui prend une importance considérable dans les laboratoires ?

On entend beaucoup de bêtises à cet égard. Comme la répétition simplette de la métaphore du battement de l'aile de papillon qui cause une tempête [6]... On peut se gargariser de modèles mathématiques possédant ce genre d'instabilité, mais si on se fie trop au modèle et au résultat mathématique qui en découle, calculé par l'ordinateur, on risque de graves déconvenues. Dans ce type de problèmes, comme celui de la simulation du climat et de son évolution, on se heurte à un nombre considérable de paramètres, dont une bonne part ne peut être prise en compte, et le modèle mathématique donne tout au plus une indication.

Il y a un autre danger, pour les mathématiciens, qui est le côté ludique de l'ordinateur. Je suis toujours un peu inquiet quand je pénètre maintenant dans un institut de mathématiques de voir les mathématiciens toujours plantés devant leur écran. Oppenheimer, dans les années 50, devait faire visiter l'institut de Princeton à un officiel très haut placé. Dans le deuxième bureau qu'ils ont ouvert, ils ont trouvé un mathématicien allongé sur sa table de travail apparemment en train de dormir. A l'époque, quand un mathématicien travaillait, il réfléchissait en regardant le plafond ! Cela dit, il n'en reste pas moins que l'ordinateur est un outil puissant comme aide au calcul dont on aurait tort de se priver. Si on l'utilise comme un esclave soumis, sans se laisser prendre par le côté ludique, c'est une aide extraordinaire.

6. Lire Raoul Robert dans la Gazette des mathématiciens d'octobre 2001.

Une réalité archaïque précède les concepts

Alain Connes

"La plupart des énoncés vrais sont non démontrables".

Bien que tous les mathématiciens ne le reconnaissent pas, il existe une "réalité mathématique archaïque". Comme la réalité du monde extérieur, celle-ci est a priori non organisée, mais résiste à l'exploration et révèle une cohérence. Non matérielle, elle se situe hors de l'espace-temps. C'est le credo d'Alain Connes, qui nous entraîne aussi dans une réflexion sur le sens profond du théorème de Gödel.

Alain Connes, né en 1947, professeur à l'IHES, occupe depuis 1984 la chaire d'analyse et de géométrie au Collège de France. Ses recherches portent notamment sur la géométrie non commutative. Pour ses travaux, il a reçu à 35 ans la médaille Fields (1982), le prix de La fondation Clay (2000), Le prix Crafoord (2001) et La médaille d'or du CNRS (2004). Certains de ses derniers articles traitent de la théorie de Yang et Mills, au centre de l'un des sept problèmes de La Fondation Clay. Alain Connes a publié en 2000 Triangle de pensées avec André Lichnerowicz et Marcel-Paul Schützenberger (Éditions Odile Jacob).

La Recherche : Dans votre livre Triangle de pensées, André Lichnerowicz dit : "Les mathématiciens ont appris que l'être des choses sur lesquelles ils raisonnent n'était d'aucune importance pour eux." Il dit aussi : "Dans les mathématiques, l'être avec un grand E est mis entre parenthèses." Vous vous insurgez contre ce point de vue. Pourquoi ?

Alain Connes : Quelle est la nature de la réalité mathématique ? En simplifiant beaucoup, cette question génère deux types d'attitude.

Celle de Lichnerowicz est en gros la position formaliste, ou structuraliste. Elle consiste à considérer les mathématiques comme un système de déductions logiques obtenues à l'intérieur d'un langage, à partir d'axiomes. Cette position conduit d'une certaine manière à nier le caractère ontologique * de la réalité mathématique. La question de la signification des objets mathématiques est évacuée. A l'opposé, mon attitude et celle d'autres mathématiciens consistent à dire qu'il existe une réalité mathématique qui précède l'élaboration des concepts.

La Recherche : Vous soutenez qu'il existe une "réalité mathématique archaïque". Qu'entendez-vous par là ?

Alain Connes : Je fais une distinction essentielle entre l'objet de l'étude, par exemple la suite des nombres premiers, et les concepts que l'esprit humain

Les Dossiers de La Recherche, août-octobre 2005, n° 20, © La Recherche, Mathématiques, nouveaux défis et vieux casse-têtes. Propos recueillis par Olivier Postel-Vinay

∗. Le mot ontologique vient du grec ontos , "être" : qui concerne l'être des choses.

élabore pour comprendre cette suite. La réalité mathématique archaïque, c'est l'objet de l'étude. De même que la réalité extérieure perçue par les sens, elle est a priori inorganisée. Elle se distingue radicalement des concepts que l'esprit humain lentement élabore pour la comprendre, pour voir ce qu'elle a d'organisé.

La Recherche : En quoi cette réalité archaïque résiste-t-elle au formalisme ?

Alain Connes : Les structuralistes n'ont jamais vraiment digéré le théorème de Gödel †. Pour eux, ce théorème dit simplement que dans un système donné il y aura toujours une proposition indécidable, dont on ne peut pas savoir si elle est vraie ou fausse. Or le théorème de Gödel est bien plus méchant que cela. Il dit qu'il y a aura toujours une proposition vraie qui ne sera pas démontrable dans le système. Ce qui est beaucoup plus dérangeant.

La Recherche : Lichnerowicz dit : "Je ne sais pas ce qu'est une proposition vraie non démontrable." Apparemment, vous n'êtes pas de cet avis ?

Alain Connes : C'est un point relativement délicat. On n'a aucune chance de comprendre le sens de cette assertion tant qu'on ne fait pas certaines distinctions de nature qualitative entre les propositions mathématiques. Il faut ainsi distinguer entre une proposition de nature universelle et une proposition de nature existentielle. Tenons-nous en à l'arithmétique. Voici un exemple de proposition universelle : tout nombre entier n pair plus grand que 6 s'écrit comme somme de deux nombres premiers. Pourquoi est-ce une proposition de nature universelle ? Parce que je dis "quel que soit n", après quoi je donne un énoncé qui est décidable : si je prends le nombre 100, on va pouvoir décider si oui ou non il est la somme de deux nombres premiers.

Or un théorème fondamental de la logique est que, si une proposition universelle est démontrable, elle est vraie. Mais la réciproque est fausse. Il existe des propositions universelles qui sont vraies mais qui ne sont pas démontrables. Pour le comprendre, faisons une analogie avec la réalité d'un tribunal. D'une certaine manière, quand on fait des raisonnements logiques à l'intérieur d'un système d'axiomes, c'est comme si l'on était au tribunal. Il y a des pièces à conviction : ce sont les axiomes. La déduction logique s'opère à partir de ces axiomes. Si certains faits sont démontrables à l'intérieur du tribunal, ils sont automatiquement vrais. Mais l'inverse n'est pas vrai. Il se peut qu'un fait soit vrai sans être démontrable à l'intérieur du tribunal.

La Recherche : Donnez un exemple de proposition mathématique existentielle.

Alain Connes : Il existe un entier n qui est pair et n'est pas, la somme de deux nombres premiers. C'est l'inverse d'une proposition universelle. Or un théorème dit : si une proposition existentielle est vraie, elle est démontrable. Mais la réciproque est fausse. C'est la première chose que nous apprend le théorème de

†. Le logicien autrichien Kurt Gödel a démontré son célèbre théorème en 1931.

Gödel : il faut distinguer entre ce qui est démontrable au tribunal, dans le système déductif dans lequel on travaille, et la réalité.

La Recherche : Pouvez-vous donner un exemple parlant de proposition vraie non démontrable ?

Alain Connes : La fable du lièvre et de la tortue. Nous nous plaçons à l'intérieur d'un certain système d'axiomes, en l'occurrence les axiomes de Peano, ceux qui gouvernent l'arithmétique la plus simple. On prend un nombre au hasard, par exemple 9, et on l'écrit en base 2, c'est-à-dire en n'utilisant que des puissances de 2. Ainsi, 9 c'est $8 + 1$, or 8, c'est 2^3, donc $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi les 3 en base 2 : soit $2 + 1$. Donc $2^3 + 1$ s'écrit $2^{2+1} + 1$. Le lièvre arrive, et remplace tous les 2 par des 3. $2^{2+1} + 1$ devient $3^{3+1} + 1$, soit $81 + 1$. Le nombre obtenu est beaucoup plus grand, on a l'impression que le lièvre fait des bonds immenses. Puis la tortue arrive, et soustrait 1. Cela donne 81. Le lièvre revient, réécrit le nombre obtenu en base 3, donc 3^{3+1}, et remplace tous les 3 par des 4. Cela donne 4^{4+1}. La tortue arrive, elle soustrait 1. Le lièvre revient, réécrit le résultat en base 4, et remplace tous les 4 par des 5. Le résultat, vraiment étonnant, est que, quel que soit le nombre n, c'est la tortue qui gagne : bien qu'elle ne fasse que soustraire 1 chaque fois, au bout d'un nombre fini d'étapes on obtient zéro. Or cet énoncé est vrai, mais n'est pas démontrable dans l'axiomatique de Peano. Pour expliquer pourquoi, il faut sortir de l'axiomatique de Peano ; sortir de l'enceinte du tribunal. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'un tel énoncé n'a rien d'exceptionnel. Au contraire, on sait maintenant que la plupart des énoncés vrais sont non démontrables.

La Recherche : Voilà une forte assertion ! Qu'est-ce qui permet de l'avancer ?

Alain Connes : On peut l'expliquer par une analogie avec la notion de complexité d'un système. Voici un exemple permettant de saisir ce que signifie la complexité d'un système. Je veux transmettre en Australie deux types de renseignements : 1) les heures de lever et de coucher du soleil à Paris depuis dix ans ; 2) les résultats du Loto à Paris tous les jours depuis dix ans. Pour transmettre le premier résultat, il me suffit d'une petite formule avec les sinus et les cosinus. Tandis que pour transmettre les résultats du Loto depuis dix ans, il n'y a pas d'autre moyen que d'envoyer la liste. Personne ne trouvera jamais de formule pour simplifier la tâche. La complexité d'une information, c'est la longueur en bits du plus petit programme informatique qui la génère. Une suite comme celle des heures de lever et de coucher du Soleil est plus simple qu'une suite comme celle des résultats du Loto. Or si l'on considère l'ensemble de toutes les suites ayant un nombre donné de chiffres, on peut compter le nombre de ces suites et l'on démontre que les suites de complexité maximale font presque la totalité de l'ensemble. Le nombre de suites ayant une expression plus simple est négligeable.

La Recherche : Quel est le rapport avec une proposition vraie non démontrable ?

Alain Connes : On s'aperçoit que les énoncés qui sont démontrables dans un système formel sont comme les suites dont la complexité est réduite. Du coup, la plupart des énoncés vrais ne sont pas démontrables. Les propositions démontrables sont une conséquence relativement courte du système d'axiomes que l'on a au départ.

La Recherche : Revenons à la notion de réalité mathématique archaïque. Pourrait-on utiliser un autre mot qu'"archaïque" ?

Alain Connes : Oui, on pourrait par exemple parler de réalité mathématique primitive. L'essentiel est de comprendre qu'elle précède l'exploration qu'on va en faire - un peu comme la réalité extérieure. C'est la position platonicienne, renouvelée par le théorème de Gödel. A partir du moment où l'on comprend que la position structuraliste, formaliste, n'est pas tenable, il faut bien qu'on se rattache à une certaine réalité. La meilleure illustration de cette réalité, c'est l'arithmétique. Or un point saillant de la démonstration de Gödel est la possibilité de projeter tout raisonnement sur l'arithmétique.

La Recherche : Comment identifier les objets qui appartiennent à la réalité mathématique archaïque ?

Alain Connes : Chaque fois qu'on est devant une notion mathématique, il faut essayer d'analyser la portion qui fait référence à la réalité mathématique archaïque et la portion qui est conceptuelle. A ce sujet, il importe de saisir une autre distinction de nature qualitative, que je ne fais qu'évoquer dans le livre : l'inductif et le projectif. La démarche inductive laisse à chaque objet sa spécificité, son caractère unique ; la démarche projective opère sur des objets regroupés par classes. On le voit dans le langage courant. Le mot chaise désigne une classe, c'est un mot projectif ; Avignon désigne un lieu, c'est un mot inductif. Mais comme une notion mathématique, un mot n'est jamais entièrement inductif ou entièrement projectif, il est un peu l'un et un peu l'autre. De ce point de vue, la réalité mathématique archaïque apparaît de manière inductive, alors que les concepts, eux, découpent des classes. L'idéal se produit lorsqu'on a tellement bien découpé les classes qu'on se trouve devant un objet unique... que l'on connaît de manière à la fois inductive et projective.

La Recherche : Y-a-t-il des objets qui existent seulement de manière projective ?

Alain Connes : Les ultrafiltres [‡], par exemple. Jamais personne ne sera capable

‡. Dans la théorie des modèles, un ultrafiltre sur un ensemble non vide I est défini comme un ensemble D de sous-ensembles de I tel que :

1. l'ensemble vide n'appartient pas à D ;
2. si A, B sont en D, leur intersection l'est aussi ;
3. si A est un sous-ensemble de B, et si A est en D, alors B est en D ;
4. pour tout sous-ensemble A de I, soit A est en D soit I moins A est en D.

d'isoler un ultrafiltre. On sait qu'on ne peut nommer que des classes d'ultrafiltres. Lebesgue, qui a élaboré la théorie des fonctions mesurables, savait bien qu'on ne pourra jamais nommer une fonction non mesurable. C'est un objet chimérique, comme les ultrafiltres.

La Recherche : En quoi la réalité mathématique archaïque se distingue-t-elle de la réalité non mathématique ?

Alain Connes : Quoique non fondée principalement sur les cinq sens, la perception que nous avons de la réalité mathématique fait que celle-ci manifeste une résistance et une cohérence comparables à celles de la réalité extérieure. La différence essentielle, fondamentale, c'est qu'elle échappe à toute forme de localisation dans l'espace ou dans le temps. Si bien que lorsqu'on en dévoile ne serait-ce qu'une infime partie, on éprouve un sentiment d'éternité. Tous les mathématiciens le savent.

La Recherche : Qu'y a-t-il de moins objectif qu'un sentiment d'éternité ?

Alain Connes : Il y a là pourtant quelque chose d'objectif : une réalité non périssable. Une réalité dotée d'un aussi grand pouvoir de résistance que la réalité extérieure. Laquelle résiste aussi bien qu'un mur. Alors comment perçoit-on cette réalité ? Sans doute avec un sens distinct des autres sens, et plus élaboré. Nous sommes en présence d'une réalité et nous disposons d'un mode de perception de cette réalité.

La Recherche : Mais cette perception n'est-elle pas plutôt de l'ordre de l'intellect ?

Alain Connes : Toute perception passe par l'intellect. Ce qui me fait dire aussi qu'il existe un sens particulier au service de cette perception, c'est qu'il y a des mathématiciens qui, sans avoir reçu une éducation sophistiquée, ont une perception extraordinairement aiguë de cette réalité. Lichnerowicz lui-même fait observer que le mathématicien en action exerce un tel sens. Il concède : "si un mathématicien travaille, il réfléchit à un certain champ où, là, il y a des êtres mathématiques ; il finit par jouer avec eux, suffisamment pour les rendre familiers." Tous les mathématiciens sont d'accord là-dessus. C'est lorsqu'on leur demande de réfléchir à ce qu'ils font vraiment que les uns se disent formalistes, d'autres platoniciens.

La Recherche : En quoi les mathématiques ne sont-elles pas une discipline scientifique comme les autres ?

Alain Connes : Les autres sciences s'intéressent à l'organisation de la matière à diverses échelles. Comme les autres sciences, les mathématiques s'intéressent à l'organisation d'une réalité, sauf que celle-ci n'est pas matérielle.

La Recherche : Ce n'est pas une réalité matérielle, mais elle résiste comme la réalité extérieure, il y a ce mur auquel vous vous heurtez...

Alain Connes : Oui, bien sûr. De plus, cette réalité est une source inépuisable d'informations - comme le prouve le théorème de Gödel. De ce point de vue, je crois que la réalité mathématique nous réserve encore de grandes surprises. Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique.

La Recherche : Voilà une proposition ambitieuse !

Alain Connes : Oui. Je l'ai déjà plus ou moins évoquée à la fin de mon livre avec Changeux. Je crois qu'un des critères d'une vraie compréhension du monde physique extérieur, c'est notre capacité de comprendre sa position à l'intérieur du monde mathématique. On en est loin encore. Mais les indices abondent. Ainsi le tableau périodique des éléments. Il a été déduit par Mendeleïev à partir des résultats expérimentaux de la chimie, mais quand on comprend qu'il résulte en fait de mathématiques extrêmement simples, c'est impressionnant...

La Recherche : Là vous retournez aux racines du platonisme le plus profond !

Alain Connes : Tout à fait.

La Recherche : Voulez-vous dire que le monde des idéaux mathématiques précède la réalité physique ?

Alain Connes : Absolument. C'est une position extrême.

La Recherche : Qu'est-ce qui vous fait penser que cette idée va faire son chemin ?

Alain Connes : On ne cesse de progresser vers une simplification de la compréhension du monde extérieur et des lois de la physique. Je sais bien qu'il ne faut pas non plus être trop simplificateur, que des lois très simples comme les équations qui gouvernent le modèle standard du monde physique peuvent avoir des conséquences extrêmement difficiles à appréhender. Et que l'on ne peut rendre compte de la complexité des phénomènes observables qu'au prix de calculs pratiquement infaisables. Mais fondamentalement je pense qu'on ne peut pas du tout exclure la possibilité qu'en fin de compte les lois fondamentales soient incroyablement simples, bien plus simples que tout ce qu'on peut imaginer aujourd'hui.

La Recherche : Des lois très simples..., ce qui n'est pas incompatible avec l'idée du caractère inépuisable des deux types de réalité, physique et mathématique ?

Alain Connes : Le fait que tout repose en fin de compte sur une structure très simple n'est pas incompatible avec le caractère inépuisable de l'information contenue tant dans la physique que dans les mathématiques.

La Recherche : Une structure très simple, de nature mathématique ?

Alain Connes : Oui. Les grandes découvertes de la physique en témoignent. Les lois de Newton, la relativité expliquent des phénomènes extrêmement complexes avec des lois d'une simplicité désarmante. Des lois de nature mathématique, qui exploitent des outils trouvés par les mathématiciens.

La Recherche : Dans votre livre, Schützenberger dit que pour lui, le problème de l'efficacité des mathématiques est un problème non résolu. Etes-vous moins de cet avis ?

Alain Connes : Ce qui est vraiment surprenant c'est que l'on arrive à comprendre des pans entiers de la réalité extérieure grâce aux mathématiques développées pour leur logique interne. Un des exemples les plus merveilleux est la découverte de la géométrie non euclidienne, qui au départ était une réponse au problème posé par l'axiome de l'unique parallèle d'Euclide. Cette géométrie qui à l'origine n'était qu'un contre-exemple un peu ésotérique a engendré à travers la géométrie de Riemann, puis la relativité générale d'Einstein le meilleur modèle actuel de l'espace-temps. Lequel est testé avec une précision extraordinaire dans les pulsars binaires et a permis d'affiner le fonctionnement du système de positionnement GPS. Ce passage de la réflexion logique autour des axiomes d'Euclide à une application pratique est typique de la subtilité et de la richesse des relations entre physique et mathématiques.

Un entretien avec Alain Connes

GB Khosrovshahi (GBK) : Notre première question est de savoir quelles seront, selon vous, les principales tendances des mathématiques au 21e siècle.

Alain Connes : Eh bien, heureusement, le développement des mathématiques n'est pas quelque chose que l'on peut prédire, et il serait insensé d'essayer. Une raison pour laquelle nous aimons faire des mathématiques est que nous ne savons pas ce qui nous attend et ce que les recherches futures découvriront. Il est cependant possible de founir des exemples spécifiques de structures mystérieuses que nous devons mieux comprendre. On m'a récemment demandé de faire un exposé sur les "Défis du XXIe siècle" en mathématiques ; plutôt que d'essayer de donner une longue liste, je me suis concentré sur seulement 2 exemples d'espaces qui sont faciles à introduire mais dont la géométrie est encore assez mystérieuse. Le premier est l'espace-temps, le second est l'espace des nombres premiers. J'ai expliqué dans mes quatre exposés ici quelques très petits fragments de leur géométrie, mais nous aimerions évidemment en savoir beaucoup plus !

M. Khalkhli (MK) : Certains disent que le 21e siècle sera le siècle de l'informatique et de la bio-mathématique et que ces deux activités domineront le siècle. Êtes-vous d'accord avec ça ?

C : Il est clair que les ordinateurs sont d'une grande utilité pour les mathématiciens et qu'en ce moment, la bio-mathématique attire beaucoup d'argent en raison de ses applications potentielles. Il existe un travail intéressant en biomathématique et les mathématiques sont vraiment nécessaires comme outil pour faire face à cette énorme quantité d'informations, fournie par exemple par le génome. Certaines des applications potentielles les cations sont vraiment intéressantes mais cela ne suffit pas à les faire considérer comme des activités mathématiques, sauf au niveau des sommes d'argent, ce qui ne veut rien dire. En ce qui concerne l'informatique, il est clair que les ordinateurs sont d'excellents outils et qu'ils changent notre perception du classement des différents domaines des mathématiques. Par exemple, c'était une compétence précieuse anciennement que le contrôle complet des équations différentielles,

des fonctions spéciales etc ... mais maintenant, tous les jours, les ordinateurs peuvent faire ces choses beaucoup mieux que les humains. Vous entrez juste l'équation et écrivez Dsolve, c'est tout, vous obtenez la réponse... Cela rétrospectivement donne beaucoup plus de valeur à des domaines des mathématiques qui pouvaient auparavant être considérés comme trop abstraits.

GBK : Pensez-vous que vous utiliserez des ordinateurs dans votre travail mathématique ?

AC : Eh bien, vous savez, j'ai beaucoup utilisé les ordinateurs ces dernières années.

GBK : Vraiment ?

AC : Oui ! J'ai eu au fil des ans deux perceptions différentes des ordinateurs. Ce qui s'est passé d'abord, il y a plusieurs années, lorsque nous calculions la formule d'index pour les feuilletages avec Henri Moscovici, à ce moment-là, nous avions un perception négative des ordinateurs. Nous pensions qu'il valait mieux faire des calculs à la main que de les faire à l'aide d'un ordinateur. Nous avons donc passé séparément 3 semaines 8 heures par jour pour calculer une formule dont nous voulions connaître le résultat. Après cette période, nous avons comparé nos résultats et nous avons trouvé quelques erreurs mineures. Après ces corrections mineures, nos résultats convenaient mais nous étions censés obtenir un cocycle et la formule ne nous a pas donné un cocycle. Ensuite, nous avons vraiment craint qu'il y ait peut-être une erreur dans la théorie mais nous avons trouvé en regardant le résultat que si nous changeons le signe de 8 des 36 termes apparaissant dans la formule finale, ça devenait un cocycle. Nous avons d'abord vérifié à nouveau ces termes et réalisé après un certain temps que la raison pour laquelle leurs signes étaient faux était assez subtil : nous avions fait une erreur conceptuelle en faisant le calcul et avions oublié certains termes cruciaux dans les opérateurs différentiels du sous-principal ! À ce stade, je me suis convaincu que nous ne pourrions jamais trouver cette correction subtile sans la connaissance intime de tous les termes de la formule que seul le lent calcul "à la main" pourrait nous donner... Plusieurs années plus tard, j'ai changé d'avis. A savoir, j'ai rencontré dans mon travail avec Michel Dubois-Violette un résultat qui s'exprimait comme la somme de 1440 intégrales, chaque intégrale portant sur une période d'une courbe elliptique (avec module q) d'une fonction ration-

nelle de haut degré dans les fonctions thêta et leurs dérivés $O(n)$. Même dans la limite trigonométrique, il était difficile de calculer cette somme. Alors, on a utilisé l'ordinateur dans ce cas limite d'abord et il a produit une belle formule en fonction des paramètres de la théorie. Ensuite, cela nous a pris environ 6 mois pour deviner comment étendre cette formule dans le cas elliptique en utilisant l'elliptique de Jacobi, les fonctions $s(n), c(n)$ etc... mais il y avait encore une fonction inconnue du module q devant que nous ne pouvions pas deviner. Nous avons ensuite trouvé quelques simplifications dans la théorie qui divise le temps de calcul par un facteur de cinquante, puis nous avons obtenu les premiers termes de l'expansion des puissances de q et on a reconnu le premier terme dans l'expansion de la neuvième puissance de la fonction Dedekind *eta*. On aurait pu prédire le terme suivant, mais c'était encore au-delà de la puissance de calcul d'un ordinateur privé et nous avons dû utiliser le système informatique des écoles polytechniques. Il a produit exactement le terme prévu. Nous étions alors sûrs que nous avions la bonne formule. Il a ensuite fallu beaucoup de travail pour comprendre ce que cela signifiait, mais nous l'avons finalement fait. Alors je ne peux pas nier que les ordinateurs peuvent être incroyablement utiles car il n'était tout simplement pas possible de faire les choses à la main dans ce cas : chacune des 1440 intégrales, une fois étendues en puissances de q jusqu'à la puissance pertinente, prenait jusqu'à 200 pages de formules trigonométriques. Vous ne pouvez pas faire cela à la main ; c'est tout simplement impossible. Les ordinateurs permettent clairement de voir beaucoup plus loin dans certaines circonstances ! Je les vois comme une grande aide, un peu comme un esclave qui fait sans erreurs et sans jamais se plaindre les tâches les plus fastidieuses !

GBK : Les ordinateurs pourraient ne pas aimer cette étiquette d'"esclaves".

AC : Dans ce cas, les ordinateurs étaient très utiles et j'ai continué à les utiliser plus tard pour vérifier par exemple certains calculs d'algèbre impliquant des algèbres de Hopf, etc... Ils ne remplaceront jamais la pensée humaine au niveau de l'analyse conceptuelle des problèmes, des analogies et des choses comme ça, mais comme outil, c'est fantastique. Donc c'est comme une très bonne paire de lunettes, je l'aime et je n'ai rien contre. J'ai entendu certaines personnes dire que les ordinateurs ne peuvent vérifier que de nombreux cas mais c'est totalement faux parce que l'ordinateur fait des calculs formels comme la simplification des expressions trigonométriques, etc. Ils peuvent même faire des déductions logiques, vous leur donnez un ensemble d'axiomes

et de règles logiques et ils peuvent prouver des résultats simples.

GBK : Vous savez qu'il existe des algorithmes pour vérifier les preuves.

AC : Mais pour le moment, ils sont très maladroits et ils vérifient d'une manière formelle très mécaniste, qui n'est pas ce que nous aimerions avoir. Ca viendra mais il faudra du temps pour les rendre efficaces et conviviaux à cet égard. Mais pour vérifier les calculs, ils sont déjà imbattables !

GBK : Pensez-vous qu'un jour les ordinateurs quantiques seront réalisés ?

AC : Le principal problème avec ces ordinateurs quantiques est qu'ils doivent être mis en œuvre "physiquement". C'est un problème pratique très difficile d'expérimentation la physique. Ce n'est pas un problème théorique et je pense que ce qui est assez difficile en effet est de préparer le système et de lire le résultat, passant ainsi du quantum au classique. Bien sûr, l'applicabilité de l'ensemble de la théorie dépend de cette mise en œuvre pratique. Les expérimentateurs ont tendance à faire des miracles donc nous avons juste à attendre et voir.

GBK : Je voudrais vous poser une question. Que pensez-vous de la théorie des cordes ?

AC : Eh bien, la théorie des cordes a révélé de belles relations entre la physique et différentes parties des mathématiques, principalement la géométrie différentielle, géométrie algébrique et l'analyse complexe. En fait, la théorie des cordes a commencé comme ça. Au tout début, Veneziano et d'autres ont initié la théorie, motivés par le modèle de double résonance pour les interactions fortes et ils ont trouvé des solutions aux équations de dualité pour les amplitudes de diffusion en fonction des paramètres de Mandelstam et ce sont de belles fonctions mathématiques comme les fonctions bêta généralisées très naturelles en termes d'analyse complexe. On a alors réalisé, par Susskind et d'autres, que ces modèles pouvaient être compris géométriquement à partir de la propagation de chaînes.

C'est une idée très puissante pour "tester" un espace complexe donné en utilisant l'espace complexe des courbes à l'intérieur de cet espace cible ou des cartes des surfaces de Riemann. Et les physiciens pourraient utiliser tout

l'arsenal de la théorie du champ conforme qui est tout à fait puissant.

Cela a généré un groupe très intéressant de personnes qui font une sorte de Mathématiques "motivées par la physique" qui ont rajeuni certaines parties de la géométrie complexe. Ils adoptent une attitude plutôt libre envers les mathématiques, C'est original et productif et cela a eu une influence très positive.

Cela a eu un impact très positif sur les mathématiques jusqu'à présent. Il y a une anecdote bien connue de Pauli assistant à une conférence, von-Neumann était au tableau noir prouvant un théorème, et Pauli l'interrompit en disant "Si faire de la physique, c'était prouver des théorèmes, vous seriez un grand physicien". Bien, mais il ne suffit pas de se méfier des preuves pour vraiment se qualifier en tant que physicien. La vraie question est de savoir si la théorie des cordes a quelque chose à voir avec la réalité et nous savons tous que c'est une question clé.

Cette question clé commence par la supersymétrie ; que la nature soit ou non supersymétrique : la question est par exemple, est-ce qu'il y a un photon et un fermion qui est le super-partenaire du photon, ou bien est-ce que oui ou non pour chaque quark, il y a un s-quark qui est une force qui est le super-partenaire de ce quark, une force qui jusqu'à présent n'a pas été trouvée. Si l'on avait déjà trouvé 3 ou 4 super partenaires au jour d'aujourd'hui, alors je croirais qu'ils trouveraient les autres, mais en réalité, ils n'en ont trouvé aucun et à cause de cela, je suis très sceptique. Dans les temps anciens, il y avait une théorie disant que dans le système solaire, il y a une planète qui est la même que la terre mais que nous ne pouvons pas voir car elle en est l'exacte symétrique par rapport au Soleil. Je ne pense pas que la supersymétrie soit beaucoup plus convaincante que cette théorie. Le modèle standard supersymétrique est une chose horrible... avec plus d'une centaine de paramètres libres et un vilain mécanisme pour briser cette "belle" supersymétrie invisible ! Jusqu'à ce qu'on me montre plus de preuves, j'ai l'attitude d'un sceptique. Nous verrons en 2007, peut-être qu'un résultat expérimental convaincant sera trouvé, mais jusque-là, je ne suis pas convaincu, même par les tout premiers points de la théorie des cordes.

GBK : Mais vous admirez leurs mathématiques.

AC : Je le fais à coup sûr. Si je ne le faisais pas, je couperais la branche sur laquelle je suis assis. Par exemple, ils utilisent une géométrie non-commutative, ils font de belles choses et leur expertise en physique est grande mais je ne suis toujours pas convaincu par rapport au fait que la nature ait choisi cette voie. Je pense qu'il est très important de construire d'autres modèles concurrents qui ne soient pas nécessairement basés sur la supersymétrie. Je pense qu'il est crucial pour le développement de la physique qu'il y ait des gens assez courageux pour ne pas suivre le dogme principal, des hérétiques qui développent un modèle différent.

GBK : Pensez-vous qu'il existe un modèle parfait pour les physiciens à l'horizon ? Ils pensent tous à la théorie des cordes.

AC : La physique des particules contient des trésors qui ont été testés avec une grande précision.

Cela comprend à la fois la technique de renormalisation et la norme modèle. Je respecte ces grandes découvertes et j'ai passé beaucoup de temps à comprendre les deux au niveau conceptuel. Pour la renormalisation, la conclusion de mon travail avec Dirk Kreimer puis avec Matilde Marcolli est que les divergences sont en fait une bénédiction puisqu'elles sont les génératrices de l'action de ce merveilleux groupe cosmique de Galois que Cartier avait deviné. La leçon était très difficile à apprendre, mais ce qui apparaît est que notre idée naïve de quatre dimensions pour le continuum doit être approché à partir de dimensions complexes proches utilisant une méthode universelle spécifique qui renormalise essentiellement la géométrie.

Ce qui est assez intrigant, c'est que cette méthode correspond parfaitement à la correction non-commutative de l'espace-temps qui donne une description du modèle standard simplement comme la partie intérieure de la gravité. Une fois ces leçons bien comprises, la prochaine étape consiste à combiner le cadre spectral de la géométrie fourni par NCG avec la recette de Feynman de sommation sur toutes les géométries. Le point de départ est d'étendre l'invariance du difféomorphisme classique et à souligner que les seuls observables sont "spectraux" c'est-à-dire mesurer les invariants spectraux d'une géométrie. On peut alors écrire une intégrale fonctionnelle sur toutes les géométries, y compris ceux non-commutatifs, et il donne un certain modèle de matrice. Reste le problème de la fixation des contraintes qui distinguent les

“opérateurs de Dirac” parmi les matrices hermitiennes, c'était la principale motivation derrière le travail avec Dubois-Violette dont j'ai parlé plus haut.

Il y a aussi la gravité à boucles pour la gravité quantique mais je ne suis pas un expert. Je ne vois pas comment ils peuvent contourner la renormalisation dans ce qu'ils font, mais pour sûr, il y a quelque chose de gentil à dire pour les réseaux de spin.

Il est important que différentes approches soient développées et que l'on n'essaye pas de fusionner trop vite. Par exemple, en géométrie non-commutative, mon approche n'est pas la seule, il existe d'autres approches et il est très important que pour ces approches, il n'y ait pas de pression sociale pour être les mêmes afin qu'elles puissent se développer indépendamment. Il est trop tôt pour juger de la situation par exemple en gravité quantique. La seule chose qui me déplaît dans la théorie des cordes, c'est qu'ils mettent dans l'esprit des gens que c'est la seule théorie qui peut donner la réponse ou qu'ils sont très proches de la réponse. Je leur en veux. Pour les personnes qui en ont assez fait, c'est bien car ils connaissent tous les problèmes qui bloquent la route comme la constante cosmologique, la rupture de la supersymétrie, etc., etc.,... mais si vous prenez des gens qui sont débutants dans des programmes de physique et vous leur lavez le cerveau dès le début, ce n'est vraiment pas juste. Les jeunes physiciens devraient être complètement libres, mais c'est très difficile avec le système actuel.

GBK : Et jusqu'où peuvent-ils aller dans leurs mathématiques ? Vous avez dit que les théoriciens des cordes sont beaucoup plus mathématiques que les physiciens. Jusqu'où peuvent-ils aller dans leur mathématiques ?

AC : En mathématiques, comme je l'ai dit ci-dessus, elles ont eu un grand impact en géométrie. La théorie des supercordes vous donne un espace à dix dimensions qui a six dimensions de plus que notre espace-temps observé standard. L'idée simple après Kaluza-Klein est que vous avez une fibration avec une très petite taille de Planck. Les espaces à six dimensions que l'on cherche parmi les variétés de Calabi-Yau doivent respecter les contraintes de base des états de vide de la théorie. Donc en bref, ils font une géométrie complexe en trois dimensions en regardant comment les courbes complexes se propagent dans un tel espace.

Ce sont des mathématiciens mais ils ont un type d'attitude différent des mathématiciens. Ils sont très libres et travaillent dans des groupes extrêmement intelligents, ils ne recherchent pas les mêmes choses, et ont des outils que les géomètres complexes n'avaient pas afin de pouvoir produire de grandes choses. En ce qui concerne la physique, la situation est totalement différente depuis que le rêve était qu'il y aurait un vide essentiellement unique, c'est-à-dire un collecteur de Calabi-Yau singularisé par les contraintes de la théorie des cordes et qu'il reproduirait la phénoménologie du modèle standard de la physique des particules. Après vingt années, cet objectif semble beaucoup plus éloigné et apparaît comme un mirage. Je pense que la vraie chose qui me dérange, c'est que ce qui est maintenant propagé dans le public, c'est l'idée que la seule gravité quantique qui existe, c'est la théorie des cordes et que l'univers est fait de cordes et vous lisez ceci dans des livres populaires qui donnent cette idée et les gens le prennent sans aucune réserve. Beaucoup de gens croient que l'univers est fait de cordes. Quelles preuves en avons-nous ? Rien !

GBK : Dans un endroit comme ici (IPM) où nous avons tout commencé à partir de zéro, notre département de physique est totalement dominé par la théorie des cordes et ce n'est pas bien, ce n'est pas sain pour la physique.

AC : Le groupe de théorie des cordes ici est tout simplement merveilleux avec Ardalan comme un excellent guide ! Et ils ont rattrapé très tôt NCG et ont fait de belles contributions. Le problème avec la physique à long terme est que la tendance actuelle est de mettre tous vos œufs dans le même panier, ce qui n'est probablement pas très sûr. En effet, la plupart les physiciens théoriciens font de la théorie des cordes et je ne pense pas que ce soit complètement sain pour la physique dans le sens que vous savez.

GBK : Pensez-vous qu'il y a beaucoup de gens qui font de la théorie des cordes ? J'ai entendu dire que il n'y a que 700 personnes actives dans la théorie des cordes dans le monde.

AC : Il y a eu une conférence sur la théorie des cordes à Paris en 2004 qui a attiré entre 600 et 700 personnes.

GBK : Le nombre n'est donc pas si bas.

AC : Je dirais qu'il y a 2000 personnes travaillant dans la théorie des cordes, dans le domaine de la NCG *, je dirais qu'il y a environ 150 à 200 personnes.

GBK : Un groupe de théorie des cordes ne coûte pas cher, c'est comme les mathématiques.

AC : Ils sont absolument idéaux à cet égard. Ils sont comme des mathématiciens déguisés et ils font des mathématiques d'une manière extrêmement originale, les mathématiciens ne pourraient pas le faire. Et ils connaissent beaucoup de physique.

Ce sont des experts en physique mais ils sont tous dans le même bateau et c'est le problème. La supersymétrie suppose une très forte compatibilité avec les nombres complexes. Bien sûr, cela simplifie les choses car les nombres complexes sont infiniment plus simples que les nombres réels.

C'est André Weil qui a dit "L'analyse complexe est belle, l'analyse réelle est sale ". On peut souhaiter que la physique soit comme ça, pourquoi pas.

C'est un beau rêve mais il est trop tôt pour croire que c'est la vérité. Parce qu'il est basé sur trop d'hypothèses qui font la théorie mathématique plus simple mais qui n'accepte pas ce qui nous est fourni par la physique. Mon attitude est donc différente. Je préfère partir de ce que la physique nous donne et essayer de le comprendre, trouver une structure mathématique totalement inattendue, comme ce groupe de Galois cosmique, dans la partie déjà testée de la physique. Au moins, on peut être sûr que cela a quelque chose à voir avec la Nature.

MK : Quel type de NCG proposez-vous aux physiciens ? Parce qu'il y a des parties qui sont totalement négligées par eux, ce qui donnerait de nouvelles suggestions et de nouveaux angles.

AC : Sûr ! Par exemple, lorsque vous regardez des anomalies dans les théories quantiques des champs sur des espaces non commutatifs, vous constatez que la cohomologie pertinente est la cohomologie cyclique et les formules deviennent beaucoup plus compliquées. Donc pour traiter les anomalies, c'est

∗. NCG = Géométrie non-commutative.

probablement une bonne idée d'apprendre la partie de la NCG qui traite de cohomologie et de la formule de l'indice local.

Au début, lorsque Witten a écrit son premier article sur l'action pour les cordes ouvertes, il utilisait la cohomologie cyclique pour définir l'action de Chern-Simon. En fait, il construisait un cocycle de cycle trois sur l'algèbre de convolution des chaînes ouvertes.

C'était en 86 et ça n'a pas duré longtemps. Les physiciens ont tendance à changer souvent de poste et à travailler sur la dernière mode. Je ne peux pas me plaindre parce qu'à un moment donné, environ en 98, la mode était la NCG après mon papier avec Douglas et Schwarz. Mais après un moment, quand j'ai vu Michael Douglas et que je lui ai demandé s'il avait réfléchi davantage à ces problèmes, la réponse était non parce que ce n'était plus la dernière mode et il voulait travailler sur quelque chose d'autre. En mathématiques, on travaille parfois plusieurs années sur un problème mais ces jeunes physiciens ont un type d'habitude de travail très différent. L'unité de temps en mathématiques est d'environ 10 ans. Un article en mathématiques qui est paru 10 ans auparavant est encore un article récent. En physique, c'est 3 mois. Donc je trouve ça très difficile de faire face à un zapping constant.

GBK : Il y a un problème ici. Vous avez dit 10 ans. Les physiciens ont une base de données et parfois, quand ils publieront un article demain, il obtiendra dix citations, mais nous soutenons ici qu'en mathématiques, il faut 4 ou 5 ans avant qu'un article ne vienne à l'attention du public.

AC : Bien sûr bien sûr.

GBK : La plupart des physiciens ne comprennent pas ce genre de mesure.

AC : Le nombre de citations lorsque vous regardez par exemple mes propres papiers, celui qui est le plus cité est celui que j'ai écrit avec Douglas et Schwartz.

GBK : Savez-vous combien de citations vous avez eu pour ce document ?

AC : Presque mille je pense, mais ça ne veut pas dire grand-chose car le principal le point de cet article était de relier une équation de compactifica-

tions de chaîne avec la classification des faisceaux holomorphes sur le tore non-commutatif, qui est un truc avec lequel on en avait fini avec Marc Rieffel au début des années 80.

Ce papier plus ancien a très peu de citations et les résultats ont été redécouverts sous des déguisements divers plusieurs fois depuis ! Je pense que le nombre de citations est une mesure très étrange. Si vous regardez les citations en mathématiques, ce n'est pas logique parce qu'il y a des papiers très difficiles que très peu de gens ont lu, et en fait il y a vraiment une corrélation inverse entre la difficulté d'un papier et le nombre de personnes qui l'ont lu, sans parler de le citer.

GBK : J'allais vous poser une question mais Masoud m'a dit de ne pas le faire mais je vais quand même vous le demander de manière déguisée. J'allais vous demander si vous pensez que NCG s'est imposée comme une branche très solide des mathématiques ?

AC : Maintenant, après 25 ans, de nombreuses parties de NCG ont pris contact avec d'autres domaines des mathématiques comme l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Et par exemple, la cohomologie cyclique a même pris contact avec la topologie à travers la Conjecture de Novikov. Les liens avec la physique sont là depuis le début et, en substance, toute la théorie traduit l'impact de la révolution quantique. La véritable frontière est la théorie des nombres et elle sera difficile à franchir. Pourtant, il est très frappant qu'un espace non commutatif aussi naturel que l'espace des classes de commensurabilité des réseaux sur $\mathbb{Q}$ donne une réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann. Donc, mon impression intérieure est que je me senq très satisfait du développement de la théorie. Par exemple, hier, nous avons eu cette session de problèmes où l'on a pu écrire 21 exemples d'espaces NCG et chacun était en fait une famille d'exemples. Il est donc tout à fait clair que la NCG fournit de nouveaux outils et espaces et crée beaucoup de choses à faire, de nouveaux territoires à explorer. Si vous le regardez du point de vue des mathématiques conservatrices où vous avez une liste standard de sujets comme les probabilités, l'algèbre, la géométrie et tout ça, eh bien ce n'est pas encore un de ces sujets. Pour le dernier congrès international, Yuri Manin a essayé de créer une nouvelle section dans l'ICM sur la NCG.

GBK : Pour les revues mathématiques ?

AC : Non, pas pour les revues mathématiques. Dans les revues de mathématiques, c'est déjà une section, il essayait de le faire pour l'ICM, mais il y a beaucoup de résistance et en fait un certain nombre de sujets proches. Au niveau sociologique, la NCG est plutôt bien représentée en Europe et elle commence à exister dans de nombreux autres endroits, y compris en Inde, Australie, etc. Aux États-Unis, il existe des pôles très puissants dans des endroits comme Berkeley, Columbus, Penn-State, Vanderbilt etc. mais nous n'avons toujours pas de représentants dans les meilleures universités.

GBK : Tu veux dire personne à Harvard et Princeton ?

AC : Oui, par exemple.

GBK : Êtes-vous optimiste quant à l'avenir de NCG ?

AC : Je ne veux pas que les choses se produisent artificiellement et je pense que le sujet devrait exister seulement sur sa propre valeur et pour aucune autre raison comme la sociologie, les modes, etc. Il y a beaucoup de vigueur en mathématiques et cette résistance avant qu'un nouveau domaine ne soit accepté joue un rôle positif comme une sorte de filtre. Je préfère de beaucoup que nous ayons cette résistance et que la seule façon de la briser soit de travailler plus car c'est une grande émulation.

GBK : Hier, ils parlaient à la cafeteria (de l'IPM) et je suis venu écouter et ils disaient que le personnage central est Alain et qu'il est le prophète, l'agitateur et tout.

AC : C'est flatteur mais je ne pense pas que ce soit une bonne chose. En fait, nous sommes tous des êtres humains et c'est une mauvaise idée de mettre une confiance aveugle en une seule personne et de croire en cette personne quoi qu'il arrive. Pour vous donner un exemple, je peux vous raconter une histoire qui m'est arrivée. Je suis allé à Chicago en 1996 et j'ai donné une conférence au département de physique. Un physicien bien connu était là et il a quitté la pièce avant la fin de la conférence. Je n'ai pas rencontré ce physicien pendant deux ans puis, deux ans plus tard, j'ai prononcé le même discours au Forum consacré à Dirac du laboratoire de Rutherford près d'Oxford.

Cette fois, le même physicien était présent, l'air très ouvert et convaincu et quand il a prononcé son discours plus tard, il a mentionné mon discours de manière très positive. C'était assez étonnant car c'était le même discours et je n'avais pas oublié sa réaction précédente. Donc, sur le chemin du retour à Oxford, j'étais assis à côté de lui dans le bus, et je lui ai demandé ouvertement comment il se faisait qu'il ait assisté à la même conférence à Chicago et qu'il soit parti avant la fin et que ce jour-là, il avait vraiment aimé. Le mec n'était pas un débutant et il était dans la quarantaine, sa réponse a été "Witten a été vu en train de lire votre livre dans la bibliothèque de Princeton !". Donc je ne veux pas jouer ce rôle d'un prophète empêchant les gens de penser par eux-mêmes et gouvernant le sujet, le classement des gens et tout ça. Je me soucie beaucoup des idées et de la NCG parce que je l'aime comme une branche des mathématiques mais je ne veux pas que mon nom y soit associé en tant que prophète.

GBK : Mais il l'est !

AC : Eh bien, le fait est que ce qui importe, ce sont les idées et elles n'appartiennent à personne. Déclarer que certaines personnes sont au sommet de l'échelle et peuvent juger et classer les autres, ce sont juste des bêtises produites principalement par la sociologie (en fait par les systèmes de lettres de recommandation). Je ne veux pas que cela soit vrai dans le domaine de la NCG. Je veux la liberté, je souhaite la bienvenue aux hérétiques.

MK : Il y a ce phénomène en mathématiques où les mathéticiens de l'ancienne génération, quand ils font face à de nouvelles idées en mathématiques, résistent et il est très difficile pour eux de comprendre, mais pour la prochaine génération, ce n'est pas un problème du tout et ils adoptent et ils nagent juste à travers comme des poissons dans l'eau. Maintenant, la NCG est un domaine qui implique beaucoup de différentes choses et c'est vraiment un domaine hybride. J'ai le sentiment que pour la prochaine génération, ce sera beaucoup plus facile, car ils voient ces choses qui se passe et ils parlent aux gens, etc. Je suis donc un peu optimiste quant à la situation sociale.

AC : Exactement ! Le vrai but est de convaincre la jeune génération il y a beaucoup de choses à faire en NCG, c'est comme un immense chantier et nous avons besoin de beaucoup d'aide. Nous n'avons donc pas besoin de conférences mais d'écoles et c'est exactement la raison d'être ici : créer

une école pour convaincre les jeunes. Nous ne changerons pas les choses en convaincant l'ancienne génération. Nous nous soucions de convaincre la jeune génération.

GBK : Il est difficile de convaincre l'ancienne génération.

AC : On s'en fiche. Bien sûr, il est toujours utile d'avoir des critiques. D'un autre côté, ce n'est pas le point principal.

GBK : Il y a environ deux ou trois ans, le Clay institute a annoncé 7 problèmes. Avez-vous d'autres problèmes à ajouter à cette liste ?

AC : C'était en 2000. La principale motivation du Clay Institute était d'attirer l'attention du public sur les mathématiques et à cet égard, cela a parfaitement fonctionné. La vague est allée dans des endroits et des journaux extrêmement éloignés de la plupart des pays et tout le monde a parlé de ces problèmes. Mais un inconvénient possible associé au fait de donner l'argent pour les problèmes est de favoriser les attitudes égoïstes, par exemple, si vous êtes proche de la solution et que vous ne voulez partager vos idées avec personne.

MK : Pensez-vous par exemple qu'Hilbert n'était pas prophétique dans son choix de problèmes et le cours des mathématiques au 20e siècle n'a-t-il pas été prévu dans les problèmes de Hilbert ?

AC : Certains d'entre eux ont joué un rôle, mais les mathématiques ne fonctionnent pas comme ça. Personne ne travaille sur les problèmes parce qu'ils sont bien connus, mais on travaille plutôt dessus parce qu'ils sont intéressants et pertinents. Le but des problèmes du Millénaire était d'attirer l'attention du public sur les mathématiques et à cet égard, le projet Millenium Problems a fonctionné à merveille.

GBK : Lequel de ces 7 problèmes est le problème le plus en suspens ?

AC : Il y a toujours un élément d'arbitraire dans le choix de tels problèmes. Il y a des problèmes sur lesquels tout le monde s'accorde, comme l'hypothèse de Riemann. Mais Navier-Stokes ? C'est une équation non linéaire typique à propos de laquelle nous aimerions en savoir beaucoup plus, mais il est très

difficile de dire si le fait de savoir si admet l'existence de solutions lisses ou bien de rupture, ce qui est un problème mathématique très difficile de l'analyse, sera vraiment pertinent pour les cas concrets où l'équation s'applique. Il y a une part d'arbitraire. Donc, personne ne peut être sûr que ce sont les problèmes les plus importants et il est très difficile pour certains d'entre eux de formuler les questions tout en sachant clairement ce que signifierait une percée.

Cela est clair pour le problème de Yang-Mills, par exemple, dont la formulation "mathématique" est assez difficile.

MK : Puis-je vous poser une question sur votre voyage en Iran et votre visite à l'IPM ? Quels étaient vos sentiments avant de venir ici et comment ont-ils évolué, s'ils ont changé, et quelle est votre impression actuelle sur les mathématiques à l'IPM ?

AC : Ce qui me frappe le plus, c'est le nombre d'étudiants talentueux qui font preuve de beaucoup de liberté de pensée. Je ne m'attendais pas à voir ça. Bien sûr, j'ai aussi été vraiment impressionné par le groupe de théorie des cordes. Je dirais qu'ils sont extrêmement créatifs et ouverts d'esprit et la façon dont ils travaillent est très impressionnante. J'admire vraiment ce groupe !

GBK : Bien que leur domaine ne soit pas très prometteur !

AC : Eh bien, en tant que groupe, ils sont un merveilleux groupe de personnes et ils connaissent très bien la physique. Mon opinion personnelle sur l'avenir de la théorie des cordes en physique est non pertinent ici. Je suis un étranger. Je ne suis pas un initié. Ce dont je suis sûr, c'est qu'ils sont une bénédiction pour les mathématiques.

GBK : Et votre impression sur l'IPM et l'atmosphère ici et la manière dont la conférence s'est déroulée ?

AC : Eh bien, mon impression était extrêmement positive. L'espoir est que nous avons convaincu certains des jeunes que la NCG est un sujet approprié dans lequel ils peuvent faire beaucoup de travail original.

GBK : Nous sommes heureux d'avoir de bons amis tels que Masoud et Matilde ici et nous sommes heureux d'investir dans de nombreuses branches des mathématiques mais l'argent ne suffit pas. Nous ne pouvons pas le faire juste par cela mais peut-être que Masoud peut créer quelque chose ici.

AC : Masoud est un élément clé. Il nous a convaincus de venir et son rôle est crucial pour développer la NCG en Iran. Il peut également être le lien entre vous et la physique et c'est extrêmement important. Je suis allé enseigner en Chine en avril. Localement, on peut créer une petite vague, mais à moins qu'il n'y ait un moyen d'établir des contacts plus permanents, il est très difficile d'avoir un impact durable. Il est crucial d'atteindre un nombre critique d'étudiants et de post-doctorants et il me semble que maintenant, il est possible de créer une sorte de groupe régional de NCG. Il y a des gens en Inde, il y a des gens à Beyrouth et ils peuvent commencer à être indépendants avec des goûts différents et des approches différentes, comme les gens dans d'autres endroits.

GBK : Nous pouvons également établir des liens avec notre département de physique.

AC : Bien sûr ! Les théoriciens des cordes en savent beaucoup sur la NCG, mais ils ont une autre approche, ils sont nos meilleurs alliés et nous avons tout à gagner à nous rapprocher d'eux !

GBK : Ils sont également très enthousiastes à l'idée de cette réunion ! Ce n'est pas la première rencontre que nous avons ici depuis 16 ans, mais nous n'avons jamais rien fait de commun avec la physique. Donc celui-ci a été très réussi et vous êtes venu ici et c'était très impressionnant.

AC : C'est une excellente occasion de développer NCG ici. Pour collaborer avec ces théoriciens des cordes brillants ! Ils peuvent peut-être donner des cours de physique aux mathématiciens et tout ça. Vous savez que l'on devrait leur être complètement ouvert.

GBK : C'est donc une bénédiction pour cet institut qu'ils soient ici à côté de nous.

AC : C'est merveilleux !

GBK : Une question culturelle. Quelqu'un m'a dit que vous aviez eu une offre de Harvard dans les années 70 mais que vous l'aviez refusée.

AC : Ce n'était pas dans les années 70, c'était dans les années 80.

GBK : Vous préférez l'approche européenne des mathématiques.

AC : Bien sûr. Vous savez, si j'avais été aux États-Unis, j'aurais été obligé d'entrer dans un système que je n'aime pas du tout. Mais ce n'est pas pour cette raison que j'ai refusé d'y aller. J'avais accepté un poste au Collège de France 6 mois plus tôt et bien sûr, je n'allais pas déménager ailleurs.

GBK : Mais vous préférez le système européen.

AC : Bien sûr.

GBK : Ils disent que le système européen est très bon pour les héros mais que ce n'est pas le cas pour les mathématiciens ordinaires.

AC : En France, nous avons une merveille qui est le CNRS. C'est un endroit où les gens doués peuvent obtenir des postes qu'ils peuvent conserver pour le reste de leur vie. L'avantage principal est qu'une telle structure permet à des gens comme Lafforgue de réfléchir plusieurs années sur un problème sans avoir à produire n papiers par an et à demander une subvention NSF. Les jeunes peuvent s'investir dans des projets à long terme, ce qu'ils ne pourraient jamais faire dans un système avec une unité de temps courte.

GBK : Cela peut fonctionner pour certaines personnes et peut entraîner une barre oblique inverse pour d'autres parce qu'ils allez-y et ne faites rien pendant des années.

AC : Vous ne pouvez pas décider au préalable qui sera un Lafforgue et vous aurez automatiquement la plupart des autres personnes qui produiront très peu. C'est une règle. C'est le prix à payer pour éliminer cette pression d'écrire n papiers par an qui est absurde dans des sujets qui sont vraiment difficiles. Il faut 5-6 ans pour apprendre un tel sujet et vous ne produisez rien dans ce long intervalle. Le système français est extrêmement efficace en ce sens qu'il donne à certaines personnes la possibilité de travailler sans être constamment

mises sous pression par la nécessité de produire un papier. Il est totalement différent des autres systèmes mais il est réussi. La plupart des chercheurs du CNRS en mathématiques sont mathématiciens compétents très motivés et productifs. Le seul problème, c'est qu'il n'y a pas assez de communication avec les universités et j'ai essayé de changer cela pendant de nombreuses années. Il n'y a pas assez de flexibilité pour échanger entre le CNRS et les universités.

GBK : Mais au CNRS, les laboratoires sont situés à l'intérieur des universités ?

AC : Oui, leurs laboratoires sont dans les universités. C'est vraiment difficile pour les professeurs d'université qui sont à côté d'eux mais sont surchargés de tâches d'enseignement. Et il n'y a pas jusqu'ici un moyen facile d'échanger des droits entre les deux groupes : ceux qui sont à l'université et les membres du CNRS. Jai 'enseigné à l'université pendant 6 ans.

GBK : Quelle université ?

AC : Paris. Il est très difficile de faire de la recherche alors que l'on a des tâches à un niveau universitaire. Mon impression à ce moment-là était que le temps disponible où je pouvais faire des recherches, ce qui était un intervalle connecté avait soudainement transformé en ensemble de Cantor, j'étais constamment interrompu.

GBK : D'où obteniez-vous vos subventions ? du CNRS ou...

AC : J'ai d'abord été au CNRS pendant plusieurs années puis je suis allé au Canada. Quand j'étais au Canada, on m'a proposé un poste universitaire à Paris et je l'ai accepté, ce qui était une grosse erreur. Puis, immédiatement après avoir commencé à enseigner, j'ai réalisé que j'avais été stupide de partir et j'ai postulé à nouveau au CNRS. Il m'a fallu attendre six ans pour être réadmis. C'était entre 75 et 81.

GBK : Avant la médaille Fields ?

AC : Eh bien, un peu avant la médaille, j'ai finalement obtenu un poste au CNRS.

GBK : Mais vous êtes maintenant au Collège de France. Recevez-vous toujours votre argent de recherche du CNRS ?

AC : Non, non, il n'y a pas d'argent pour la recherche comme les subventions NSF aux États-Unis pour la recherche universitaire. La France ne fonctionne pas avec de l'argent.

GBK : Vous êtes embauché par une certaine institution,

AC : Oui par exemple le CNRS.

GBK : Alors qu'en est-il de l'argent pour faire de la recherche, pour voyager pour faire ces choses ? Toutes ces subventions viennent du CNRS ?

AC : Il y a très peu d'argent disponible pour voyager et beaucoup de bureaucratie pour ce petit montant du CNRS.

GBK : Votre salaire est payé par le CNRS.

AC : Je suis au Collège de France maintenant et j'en reçois mon salaire.

GBK : Et ce n'est pas fixe, vous obtenez des promotions.

AC : Non, c'est fixe.

GBK : Aucune augmentation ? pas d'augmentation ?

AC : Il y a un maximum que l'on atteint rapidement. Si vous voulez, chez les français le système n'est pas basé sur l'argent mais il pourrait changer. Les intellectuels ont pendant longtemps cultivé un profond mépris de l'argent qui était au moins très présent dans ma génération. Quand par exemple j'ai postulé au CNRS, j'ai postulé pour un rang parce que je me souciais beaucoup plus du "temps" que de l'argent.

MK : Ce que vous dites est très pertinent ici, car ici en Iran, ils ont essayé de construire des instituts de recherche et des systèmes de subventions et il est important de prendre note des différents systèmes disponibles dans le monde

et choisir celui qui est le plus approprié.

AC : Je pense que les systèmes les plus performants à ce jour étaient ces grands instituts de l'Union soviétique, comme l'institut Landau, l'institut Steklov, etc. L'argent n'y jouait aucun rôle, le travail consistait simplement à parler de science.

C'est un rêve de rassembler de nombreux jeunes dans un institut et de s'assurer que leur l'activité de base est de parler de science sans se corrompre en pensant à l'achat d'une voiture, obtenir plus d'argent, avoir un plan de carrière, etc. bien sûr dans l'ancienne Union soviétique, il n'y avait pas de voitures à acheter, etc. le problème ne s'est donc pas posé. En fait le CNRS se rapproche assez de ce rêve aussi, pourvu qu'on évite toute interférence de notre société qui de nos jours a malheureusement tendance à devenir de plus en plus orientée vers l'argent.

GBK : Combien y a-t-il de professeurs de mathématiques au Collège de France ?

AC : 4

GBK : Toi et Serre et ...

AC : Non, Serre a pris sa retraite. C'est Zagier, Yoccoz, Lions et moi.

GBK : Avez-vous des tâches d'enseignement ?

AC : Oui, je dois enseigner 18 heures par an sur des trucs originaux produits durant l'année.

GBK : Dans votre propre sujet.

AC : Bien sûr, l'idée est de montrer la recherche en cours. Dans le cas optimal, vous découvrez de nouvelles choses au fur et à mesure que vous progressez dans le cours. J'ai été capable de faire cela seulement 4-5 fois en vingt ans, mais en effet, c'est arrivé. L'idée d'une classe optimale consiste à expliquer quelques idées de base au début de la classe, et à les développer au fur et à mesure des cours.

GBK : 18 heures par an, ces cours sont-ils répartis selon un programme ou sont-ils libres ?

AC : Tous les mathématiciens donnent des conférences deux heures par semaine pendant une période de trois mois.

GBK : Et le reste du temps, tu es libre ?

AC : Vous êtes bien sûr totalement libre.

GBK : C'est un bon boulot !

AC : À bien des égards, c'est une dose homéopathique parfaite d'enseignement. L'enseignement est extrêmement utile pour plusieurs raisons. La première est que vous apprenez à parler, la seconde est que vous êtes obligé de vérifier soigneusement les choses.

Ce n'est pas un exposé, le cours doit être pensé dans tous ses détails. Il existe d'autres raisons, comme obtenir des interactions fructueuses avec le public. Enfin, il n'y a aucun moyen de devenir paresseux car il est très exigeant au fil des ans de produire chaque année suffisamment de matériel pour 18 heures de travail original.

GBK : Ces cours sont-ils bien suivis ?

AC : Oui, environ 70 personnes y assistent.

GBK : Vous critiquiez la manière américaine de faire de la recherche et leur approche de la science mais ils ont aussi très bien réussi, non ? Vous devez travailler dur pour obtenir des postes et des subventions de recherche. Leur système est très unifié dans le sens où ils ont très peu d'instituts comme l'Institute for Advanced Studies (IAS) mais sinon leur système s'inspire des universités. Vous devenez donc d'abord professeur assistant et ainsi de suite. Vous êtes toujours inquiet de votre réemploi mais malgré tous ces dangers, le système fonctionne.

AC : Je ne suis pas vraiment d'accord. Le système ne fonctionne pas comme

un système fermé. Les États-Unis réussissent principalement parce qu'ils importent des scientifiques très brillants de l'étranger. Par exemple, ils ont importé tous les mathématiciens russes à un moment donné.

GBK : Mais le système est assez grand pour accueillir toutes ces personnes, c'est aussi un bon point.

AC : Si l'Union soviétique ne s'était pas effondrée, il y aurait encore une grande école de mathématiques là-bas sans pression pour l'argent, sans subventions et ils réussiraient mieux que les États-Unis. Dans un certain sens, une fois qu'ils ont migré aux US, ils ont survécu et se sont très bien débrouillés, mais je pensais qu'ils auraient mieux fleuri s'ils n'avaient pas été transplantés. En faisant ainsi, ils donnent l'impression que le système américain est très efficace, mais il ne l'est pas du tout. Il y a une pression constante pour réduire "l'unité de temps" de la production de la plupart des jeunes. Les débutants n'ont d'autre choix que de trouver un conseiller sociologiquement bien implanté (pour qu'à un stade ultérieur, il ou elle puisse écrire les lettres de recommandation pertinentes pour que l'étudiant puisse obtenir un poste), puis de rédiger une thèse technique montrant qu'ils ont de bons muscles, et tout cela dans une quantité de temps limitée qui les empêche d'apprendre des choses qui nécessitent plusieurs années de dur labeur. Nous avons bien sûr besoin de bons techniciens, mais ce n'est qu'une fraction de ce qui génère des progrès dans la recherche. Ca me rappelle une anecdote sur Andre Weil qui à un moment donné a eu des problèmes avec des opérateurs elliptiques alors il a invité un grand expert dans le domaine et il lui a donné la problème. L'expert s'est assis à la table de la cuisine et a résolu le problème après plusieurs heures. Pour le remercier, Andre Weil a dit "quand j'ai un problème avec électricité, j'appelle un électricien, quand j'ai un problème d'ellipticité, j'appelle un ellipticien.". De mon point de vue, le système actuel aux États-Unis décourage vraiment des penseurs vraiment originaux, ce qui va souvent de pair avec une lente maturation au niveau technique. Aussi la façon dont les jeunes obtiennent leur position sur le marché crée des "féodalités" à savoir quelques domaines bien implantés dans des universités, et qui se reproduisent en ne laissant aucune place à de nouveaux domaines.

GBK : Aux États-Unis, il y a tellement de mathématiciens. Leur système produit environ 1200 nouveaux doctorats par an.

AC : Et ils ne peuvent pas trouver de position à moins qu'ils appartiennent à un domaine avec le timbre d'approbation.

GBK : C'est énorme ! Astronomique !

AC : Mais le problème est que le fait qu'ils trouvent ou non un poste dépend de qui rédigera leurs lettres de recommandation. Je ne dis pas quel genre de lettre ils recevront puisque toutes ces lettres se ressemblent dans leur style emphatique. Le résultat est qu'il y a très peu de sujets qui sont mis en valeur et produisent des étudiants et bien sûr cela ne crée pas les bonnes conditions pour que de nouveaux champs émergent. Au moins en France, si vous avez un poste au CNRS, vous êtes autorisé à faire ce que vous voulez et les gens reçoivent le maximum de liberté de pensée sans aucune pression sociale malsaine pour travailler dans ce domaine ou ce domaine si l'on veut assurer son avenir !

GBK : Mais ici, en Iran, notre ancien système était calqué sur le système français. Dans l'Université de Téhéran il y a longtemps, la plupart des professeurs ont été formés en France, certains avant la Seconde Guerre mondiale et certains après, mais le système n'était pas du tout efficace. Personne n'a rien fait.

MK : Mais ils n'ont pas fait de recherche pour d'autres raisons, comme les institutions sociales et politiques.

AC : Vous n'aviez pas le CNRS. Ce qui est vital pour la recherche, c'est le CNRS.

MK : Ces gens étaient la première génération d'Iraniens qui ont été en contact avec les mathématiques modernes et il était très difficile de continuer ça en Iran après eux.

GBK : Si vous adoptiez quelque chose comme le CNRS sans contrôle, sans vérification, alors personne ne ferait de la recherche.

MK : Mais ce n'est pas clair.

GBK : La France a une tradition scientifique depuis 5oo ans. Vous allez à

Sorbone et vous voyez tous ces grands noms. Le système CNRS y fonctionne car il ont des os de poids au CNRS.

AC : La simple création d'un analogue du CNRS ne résoudra pas le problème bien sûr, mais il est clair que ce type de système a également réussi en Union soviétique ; le système était similaire au CNRS avec un grand nombre de chercheurs et ils faisaient de bonnes choses.

GBK : Il s'agit probablement de deux types de systèmes différents. La France et la Russie sont différents de l'Iran.

MK : Je ne suis pas pessimiste parce que la recherche d'idées abstraites et de connaissances supérieures a de fortes racines dans la culture perse. Science et savoir juste pour le plaisir de la science et de la connaissance.

AC : Exactement.

MK : Bien sûr, il y aura les mêmes cas de personnes qui abuseront du système et ne produiront rien.

AC : Vous ne pouvez pas éviter cela de toute façon, c'est une loi statistique et si vous essayez de supprimer la queue de la courbe vous ne réussirez pas, vous allez juste la déplacer.

MK : Mais le résultat moyen sera très bon.

GBK : Mais si les nombres sont très grands et si les nombres sont très petits, le système souffre. Par exemple ici, à l'IPM, si nous ne vérifions les résultats de quiconque, si nous donnons cet argent, si nous demandons aux gens de faire des recherches, si nous ne vérifions pas et s'il n'y a pas de coups de pied, nous perdrons l'efficacité.

MK : Mais seules de très bonnes personnes sont engagées au CNRS.

AC : Oui, le fait est qu'il est très difficile d'intégrer le CNRS. C'est extrêmement compétitif. Mais une fois que vous avez réussi, vous pouvez rester pour le reste de votre vie et aucune évaluation réelle n'est effectuée qui présente des aspects négatifs évidents. Un système qui serait légèrement meilleur que le

système actuel serait le suivant : admettre d'abord un grand nombre de jeunes au CNRS pendant 6 ans. Ensuite, après 6 années, ils devraient tous quitter le CNRS et enseigner à l'université dans divers niveaux. Ensuite, et alors seulement, ils pourraient postuler à nouveau au CNRS. Ils réintégreraient le CNRS et n'obtiendraient un poste permanent qu'après cette deuxième étape où évidemment la compétition serait féroce. S'ils ne réussissaient pas lors de la deuxième étape, ils resteraient à l'université où ils enseigneraient. Cela pourrait améliorer le système en mettant davantage l'accent sur la liberté pour les jeunes et la création d'un deuxième filtre pour diminuer le nombre de personnes qui restent au CNRS et ne produisent rien. Ils serait dans les universités et enseigneraient, ce qui est bien.

GBK : Si vous travaillez bien durant 6 années, vous allez dans des universités et vous pouvez recandidater au CNRS si vous êtes relativement bon.

AC : Après six ans, vous devez impérativement aller à l'université et seulement vous pourrez postuler à nouveau au CNRS.

GBK : Mais si vous réussissez très bien lors des deux étapes, vous pouvez rester au CNRS le reste de votre vie.

AC : Si vous avez très bien réussi, vous pourrez rentrer au CNRS où vous deviendrez alors directeur de la recherche et où vous aurez beaucoup d'étudiants et plus de liberté de penser que les professeurs d'université.

GBK : Il y a donc deux étapes de test.

AC : Ce n'est pas ce qui se fait maintenant. Maintenant, si vous entrez au CNRS, vous pouvez y rester pour le reste de votre vie, ce qui n'est pas si bon car ça empêche l'entrée de personnes plus jeunes. Nous avons besoin de beaucoup plus de portes ouvertes entre le CNRS et l'Université.

MK : Comment choisissez-vous vos problèmes de recherche ? Vous semblez revenir aux problèmes que vous avez étudiés une fois et les regarder avec les nouveaux outils que vous découvrez au fur et à mesure.

AC : Bien sûr, je n'abandonne jamais les problèmes. Sur les problèmes qui me préoccupent, je suis persévérant. Je pense qu'en mathématiques, il

est extrêmement important d'être patient. Le point clef n'est pas plus d'être plus brillant ou plus rapide. Oubliez cette idée ! Ce qui est important c'est de ne jamais abandonner un problème.

MK : Avez-vous des héros mathématiques ?

GBK : Il vient du Canada. Il cherche des héros !

AC : L'impression que j'ai après de nombreuses années est que chaque être humain est unique et pourrait bien être un héros d'une certaine sorte selon les circonstances. En mathématiques, le problème n'est pas vraiment d'être un héros mais de pouvoir être patient et d'appliquer suffisamment d'intensité à ses recherches.

MK : Mais aussi en tant qu'enseignant, je pense qu'il est important de donner des modèles aux jeunes gens, quelque chose que les jeunes peuvent aspirer à être, à imiter et à admirer.

AC : Je suis la pire personne pour être un modèle.

MK : Vous êtes un modèle très difficile à essayer d'imiter bien sûr !

GBK : Vous n'avez donc pas de héros mais qui admirez-vous le plus ?

AC : La vie a forcé certains mathématiciens à être des héros et bien sûr Galois est un merveilleux exemple à cet égard. Il a passé la majeure partie de la dernière année de sa courte vie en prison et il a été contraint de passer ses journées parmi une foule bruyante de bandits qui à un moment donné l'ont forcé à boire une bouteille d'alcool fabriqué qui l'a rendu terriblement malade. Il avait cette force de caractère incroyable et était capable de continuer à travailler dans un tel environnement. Il avait à peine vingt ans et on aurait dit qu'il avait déjà cinquante ans... mais il a produit ces merveilleuses idées qui se propagent encore dans l'esprit des mathématiciens... Malgré la dureté de sa vie, il a pu continuer à produire des idées séminales. La plupart des mathématiciens ne sont pas des héros à coup sûr.

GBK : Gardez-vous un bon souvenir de l'Ecole Normale ?

AC : Sûr ! Je peux vous raconter ce qui s'est passé lors de mon entrée à l'Ecole Normale en 66. Je venais de Marseille et j'avais subi deux ans de préparation école qui était "bourrage d'oies". Nous apprenions à calculer des intégrales, à dessiner des graphes de fonctions etc. et j'en avais marre. Quand Je suis arrivé à l'Ecole Normale, essentiellement, j'ai pris un an de congé.

C'était comme un hôtel à Paris et nous nous sommes amusés, sauf que nous discutions tous le temps de mathématiques avec les autres étudiants. Après cette année, j'ai commencé à travailler seul, à faire de la recherche.

GBK : Vous n'aviez pas à suivre de cours ?

AC : Je ne suis allé à aucun cours et je ne savais pas où se trouvait l'université, alors quand je devais passer l'examen, mon ami a dû m'emmener dans la salle d'examen et j'ai alors vu l'université pour la première fois !

GBK : C'était donc un temps de loisir !

AC : Non, ce n'était pas du loisir, c'était de la liberté, c'était une sorte de réaction contre les écoles préparatoires dans lesquelles on nous a enseigné des recettes pour réussir les examens. Je voulais juste penser tranquillement par moi-même et profiter de la vie bien sûr, et c'était donné à l'Ecole Normale.

GBK : C'était avant 1969 ?

AC : Je suis entré à l'automne 66 et puis sont venus les événements de 1968.

GBK : Ce fut une période mouvementée.

AC : Oui, 68 a été une période mouvementée. Nous avions déjà construit la bonne ambiance pour 68.

GBK : Vous étiez donc à Paris au meilleur endroit et au meilleur moment.

AC : Oui, c'était un bon moment. Je pense que c'était idéal que nous soyons un petit groupe de jeunes gens et notre seule motivation était la pensée pure et de ne pas parler de carrière. On s'en foutait et notre occupation principale n'était que de discuter mathématiques et de se confronter aux problèmes. Je

ne veux pas dire des “puzzles” mais “des problèmes qui nécessitaient beaucoup de réflexion, de temps ou de vitesse”, ce n'était pas un facteur, nous avions tout le temps dont nous avions besoin. Si tu pouvais donner ça aux jeunes surdoués, c'était parfait.

GBK : Combien d'années êtes-vous resté là ?

AC : Pendant 4 ans, mais comme je l'ai dit, la première année était une année libre et ensuite j'ai dû passer l'agrégation et j'ai refusé. J'étais l'une des deux personnes qui refusaient de subir cet examen parce que je ne voulais pas retourner à l'école depuis que j'avais à peine réussi à survivre à cela auparavant.

MK : Comment avez-vous rencontré votre premier problème de recherche ? Vous avez mentionné que vous aviez une idée claire de ce que vous vouliez faire.

AC : Je travaillais sur l'emplacement des racines des polynômes. On vous donne donc un polynôme et vous voulez savoir où se trouvent les racines dans le plan complexe.

C'était mon premier problème. J'avais trouvé une notion, une sorte d'ordre faible dans les nombres complexes, ce qui simplifiait toutes les preuves des théorèmes dans les livres que je regardais et on pouvait aller un peu plus loin. J'ai travaillé à cela pendant un certain temps.

MK : Ensuite, vous êtes passé rapidement aux algèbres de von Neumann.

AC : Il m'a fallu beaucoup de temps pour trouver ce que je voulais vraiment faire. Quand je me suis mis à travailler sur les algèbres de von Neumann, j'avais l'impression que cela faisait partie des mathématiques largement acceptées.

C'était comme passer d'un tout petit village à une grande ville et chaque fois, je pensais que j'étais déjà au centre de mathématiques. Mais quand je suis arrivé à l'IHES en 76, j'ai réalisé que ce n'était vraiment pas le cas. Mais je n'ai jamais eu envie d'intégrer le courant principal. Je détestais vraiment l'arrogance de certaines personnes. Mon seul désir était de faire des choses

qui étaient orthogonales à ce que faisaient ces gars-là.

Cela impliquait d'être aussi loin de la géométrie algébrique qu'on pouvait l'être.

GBK : Êtes-vous allé à l'IHES à l'époque de Grothendieck ?

AC : Pas à ce moment-là, principalement parce que, de loin, cela ressemblait à un groupe arrogant. Après toutes ces années, j'ai finalement pris le temps de lire le livre de Grothendieck livre *"Récoltes et semailles"* et cela m'a permis de vraiment comprendre son interprétation et sa personnalité beaucoup mieux. J'ai réalisé que derrière cette apparence arrogante se trouvait l'être humain le plus admirable et je regrette de ne pas avoir eu la chance de lui parler. En fait, la correspondance entre Grothendieck et Serre est disponible en version imprimée et c'est un merveilleux témoignage de leur pouvoir et personnalités. Le plus frappant est cette grande honnêteté intellectuelle, un modèle le cas échéant !

GBK : Avez-vous fait partie de Bourbaki ?

AC : Eh bien, je l'ai fait pendant un an mais je me suis vite découragé. Ils avaient déjà fait le point en quelque sorte. J'ai découvert qu'ils avaient environ 500 manuscrits, chacun d'environ 200 pages, qui étaient stockés quelque part dans un placard, certains déjà depuis vingt ans. Donc, en écrire un de plus ressemblait à un perte d'énergie. Tant qu'ils avaient quelqu'un comme Dieudonné qui a écrit pendant sa vie mathématique quelque chose comme 80 000 pages de mathématiques dans un style implacable, la machine fonctionnerait. Mais quand je suis arrivé, il était déjà parti et il n'y avait personne pour le remplacer. Donc ça ressemblait plus à un club et je n'ai pas voulu participer.

GBK : Quand était-ce ?

AC : C'était en 78 ou quelque chose comme ça.

GBK : Alors vous avez annoncé que vous partiez ?

AC : Tu n'es pas obligé. Tu ne vas simplement pas aux réunions, tu arrêtes

simplement d'y aller. Une autre raison de partir était qu'ils avaient un style de vie désagréable. Les gens partaient sans dire au revoir, être grossier était la caractéristique principale des fondateurs, caractéristique qu'ils semblaient chérir. Je l'ai trouvée très irritante. Clairement les fondateurs ont fait de grandes choses...

GBK : Pendant quelques temps.

AC : Pendant quelques temps. Leur livre d'intégration est terrible mais ils ont produit ces beaux livres en algèbre, et toute la série sur les groupes de Lie qui est merveilleuse.

Traduction d'une interview de
Alain Connes
par
Catherine Goldstein et Georges Skandalis
© Société mathématique européenne 2008

L'entretien a été réalisé par Catherine Goldstein et George Skandalis, à Paris.

La première partie est parue dans le numéro 63, p. 25 à 30 de la Newsletter.
https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2007-03-63.pdf.

La deuxième partie est parue dans le numéro 67, p. 29 à 33 de la Newsletter.
https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2008-03-67.pdf

Y a-t-il des mathématiciens du passé dont vous vous sentez proche ?

Proche, je ne dirais pas mais il y en a un que j'admire en particulier : Galois. Il y a une caractéristique très frappante dans ses écrits ; leur formulation est très simple. Par exemple, "Prenez une équation avec n racines différentes. Puis, première affirmation, il existe une fonction rationnelle de ces racines qui prend $n!$ différentes valeurs lorsque vous permutez les racines ; et, deuxième déclaration, les racines sont des fonctions rationnelles de cette fonction". Malgré la simplicité trompeuse de leur formulation, en utilisant ces déclarations Galois réussit à aller extrêmement loin. Il écrit l'équation dont les racines sont les $n!$ différentes valeurs de la fonction rationnelle, il la divise en facteurs irréductibles, il écrit comment les racines de l'équation originale dépendent des racines de ces facteurs et il voit un groupe. Et il montre que ce groupe est indépendant de tous les choix faits en cours de route ... Pour y parvenir, il caractérise le groupe abstraitement par une propriété unique : "Une fonction des racines est rationnellement déterminée si et seulement si elle est invariante par ce groupe". C'est si simple. Je trouve fabuleux ce genre de saut utilisant le pouvoir de l'abstraction, ce saut immense dans la conceptualisation des choses. Le pouvoir de l'intuition de Galois n'est pas basé sur l'idée de

symétrie mais sur un concept d'ambigüuité. Naïvement, on pourrait dire qu'il a étudié le groupe d'invariance de certaines fonctions. Mais la première étape que Galois met en œuvre est tout le contraire : il casse autant que possible la symétrie en choisissant une fonction qui n'a aucune invariance du tout. Les mathématiciens avant lui - Cardano, Lagrange - ont travaillé avec les fonctions symétriques des racines. Galois, sur les traces d'Abel, fait le contraire : il choisit une fonction avec le moins de symétrie possible. Et c'est la fonction avec laquelle il commence. Ce qui me frappe, c'est la fécondité de ces idées ; les différents formalismes que nous avons développé pour les attraper n'épuisent pas encore leur puissance. Les idées de Galois ont une clarté, une légèreté, un potentiel de réflexion qui reste non encore bien apprivoisé à ce jour et elles trouvent un écho dans l'esprit des mathématiciens jusqu'à maintenant. Elles ont engendré de grands concepts comme les catégories Tannakiennes ou la correspondance Riemann-Hilbert ... Ces idées sont très jolies mais elles sont souvent présentées avec une telle pédanterie qu'elles ressemblent à des jougs lourds et on n'a pas l'impression qu'elles ont été libérées comme l'ont été les idées de Galois. Les autres avatars des idées de Galois sont la théorie différentielle de Galois et la théorie des motifs, qui peut être considérée comme un analogue en dimension supérieure de la Théorie de Galois. Mais avons-nous vraiment compris ce que Galois avait en tête quand il écrit : "Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambigüité. Il savait voir a priori dans une relation entre des quantités ou des fonctions transcendantes quels échanges pourraient se faire, quelles quantités pourraient se substituer aux quantités de données sans que la relation puisse cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore assez développé sur ce terrain qui est immense.". Il existe d'autres exemples de mathématiciens qui m'ont vraiment aidé à un stade précoce en tant que source d'inspiration. Ce n'est pas que je me sente proche d'eux dans ce que je fais, mais j'admire ce qu'ils font. Au début, j'étais fasciné par Jacobi parce que j'ai trouvé sa façon de calculer merveilleuse. Et par von Neumann - la profondeur de ce qu'il avait découvert et la façon dont il en parlait ... Et par Tomita bien sûr. J'étais fasciné par la personnalité mystérieuse de Tomita ; c'est quelqu'un qui a réussi à éviter tous les pièges que la société tend à poser à quelqu'un d'extrêmement original. Il est devenu sourd à l'âge de deux ans. Quand il a commencé ses recherches, son directeur de thèse lui a donné un énorme livre en lui disant : "et revenez me voir une fois que vous aurez lu

ce livre.". Tomita a rencontré accidentellement son tuteur de thèse deux ans plus tard et ce dernier lui a demandé : "Comment va le livre ?", à quoi Tomita a répondu, "Oh, je l'ai perdu après une semaine"... Mais je pense que la source la plus fraîche, la plus limpide, c'est Galois. C'est très bizarre mais je n'ai jamais séparé Galois de ce puissant mélange de simplicité et de fécondité.

Voulez-vous dire quelque chose sur Choquet ?

Je me souviens des premières années où je faisais de la recherche ; je travaillais seul à la maison, mais tous les jeudis, j'assistais au séminaire de Choquet. Et il brillait par sa sagesse, son esprit. Il y avait des questions qui éclataient, c'était extrêmement ouvert. Cela m'a façonné en profondeur. Et Choquet avait quelque chose d'unique : il avait été très proche de l'école polonaise de mathématiques avant la guerre. Et donc il savait beaucoup de choses qui ne font pas partie du programme habituel des mathématiciens, mais qui sont en fait assez intéressants.

Ce n'est qu'avec Choquet par exemple que j'ai appris la théorie des ordinaux. Vous pourriez penser que cette théorie est inutile, mais c'est absolument faux. Par exemple, je me souviens d'une fois, l'IHES avait une journée portes ouvertes. Il y avait une classe de première année, des petits enfants, et parmi eux une fille avec une intelligence brillante. Et donc, après que le sujet de l'indécidabilité a été soulevé, je leur ai donné un exemple tiré de la théorie des ordinaux, de l'histoire du lièvre et de la tortue. Vous prenez un nombre N, pas trop grand (ils en avaient pris 5 ou quelque chose comme ça). Ils avaient appris à écrire des nombres dans différentes bases : 2, 3, etc. Je leur ai expliqué que l'on écrit le nombre en base 2, puis le lièvre vient et remplace tous les 2 par 3. Ainsi $5 = 2^2 + 1$ est remplacé par $3^3 + 1 = 28$ ..., et la tortue soustrait juste 1. Ensuite, on écrit le résultat en base 3 et le lièvre vient et remplace tous les 3 par des 4 et la tortue soustrait à nouveau 1, etc. Eh bien, le phénomène extraordinaire qui vient de la théorie des ordinaux est que la tortue gagne. Après un nombre fini d'étapes et même si vous avez l'impression que le lièvre fait des sauts absolument gigantesques chacun, au bout d'un certain temps, vous obtenez 0 !

Et ce qui est difficile à croire, c'est que cela ne peut pas être prouvé dans le cadre de l'arithmétique de Peano. La preuve utilise la théorie des ordinaux ! Vous pouvez en fait montrer que le nombre d'étapes nécessaires avant que

la tortue est plus rapide que n'importe quelle fonction de N, vous pouvez l'écrire explicitement.

Vous pouvez voir sur l'ordinateur combien d'étapes il faut pour atteindre 0. Mais la preuve que la tortue nécessite d'utiliser la théorie des ordinaux. Que faire ? Vous prenez le premier numéro et au lieu de remplacer le 2 par 3, puis par 4, etc., vous les remplacez par l'ordinal ω. Par exemple 5 est $2^2 + 1$, vous écrivez donc $\omega^\omega + 1$. Ceci est un ordinal et un ordinal est un ensemble bien ordonné et chaque séquence d'ordinaux décroissante s'arrête nécessairement. Maintenant, quand vous faites le mouvement du lièvre, cela ne change rien, mais la tortue soustrait 1, et vous obtenez de cette façon une décroissance, une séquence d'ordinaux strictement décroissante. Cela doit cesser et vous en avez la preuve. Et la preuve utilise ω... il n'est donc pas si surprenant qu'elle dépasse l'arithmétique de Peano. C'est typique du genre de choses dont nous discutions au séminaire de Choquet.

Et c'est une culture mathématique en partie oubliée, mais qui est en fait extrêmement riche. Nous vivons dans un monde mathématique qui est de plus en plus plus monoculturel. Nous proclamons des principes pour dire quelles mathématiques sont importantes et lesquelles ne le sont pas. J'essaie de défendre la diversité. Je crois qu'il est crucial de laisser les écoles fleurir. Ceci est très important pour la santé des mathématiques.

Algèbres d'opérateur et coïncidences : comment tout a commencé ?

En 1970, je suis allé à l'école d'été des Houches [en physique], envoyé par Choquet. A cette époque, je travaillais sur l'analyse non standard mais après un certain temps, j'avais trouvé une faille dans la théorie... Le fait est que dès que vous avez un nombre non standard, vous obtenez un ensemble non mesurable. Et dans le séminaire de Choquet, ayant bien étudié l'école polonaise, nous savions que chaque ensemble que vous pouvez nommer est mesurable. Il semblait donc tout à fait voué à l'échec d'essayer d'utiliser l'analyse non standard pour faire de la physique. Mais ça me convenait comme passeport aux Houches en 1970. Et de là, j'ai été embauché comme camarade au Battelle Institute et j'ai reçu une invitation pour me rendre à Seattle. Je l'ai accepté surtout pour visiter les États-Unis, je n'ai même pas regardé le programme. Et la coïncidence qui s'est produite, c'est que je me suis arrêté à Princeton pour rendre visite à mon frère et j'ai acheté un livre, au hasard, à la librairie

de Princeton. J'ai hésité entre plusieurs livres jusqu'à ce que je tombe sur celui qui m'a fasciné, par Takesaki sur la théorie de Tomita. Et comme je savais que j'allais faire un long voyage en train, j'ai acheté le livre. Et j'ai contemplé le livre - je ne peux pas dire que je l'ai lu, c'était vraiment trop dur - pendant le voyage à travers les plaines du Middle-West. Et la coïncidence encore plus extraordinaire fut que, lorsque je suis arrivé à Seattle, le premier jour où je suis allé voir le programme de la conférence, il y avait des conférences de Takesaki sur la théorie de Tomita. A partir de ce jour, je me suis dit : "Ca y est, je ne vais à aucune autre conférence, juste à celle de Takesaki ".

Ce n'est pas une attitude très scientifique...

Non, et d'ailleurs à cette époque j'étais fasciné par tout ce qui était japonais ; c'était plus au niveau d'une sensibilité à quelque chose de totalement différent, que je ne connaissais pas du tout ... S'il y a une leçon à tirer, c'est que cela m'a conduit complètement hors du cercle d'idées dans lequel j'étais absorbé à l'époque. Et à ce moment-là, il y a eu une autre coïncidence, de sorte que quand je suis revenu, j'ai encore eu un coup de chance incroyable. J'avais compris un peu de la théorie de Tomita, un peu ; je n'ai pas pu faire de recherche. Mais quand je suis revenu, je me suis dit que j'irais au séminaire à Paris qui traite des algèbres d'opérateurs. Je suis donc allé au séminaire Dixmier et la première fois que j'y suis allé, c'était la réunion d'organisation ; le thème principal de l'année devait être les Araki-Woods travaillant sur des produits tenseurs infinis. Dixmier distribuait les papiers parmi les participants, un peu au hasard. Il n'en restait plus qu'un ; j'ai levé la main. En rentrant chez moi dans le RER [train de banlieue], je m'ennuyais. J'ai regardé un peu le papier qui m'avait été remis, puis j'ai été vraiment ramené en arrière. J'ai réalisé que dans cet article, il y avait des formules qu'il aurait fallu être un idiot complet pour ne pas voir comme étant identiques, comme correspondant exactement à celles de la théorie de Tomita. Et ces formules disaient qu'un certain vecteur était un vecteur propre pour l'opérateur défini par Tomita. Une heure après mon arrivée à la maison, j'ai écrit une lettre à Dixmier disant : "Voici les Araki-Woods et voici la théorie de Tomita". Vous pouvez voir que l'on peut obtenir les premiers invariants de l'intersection des spectres des opérateurs de Tomita et je lui ai donné les formules. Et comme j'avais été élevé par Choquet, j'ai écrit tout cela en une demi-page. Dixmier a immédiatement répondu : "Ce que vous écrivez est totalement incompréhensible, j'ai besoin de détails". Et donc j'ai réécrit trois pages de détails, ce

qui n'était pas difficile, expliquant qu'on pouvait définir un invariant que j'ai appelé S^*. Dixmier m'a fixé un rendez-vous pour que j'assiste à son prochain séminaire. Je suis allé le voir et tout ce qu'il a dit alors, c'était "Foncez !", qui en français est une forme forte de "Allez-y !". C'était le point de départ. J'ai vraiment eu une chance incroyable ; ce n'était pas vraiment difficile. Mais pas exactement écrit noir sur blanc, c'était là dans les formules. C'est sûr que si j'étais resté à Paris, si je ne m'étais pas éloigné de mon cercle, j'aurais continué à travailler dans une direction étroite et je n'aurais pas été ouvert à des horizons totalement différents. J'ai vraiment eu cette impression à ce moment-là de prendre une bouffée d'air frais qui m'a permis d'accéder à une partie plus centrale des mathématiques. J'ai souvent eu l'impression qu'il y avait des cercles concentriques dans le monde mathématique, que l'on commence à travailler dans une partie totalement excentrique et qu'on essaie de se rapprocher progressivement du cœur.

Quel est ce cœur ? Est-ce subjectif ?

Ce que je veux dire par cœur des mathématiques, c'est cette partie qui est inter-connectée à pratiquement toutes les autres. Un peu comme tous les chemins mènent à Rome. Ce que je veux dire, c'est que lorsque l'image mentale que vous obtenez d'un sujet mathématique devient de plus en plus précise, vous vous rendez compte en fait que quel que soit le sujet par lequel vous commencez, si vous le regardez suffisamment précisément, après un certain temps, il converge vers ce cœur : formes modulaires, fonctions L, arithmétique, nombres premiers, toutes sortes de choses liées à cela. Ce n'est pas que ces choses soient plus difficiles et je détesterais suivre le mauvais exemple dont je parlais avant de poser des sujets excentriques. Ce que je veux dire, c'est que si vous marchez assez longtemps, vous êtes obligé d'aller vers ces domaines, vous ne pouvez pas rester à l'extérieur. Si vous le faites, c'est un peu par peur. Vous pouvez réussir à faire beaucoup de choses en affinant les techniques dans un sujet donné, mais à moins que vous ne continuiez résolument à aller vers le cœur, vous vous sentez laissé dehors. C'est très étrange et sûrement subjectif.

Dans vos recherches, vous avez obtenu des résultats brillants : vous avez cité plus tôt la découverte de l'invariant S. Il y a aussi le cas des

∗. l'intersection des spectres de tous les opérateurs modulaires

2 × 2 cocycles et autres qui vous ont coûté des efforts considérables

Bien sûr. Cette astuce matricielle 2 × 2 qui est d'une simplicité absolue † est venue en effet pour moi tout d'un coup, mais seulement après avoir passé trois mois à faire d'horribles calculs ; je faisais des calculs concrets de morphismes modulaires d'automates à états quasi-périodiques, etc. En fait, avant de découvrir cette propriété de cocycle, je l'avais rencontré par expérience. L'astuce de la matrice 2 par 2 est venu à moi par hasard dans un flash, mais parce que le sol avait été préparé par des tonnes et des tonnes d'exemples, des tonnes et des tonnes de calculs. Mon impression, c'est que je n'ai jamais rien obtenu à bas prix. Tous mes résultats ont été précédés de préparatifs - mise en place des travaux, une très longue expérimentation - en espérant qu'à la fin de cette expérimentation, une idée incroyablement simple se produise qui vienne et résolve le problème. Et puis vous devez passer par la période de vérification, presque intolérable à cause de la peur que vous avez de vous être trompé. Je ne laisserai jamais personne croire que tu peux attendre comme ça jusqu'à ce que les résultats viennent tout seuls. J'ai passé tout l'été [de 2006] à vérifier un formule qui donne le modèle standard couplé à la gravitation dans notre travail commun avec Chamseddine et Marcolli. Le calcul est monumental : dans le modèle standard, il y a quatre pages de termes avec des coefficients 1/8, 1/4, de sinus ou cosinus de l'angle de Weinberg... et si vous n'avez pas vérifié toutes les chose avec tous les coefficients, vous ne pouvez pas prétendre que le calcul donne le bon résultat. J'ai trouvé des coefficients différents de ceux du livre de Veltman, ce qui m'a obligé à refaire encore et encore ces calculs jusqu'à ce que Matilde Marcolli [avec qui j'écris un livre] se rende compte que les coefficients que nous avions étaient les bons et avaient été corrigés par Veltman dans sa deuxième édition ! Il y a toujours cette peur permanente de l'erreur qui ne s'améliore pas au fil des ans. Et il y a cette partie du cerveau qui est sans cesse en train de vérifier et qui émet en douceur des signaux d'avertissement. J'ai eu des peurs obsédantes à propos de ça. Par exemple, il y a quelques années, j'ai rendu visite à Joachim Cuntz en Allemagne et dans le train du retour, j'ai regardé un exemple un peu bizarre de mon travail avec Henri Moscovici sur le théorème de l'indice local. J'avais pris une valeur particulière du paramètre et je me suis convaincu dans le train que le théorème ne fonctionnait pas. Je suis devenu une épave - j'ai vu cela aux

†. Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann, CR Acad. Sci. Paris, Sér. AB, 274, 1972.

yeux des gens que j'ai croisés dans le train de banlieue pour rentrer à la maison. J'avais l'impression qu'ils lisaient un tel désespoir en moi, ils voulaient aider... De retour chez moi, j'ai essayé de manger mais je ne pouvais pas. Enfin, prenant mon courage à deux mains, je me suis rendu à mon bureau et j'ai refait les vérifications. Et il y a eu un miracle qui a fait que le théorème marchait dans ce cas... J'ai eu plusieurs épisodes très pénibles comme celui-ci.

Concernant l'heuristique : vous avez écrit plusieurs fois que la géomé est du côté de l'intuition. En revanche, les formules semblent jouer un rôle de premier plan dans votre façon de travailler.

Ah, oui, absolument. Je peux penser beaucoup mieux à une formule qu'à un objet géométrique parce que je ne crois jamais qu'une image géométrique, un dessin soit suffisamment générique. Je n'ai pas vraiment un esprit géométrique. Quand j'ai un problème de géométrie et que je réussis à le traduire en algèbre, alors c'est beau. Il y a plusieurs étapes : d'abord la traduction, puis la façon de s'appuyer sur la pensée algébrique. J'essaie toujours de distinguer le côté intuitif (le géométrique) et le linguistique (l'algébrique) dans lequel on manipule les formules, et je pense beaucoup mieux de ce côté. Pour moi, l'algèbre se déroule dans le temps : je peux voir une formule vivre et tourner et exister dans le temps, tandis que la géométrie a quelque chose d'instantané et j'ai beaucoup plus de difficulté avec elle. En ce qui me concerne, les formules créent des images mentales.

Vous donnez souvent l'impression que vous aimez les calculs.

Absolument. Ma pensée mathématique dépend fortement des calculs. Mais, bien sûr, calculer ne suffit pas. Ensuite, il faut interpréter les choses au niveau conceptuel. Galois était l'un des premiers à comprendre que l'on peut faire face à un calcul même si ce dernier n'est pas réalisable dans la pratique. Par exemple, prenez une équation de degré sept ; le polynôme que Galois associe a le degré 7 ! Et il faut le factoriser. Ce que Galois dit : "Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est selon moi, la mission des géomètres futurs ", c'est qu'il faut sauter au-dessus des calculs, les organiser en fonction de leur difficulté. On devrait les faire, mais seulement comme une expérience de pensée dans son esprit, pas d'une manière concrète. Dans l'exemple de Galois, vous pouvez donner une fonction explicite f des racines

d'une équation $E = 0$ qui prend $n!$ valeurs différentes lorsque vous permutez les racines, vous prenez simplement une forme linéaire avec un coefficient rationnel générique. Vous pouvez ensuite aller de l'avant et exprimer les racines de $E = 0$ comme des fonctions rationnelles de f ; cela peut être fait par l'algorithme d'Euclide et par élimination. On peut utiliser l'ordinateur, et l'expression qu'on obtient est terriblement compliquée, même lorsque l'équation de départ $E = 0$ a le degré 4 ou 5. Si vous essayiez de mettre en œuvre les calculs concrètement, vous vous perdriez rapidement dans le complexité des résultats. Au contraire, ce que vous devez pouvoir faire, c'est les exécuter de manière abstraite et construire des objets mentaux qui représentent les étapes intermédiaires et les résultats à un niveau idéalisé. Je procède toujours de la manière suivante. Quelle que soit la complexité du problème, au lieu de l'essayer d'abord sur un morceau de papier avec un crayon, je sors me promener et essaie d'avoir tous les ingrédients présents dans mon esprit, afin de commencer à les manipuler mentalement. Ce n'est qu'après cet exercice que je peux voir clairement, penser aux différentes étapes et commencer à obtenir une image mentale. C'est un processus douloureux qui consiste à rassembler dans votre esprit, dans votre mémoire, tous les éléments du problème, afin de commencer à les manipuler. C'est un exercice que je recommande, eh bien, bien sûr, différentes personnes fonctionnent différemment, si l'on veut pouvoir ne pas dépendre du papier et du crayon. Parce qu'avec du papier et un crayon, vous êtes tenté de commencer à écrire immédiatement et si vous ne l'avez pas pensé assez longtemps avant, vous n'irez nulle part. Vous serez découragé avant d'avoir eu le temps de créer dans la partie linguistique du cerveau les images mentales spécifiques que vous pouvez ensuite manipuler, comme d'habitude, en les zippant, en les transformant en quelque chose de plus petit, puis en vous déplaçant autour d'elles. Si vous faites des calculs, il est essentiel d'éviter les erreurs. Il existe des moyens de vérifier, par exemple en utilisant différents chemins vers le même résultat. On peut aussi voir si le résultat d'un calcul semble correct ou non. Je me rappelle quand je travaillais avec Michel Dubois-Violette, on avait une somme de 1440 intégrales, dont chacune était l'intégrale sur une période d'une fonction rationnelle de fonctions thêta et de leurs dérivées. Nous nous attendions à ce que la somme ait une factorisation. En effet, nous avons trouvé un résultat simple qui était un produit de formes, fonctions elliptiques, etc. Lorsque vous trouvez qu'une énorme somme comme celle-ci donne un produit, vous vous sentez plutôt confiant qu'aucune erreur n'a été commise en cours de route.

La géométrie non-commutative

Qu'est-ce que la géométrie non-commutative ? À votre avis, "géométrie non-commutative", est-ce tout simplement un meilleur nom pour Algèbres d'opérateurs ou en est-ce un domaine proche mais distinct ?

Oui, il est important d'être plus précis. Premièrement, la géométrie non-commutative est pour moi cette dualité entre géométrie et algèbre, avec une coïncidence frappante entre les règles algébriques et les règles linguistiques. Le langage ordinaire n'utilise jamais de parenthèses à l'intérieur des mots. Cela signifie que l'associativité est prise en compte, mais pas la commutativité, ce qui permettrait de permuter les lettres librement. Avec les règles commutatives, mon nom apparaît 4 fois dans le message cryptique qu'un ami m'a envoyé récemment : "Je suis alenconnais, et non alsacien. Si t'as besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin annales. Qui suis-je ? " La commutativité brouille donc les choses. Dans le monde non-commutatif, qui se manifeste en physique au niveau des systèmes microscopiques, les simplifications provenant de la commutativité ne sont plus autorisées. C'est la différence entre la géométrie non-commutative et la géométrie ordinaire, dans laquelle les coordonnées commutent. Il y a quelque chose d'intrigant dans le fait que les règles d'écriture des mots coïncident avec les règles naturelles de manipulation de l'algèbre, à savoir l'associativité mais pas la commutativité. Deuxièmement, pour moi, le passage au non-commutatif est exactement le passage d'un espace complètement statique dans lequel les points ne se parlent pas, à un espace non-commutatif, dans lequel les points commencent à être liés les uns aux autres, comme objets d'une catégorie. Lorsque certains points sont liés les uns aux autres, ils peuvent être représentés par des matrices du côté algébrique, exactement de la même manière qu'Heisenberg a découvert la mécanique matricielle des systèmes microscopiques. On ne va pas très loin si on reste à ce niveau strictement algébrique, avec des manipulations de lettres... et le véritable point de départ de la géométrie non-commutative est l'algèbre de von Neumann. Ce qui m'a vraiment convaincu que cette algèbre d'opérateurs est un champ très fertile, c'est quand je me suis rendu compte - à cause d'une astuce matricielle sur les matrices 2×2 - qu'une algèbre d'opérateur non-commutative évolue avec le temps !
Elle admet un flux canonique d'automorphismes extérieurs et en particulier elle a des "périodes" ! Une fois que vous comprenez cela, vous vous ren-

dez compte que le monde non-commutatif au lieu d'être seulement une pâle réflexion, une généralisation dénuée de sens du cas commutatif, admet des caractéristiques totalement nouvelles et inattendues, comme cette génération du flot de temps à partir de la non-commutativité. Cependant, je n'identifie pas la géométrie non-commutative avec les algèbres d'opérateurs ; ce champ a sa propre vie. De nouveaux phénomènes sont découverts et il est très important important d'étudier les algèbres d'opérateurs en soi - j'ai passé une grande partie de ma vie faire ça. Mais d'un autre côté, les algèbres d'opérateurs ne capturent que certains aspects d'un espace non-commutatif, et la "seule" algèbre de von Neumann commutatif est $L^\infty[0;1]$! Pour être plus précis, les algèbres de von Neumann capturent uniquement la théorie de la mesure, et les C-algèbres de Gelfand la topologie. Et il y a beaucoup plus d'aspects dans un espace géométrique : la structure différentielle et surtout la métrique. La géométrie non-commutative peut être organisée en fonction de la caractéristique qualitative que vous examinez lorsque vous analysez un espace. Mais, bien sûr, en tant que corps vivant, vous ne pouvez isoler aucun de ces aspects des autres sans détruire son intégrité. Un aspect sur lequel j'ai travaillé le plus dur ces derniers temps est un changement de paradigme qui s'impose à vous du fait de la non-commutativité : cet aspect porte sur l'aspect métrique, la mesure des distances. C'est là que l'opérateur de Dirac joue un rôle. Au lieu de mesurer efficacement les distances en empruntant le chemin le plus court d'un point à un autre, vous êtes amené à un double point de vue, auquel vous êtes contraint lorsque vous faites de la géométrie non-commutative : la seule façon de mesurer les distances dans le monde non-commutatif est spectrale. Elle consiste simplement à envoyer une onde d'un point a à un point b puis de mesurer le décalage de phase de la vague. De manière amusante, ce changement de paradigme a déjà eu lieu dans le système métrique, alors que dans les années 60, la définition de l'unité de longueur, qui était autrefois une vraie barre métallique, a été remplacée par la longueur d'onde d'une raie spectrale. Donc, le changement qui vous est imposé par la géométrie non-commutative s'est déjà produite en physique. Ceci est un exemple typique où la généralisation non-commutative correspond à un changement brusque même dans le cas commutatif. J'ai réalisé récemment que la seule information dont nous disposions sur l'univers très éloigné est spectrale. Je n'avais pas compris que le "red shift" n'est pas un décalage de fréquence mais une mise à l'échelle des fréquences. Si vous regardez assez loin dans l'univers, les fréquences sont divisées par un facteur allant jusqu'à 1000. C'est incroyable. Et vous le voyez uniquement d'une manière spectrale.

Ce point-de-vue spectral est celui qui ressort des expériences lorsque vous étudiez l'univers ; ce n'est pas un fantasme. Et c'est un point de vue obligatoire lorsque vous essayez de regarder un espace géométrique du point de vue de la géométrie non-commutative. De ce point de vue, on est conduit très naturellement au principe d'action spectrale qui permet d'encoder géométriquement en un mot la trés grande complexité du modèle standard couplé à la gravité. Ce qui se produit c'est simplement que l'espace-temps admet une structure fine, un peu comme les spectres atomiques, et n'est ni un continuum ni un espace discret mais un mélange subtil des deux. Dans le livre que j'écris avec Matilde Marcolli, les trois cents premières pages concernent la physique : nous développons le modèle standard et la renormalisation, liés aux motivations et aux groupes de Galois, et les trois cents dernières pages concernent la fonction zêta : sa réalisation spectrale et la brisure spontanée de symétrie des systèmes arithmétiques. Nous arrivons à la fin de la rédaction du livre et nous découvrons que, de façon assez surprenante, il existe une relation profonde entre les deux parties a priori déconnectées du livre. En fait, il y a une analogie, une table de conversion, entre le formalisme de la brisure spontanée de symétrie qui est utilisée pour les systèmes arithmétiques, les fonctions zêta, les systèmes doubles, etc., et un formalisme qui semble extrêmement tentant pour les gens qui consiste à essayer de quantifier la gravité. En établissant ce dictionnaire, nous avons découvert dans la littérature que la notion d'état KMS, qui joue un rôle fondamental dans nos travaux sur la rupture de symétrie pour les systèmes arithmétiques, joue également un rôle dans la rupture de symétries des interactions électrofaibles qui donnent leur masse aux particules dans le modèle standard. Cela nous permet d'aller plus loin dans l'analogie et suggère que les gens qui essaient de développer la gravité quantique dans un espace fixé sont sur la mauvaise voie. Nous savons que l'univers s'est refroidi ; eh bien, cela suggère que lorsque l'univers était plus chaud, disons, à la température de Planck, il n'y avait aucune géométrie du tout, et c'est seulement après la transition de phase qu'une rupture de symétrie spontanée a sélectionné une géométrie particulière et donc l'univers particulier dans lequel nous sommes. C'est quelque chose auquel nous n'aurions jamais pensé - nous n'aurions jamais eu cette idée - si notre livre n'avait pas été écrit avec les deux textes parallèles. Bien sûr, il n'y a aucun point où une partie utilise ou s'appuie vraiment sur l'autre - mais vous pouvez voir une analogie émerger entre les deux parties. Comme André Weil l'a souligné, ce type de similitude mystérieuse est l'une des choses les plus fertiles en mathématiques. L'esprit humain est toujours en avance sur l'ordinateur,

car pour le moment et pour longtemps j'espère, il détecte des analogies entre des théories qui ont un contenu assez différent mais dans lesquelles le même genre de phénomènes apparaît. La traduction ne sera jamais littérale et il y aura toujours deux textes écrits dans deux langues différentes et il n'y aura jamais de correspondance un à un entre les mots d'une langue et les mots de l'autre. Mais il y aura ces étranges indices qui pourrait bien s'évaporer si vous essayez de vous précipiter et de les écrire trop précisément. Il y a des boîtes qui sont très bien comprises d'un côté - et non comprises du tout de l'autre. Même si elle ne fournit pas de clé pour ouvrir quelque chose, elle relie ; cela nous oblige à penser de l'autre côté. C'est vrai que le nom de "géométrie non-commutative" est un peu malheureux car il contient ce "non", cette négation. L'important est de le considérer comme "non nécessairement commutative ", de manière à inclure la partie commutative. Nous aurions pu lui donner 36 autres noms. Un nom qui aurait été mieux pour la partie riemannienne est "géométrie spectrale". Ce que cette géométrie montre si bien, c'est que toutes les choses que nous percevons sont spectrales, que les voir du point de vue de la théorie des ensembles n'est pas le bon point de vue. Nous aurions pu utiliser différents noms, mais certainement pas "quantique".

Pourquoi ?

Parce que dans le mot "quantique" il y a une perversion, c'est-à-dire que les gens comprennent que le mot "quantique", depuis le début, n'est pas tellement "non-commutatif" mais plutôt "entier". Dans le mot "quantique", il y a vraiment cette découverte par Planck de la formule pour le rayonnement du corps noir, dont il a compris que l'énergie devait être quantifiée en quanta de $\hbar\nu$. De là découle une terrible confusion, créée par des gens qui font de la théorie de la déformation, qui croient que quantifier une algèbre signifie simplement la déformer en un espace non-commutatif. Ils prennent un espace commutatif et comme ils déforment le produit dans une algèbre non-commutative, ils croient qu'ils quantifient. Mais c'est complètement faux. Vous ne réussissez à quantifier un espace que si vous déformez dans une algèbre très spécifique : l'algèbre des opérateurs compacts. Et puis, il y a une intégrale, l'intégrale de l'indice de Fredholm. L'utilisation d'un vocabulaire incorrect crée de la confusion et n'aide pas à comprendre. C'est pourquoi j'hésite tellement à utiliser le mot "quantum" - cela semble plus flashy, peut-être, mais la vérité, c'est que vous faites quelque chose de quantique seulement dans des cas très particuliers, sinon vous faites quelque chose de non-commutatif,

c'est tout. Ensuite, cela peut être moins à la mode du point de vue linguistique, mais peu importe - on est beaucoup plus proche de la réalité.

Qu'est-ce qui est le plus important pour vous dans votre travail mathématique : l'unité ou l'évolution ?

C'est difficile de décider. Chaque mathématicien a une sorte de fil d'Ariane qu'il ou elle suit de son point de départ et qu'il ou elle doit absolument essayer de ne pas casser. Il y a donc une unité, une sorte de trajectoire, ce qui vous fait partir d'un endroit, et parce que vous avez commencé là, dans un endroit un peu bizarre et spécial, vous avez une certaine originalité, une certaine perspective, différente de celle des autres. Et c'est essentiel, sinon vous mettez tout le monde dans le même moule - tout le monde aurait le mêmes réactions aux mêmes questions. Ce n'est pas ce que nous voulons ; nous voulons différentes personnes qui ont leurs propres approches, leurs propres méthodes. Donc là on voit une unité dans la trajectoire, qui n'est pas du tout l'unité des mathématiques. L'unité des mathématiques, vous la découvrez petit à petit, quand vous réalisez que des trajectoires extrêmement différentes, de personnes extrêmement différentes, se rapprochent d'un même cœur vibrant de mathématiques. Mais ce que j'ai ressenti avant tout, c'est l'unité, la fidélité à une trajectoire.

Parmi les résultats que vous avez obtenus, y en a-t-il un dont vous êtes le plus fier ?

Être un scientifique est (en ce qui me concerne) une activité assez humiliante et je ne tiens pas à montrer de la fierté pour un résultat. J'ai tendance à être méfiant des personnes arrogantes. En fait, ce qui m'importe vraiment, c'est le plaisir de la découverte par opposition à l'appréciation du résultat par la communauté. La quantité de joie que l'on obtient, le "coup de pied" est bien sûr assez variable et pourtant, juste pour essayer de répondre à votre question, le lien entre la renormalisation et la décomposition de Birkhoff, que nous avons trouvé en 99 dans notre travail conjoint avec Dirk Kreimer m'a donné un super coup de pied qui a duré plus d'une semaine. J'avais l'habitude de me comporter d'une manière fière, comme un enfant, jusqu'à ce que j'aie atteint l'âge de dix ans, quand j'ai été envoyé chez les scouts par mes parents. J'ai atterri dans un groupe difficile et ils m'ont appris, un jour, par une "moquerie du groupe" de moi-même qu'ils ne pouvaient pas

acheter mon attitude fière. Depuis, je suis, comme les taureaux de la corrida après la séance avec les picadors, toujours debout avec un dos légèrement plié.

Suite à votre quête mathématique depuis les années 70, on a l'impression que vous avez toujours été fasciné par la physique - et la fonction zêta.

Absolument. Ma fascination pour la fonction zêta de Riemann vient de ma lecture du travail de Weil sur sa reformulation en termes d'idèles des formules explicites de Riemann qui relient les zéros de la fonction zêta à la répartition des nombres premiers. Il existe une analogie frappante entre les "nombres premiers" d'un côté dans cette formule et les contributions ponctuelles fixes dans une formule de Lefschetz et le premier problème est de trouver un espace X sur lequel agissent les idèles tel que la formule explicite de Riemann-Weil devient une formule de trace. À certains points, après avoir lu un article de Victor Guillemin sur les feuillages et la formule de trace de Selberg, j'ai réalisé que l'espace X devrait être un espace de feuilles d'un feuilletage et donc un espace non-commutatif. Je suis resté fasciné par cette idée pendant dix ans jusqu'au jour où, après être allé à une conférence à Seattle sur la fonction zêta de Riemann, j'ai réalisé que l'espace X était déjà présent dans mon travail sur la mécanique statistique quantique avec Bost, et est tout simplement l'espace des classes d'adèles, le quotient de l'espace d'adèles par l'action du groupe multiplicatif groupe du champ. Cela donne une interprétation explicite des formules de Riemann-Weil de la théorie des nombres comme formule de trace ainsi que la réalisation spectrale des zéros comme spectre d'absorption.

Merci à Jim Ritter pour son aide linguistique.

On est encore loin de donner les informations pertinentes sur la localisation des zéros mais cela donne un cadre géométrique dans lequel on peut commencer à transposer la preuve de Weil pour le cas des champs globaux de caractéristique positive. Dans notre travail conjoint avec Katia Consani et Matilde Marcolli, nous avons maintenant montré comment comprendre la réalisation spectrale d'un point de vue cohomologique, compatible avec la théorie de Galois. Ce qui ressort en particulier, c'est que, comme je l'ai expliqué dans la première partie de l'interview, les espaces non-commutatifs engendrent leur propre temps, cette nouvelle fonctionnalité dynamique permet de les refroi-

dir et d'obtenir de cette façon, lorsque la température descend à zéro, un ensemble de points classiques. De plus, on peut affiner ce processus thermodynamique et obtenir l'analogue des points sur les extensions algébriques du corps des résidus, et ceux-ci sont organisés de la même manière que les points d'une courbe sous l'action de Frobenius dans le cas des caractéristiques positives. C'est un grand défi pour la géométrie non-commutative de développer maintenant les outils conceptuels généraux permettant de transposer la preuve de Weil de la géométrie algébrique à notre cadre analytique.

Ma fascination pour la physique vient de la mécanique quantique qui, avec la découverte de Heisenberg, est à l'origine de la géométrie non-commutative. J'ai toujours admiré les calculs sophistiqués des physiciens, plus précis ément surtout ceux qui sont motivés par l'expérience. J'ai une grande motivation à découvrir que, caché derrière ces recettes dans lesquelles les physiciens trouvent leur motivation physique, il y a de merveilleuses mathématiques. Ces dernières années, après des travaux antérieurs avec Kreimer sur la renormalisation et la décomposition de Birkhoff, mon travail s'est poursuivi dans ma collaboration avec Marcolli. Nous avons découvert un groupe universel, obtenu à partir d'une correspondance de Riemann-Hilbert, qui joue le rôle du "groupe cosmique de Galois" que Pierre Cartier avait conjecturé il y a quelques années. En effet c'est un groupe de symétrie universel de toutes les théories du champ quantique renormalisables. Il contient le groupe de renormalisation des physiciens en tant que sous-groupe à un paramètre mais a une structure beaucoup plus riche. Nous n'avons pas pu comprendre complètement sa relation avec les groupes de Galois motiviques et, en ce sens, il ne met pas encore pleinement en œuvre le rêve de Cartier mais le travail profond de Bloch, Esnault et Kreimer va sûrement jeter plus de lumière sur cet aspect.

Concernant le modèle standard, ce travail a commencé il y a quelques années avec Ali Chamseddine et il a été poussé plus loin dans ma récente collaboration avec Chamseddine et Marcolli. Il se trouve que le Lagrangien incroyablement compliqué de la gravité couplée avec le modèle standard est juste obtenu comme gravité pure (de la façon la plus simple, en comptant les valeurs propres de l'élément de longueur) pour un espace-temps de structure fine. À savoir, il est décrit non pas comme un continuum à quatre dimensions ordinaires, mais comme le produit d'un continuum par un espace noncommutatif fini du type le plus simple dont l'effet est de corriger la dimension modulo 8 issue de la K-théorie. C'est clair que ce sont des idées intéressantes

mais, jusqu'à présent, elles n'ont pas pu être testées expérimentalement et appartiennent donc toujours au domaine des mathématiques pures.

Vous avez parlé de la relation entre les mathématiques et la physique. Pourriez-vous dire quelque chose sur la relation entre les mathématiciens et physiciens, ce qui n'est pas la même chose ?

Oui. Il est normal que le vrai physicien ne s'inquiète pas trop de la rigueur mathématique. Pourquoi ? Parce qu'on aura un test à la fin qui est la confrontation à l'expérience. Cela ne signifie pas que la négligence est admissible : un expérimentateur m'a dit une fois qu'ils vérifient leurs calculs dix fois plus que les théoriciens ! Mais ce n'est pas mal de ne pas être trop formaliste. Cela va avec une certaine attitude des physiciens envers les mathématiques : en gros, ils traitent les mathématiques comme une sorte de prostituée. Ils l'utilisent d'une manière absolument gratuite et sans vergogne, en prenant n'importe quel sujet ou partie d'un sujet, sans avoir l'attitude du mathématicien qui n'utilisera quelque chose qu'après une réelle compréhension. Après la période héroïque qui a abouti à l'élaboration du modèle standard, et la renormalisation des théories de jauge, toute une génération de physiciens s'est éloignée du contact avec la physique expérimentale à la recherche d'une théorie qui "expliquerait" non seulement le modèle standard, mais aussi l'unifierait avec la gravité. En poursuivant l'idée appelée théorie des cordes, ces physiciens sont devenus mathématiciens et cela a eu un grand impact sur les mathématiques. Les objets qu'ils manipulent sont les surfaces de Riemann, les variétés de Calabi-Yau : et ils font des mathématiques, de vraies mathématiques sophistiquées. Mais jusqu'à présent, il n'y a pas de tests de cette physique qui montrerait une relation entre ces idées et le monde réel. En outre, en raison du fait qu'ils sont au départ issus du domaine de la physique, leur façon de procéder est totalement différente de celle des mathématiciens.

Cela est vrai notamment au niveau sociologique : ils travaillent en grands groupes et le temps qu'ils passent sur un sujet donné est assez court. À un moment donné t, la plupart d'entre eux vont travailler sur le même problème, et les prépublications qui apparaîtront sur le Web auront plus ou moins la même introduction. Il y a un thème donné, et un grand nombre d'articles sont des variations sur ce thème, mais cela ne dure pas longtemps. C'est arrivé notamment dans la relation entre la théorie des cordes et la géométrie non-commutative. Un grand groupe de personnes a essayé de faire de la théo-

rie des champs sur un espace non-commutatif au début des années 2000, et après un temps relativement court, ils ont conclu que la théorie des champs sur un espace non-commutatif n'était pas réalisable, à cause du phénomène de mélange entre fréquences infrarouges et ultraviolettes. Cette conclusion est restée en vigueur pendant deux ou trois ans, mais après que le gros des troupes soit passé à un autre sujet, un tout autre, très petit, groupe de personnes a montré qu'en fait, la théorie était renormalisable, à condition qu'on ajoute un terme manquant dans le lagrangien. Cela a nécessité une énorme intuition de la part des principaux acteurs Wulkenhaar et Grosse, puis avec Rivasseau, Vignes-Tourneret, Gurau etc... ils ont développé la théorie générale qui est maintenant dans un état remarquable, clôturant la première construction efficace en 4 dimensions. Le peloton n'est jamais revenu et a continué d'un sujet à l'autre. La sociologie des sciences a été profondément traumatisée par la disparition de l'Union soviétique et du contrepoids scientifique que cela a créé à l'égard de la puissance écrasante des États-Unis. Ce que j'ai observé au cours des deux dernières décennies depuis la chute de l'URSS et l'émigration de leur élite scientifique vers les États-Unis est qu'il n'y a plus ce contrepoids. À ce stade, si vous prenez de jeunes physiciens aux États-Unis, ils savent qu'à un moment donné, ils auront besoin d'une recommandation écrite par un des pontes dans le pays, et cela signifie que si l'un d'eux veut travailler en dehors de la théorie des cordes, il ou elle ne trouvera pas de travail. De cette façon, il y a une seule théorie dominante et elle attire tous les meilleurs étudiants. J'ai entendu les théoriciens des cordes dire : "si une autre théorie fonctionne, nous l'appellerons théorie des cordes", ce qui montre qu'ils ont gagné la guerre sociologique. Le récent épisode ridicule de la "théorie exceptionnellement simple du Tout" a montré qu'il n'y a aucune crédibilité chez les opposants à la théorie des cordes aux États-Unis. Plus tôt avec l'Union soviétique, il y avait de la résistance. Si l'Europe était plus forte, elle pourrait résister. Malheureusement, il existe un instinct de troupeau latent chez les Européens, en particulier en physique théorique. De nombreuses universités européennes, du moins en France ou en Angleterre, au lieu de développer des domaines originaux par opposition à ceux dominants aux États-Unis, ne font que suivre les grands courants aux États-Unis pour décider qui embaucher. Ce n'est pas par manque d'esprits originaux comme mon ami et collaborateur Dirk Kreimer. Mais c'est un manque de confiance en soi de l'Europe, ce qui signifie que nous ne sommes pas capables de faire ce qui doit être fait, de soutenir et sauvegarder cette diversité à tout prix. Je ne pense pas que nous voyons des choses similaires en mathématiques, il

y a donc une différence sociologique fondamentale entre mathématiques et physique. Les mathématiciens semblent très résistants à perdre leur identité et à suivre la mode.

Dans vos conversations avec Changeux, vous avez discuté des mathématiques et de la réalité. Avez-vous avancé dans votre réflexion à ce sujet ?

Je ne doute pas que la réalité mathématique est quelque chose qui existe, qu'elle existe indépendamment de mon propre cerveau qui essaie de la voir, et a exactement le mêmes propriétés de résistance que la réalité extérieure. Quand vous voulez prouver quelque chose, ou lorsque vous examinez si une preuve est correcte ou non, vous ressentez la même angoisse, la même résistance extérieure que vous le faites avec la réalité extérieure. Certains vous diront que cette réalité n'existe pas car elle n'est pas "localisée" quelque part dans l'espace et le temps. Je trouve juste cela absurde et j'adopte un point de vue diamétralement opposé : pour moi, même un être humain est mieux décrit par un schéma abstrait que par une collection matérielle de cellules - qui en tout cas sont entièrement renouvelées et remplacées sur une période de temps relativement courte et possèdent donc moins de sens ou de permanence que le schéma lui-même, qui pourrait éventuellement être reproduit en plusieurs exemplaires identiques... Si on veut tout réduire à la "matière localisée quelque part" on rencontre bientôt un mur qui vient de la mécanique quantique et on trouve que cette réduction de la réalité extérieure à la matière est une illusion qui a du sens à des échelles intermédiaires, mais en aucun cas à un niveau fondamental. Je n'ai donc aucun doute sur la subtilité et l'existence d'une réalité qui ne peut être ni réduite à "la matière" ni "localisée". Maintenant, la question de savoir si la réalité mathématique est quelque chose de créé ou quelque chose de préexistant est beaucoup plus facile à discuter si on utilise la distinction qui apparaît dans le théorème de Gödel entre "vérité" et "prouvabilité" d'un énoncé mathématique. J'en ai discuté en détail dans mon livre "Triangle de pensées" avec Lichnerowicz et Schützenberger et je me réfère à ce livre pour l'argument détaillé qui est plutôt compliqué. J'étais un peu frustré après le livre "Matière à Pensée" avec Changeux, par l'absence d'une communication efficace et j'ai tenu à écrire un autre livre où je pourrais mieux expliquer la contribution provenant du théorème de Gödel. Il existe une réalité mathématique fondamentale, et le mathématicien crée des outils pour la comprendre.

La relation entre les déductions du mathématicien (qui, grande découverte récente, ont lieu dans son cerveau) et que la réalité est similaire à la relation entre les déductions effectuées dans un tribunal par opposition à ce que qui se passe réellement dans le monde réel. Elle repose sur une distinction grammaticale précise entre les énoncés mathématiques au niveau des quantificateurs, certains sont prouvables s'ils sont vrais etc... Cette analogie avec la salle d'audience par opposition au monde extérieur est parfaitement expliqué dans le livre de Jean-Yves Girard sur le théorème de Gödel. Cela permet, après un vrai travail, d'obtenir une image mentale claire de la distinction entre le rôle du mathématicien (créer des outils pour découvrir un morceau de cette réalité) et la réalité elle-même.

Vous avez mentionné l'originalité et la mode chez les mathématiciens et dans les mathématiques. Avez-vous un exemple ?

Je venais d'arriver en tant que nouveau venu à l'IHES [Institut des hautes Études scientifiques, à Bures-sur-Yvette, près de Paris] en 1976. Les premières personnes que j'ai rencontrées parlaient de choses que je ne connaissais pas. J'étais à la cafétéria et ils discutaient de la "cohomologie étale", toutes sortes de choses comme ça, qu'avec ma culture issue de l'analyse fonctionnelle et des algèbres d'opérateurs, je ne connaissais pas du tout. Heureusement, je suis vite tombé sur Dennis Sullivan qui, tant qu'il était à Bures, utilisait pour faire connaissance avec les nouveaux arrivants, quel que soit leur domaine et leur personnalité, une méthode qui consistait à leur poser des questions. Il posait des questions que vous pouviez, superficiellement surtout, trouver idiotes. Mais quand vous commenciez à y penser, vous réalisiez bientôt que vos réponses montraient que vous ne compreniez pas vraiment de quoi vous parliez. Il a une sorte de pouvoir socratique qui pousse les gens à une réflexion profonde, pour essayer de comprendre ce qu'ils faisaient, et ainsi à démasquer les incompréhensions dont tout le monde fait l'expérience parce que tout le monde parle sur différentes choses sans avoir nécessairement nettoyé tous les recoins cachés. Il a une autre qualité remarquable ; il peut expliquer des choses que vous ne connaissez pas d'une manière incroyablement claire et lumineuse. C'est en discutant avec Dennis que j'ai appris de nombreux concepts de géométrie différentielle. Il nous les expliquait par gestes, sans une seule formule. J'ai eu énormément de chance de le rencontrer, cela m'a obligé à réaliser que le domaine dans lequel je travaillais était limité, au moins

quand vous le voyez comme bien fermé. Ces discussions avec Dennis m'ont sorti de mon champ de compétence, à travers un dialogue visuel et oral. Et pas du tout par la lecture de textes.

Vous avez parlé de l'importance de la diversité, que les gens devrait avoir des antécédents différents. Mais avez-vous des idées sur le genre de terrain d'entente mathématique tout le monde devrait partager ?

C'est un peu subtil. J'ai mentionné le cœur vibrant des mathématiques. Vous pourriez dire : pourquoi ne pas enseigner cela à tout le monde ?. Mais cela entraînerait un désastre ! Parce que les gens finiraient par connaître les surfaces de Riemann, les formes modulaires, etc., mais ils seraient ignorants de grandes parties des mathématiques, comme les algèbres de Hopf ou d'autres sujets qui pourraient sembler plus ésotériques. Donc je ne sais pas. J'ai l'impression qu'il devrait y avoir un minimum de fond commun, fondamental : notions de géométrie différentielle et algébrique, structures algébriques, réelles et analyse complexe. La topologie, la théorie des nombres de base... sont toutes nécessaires. Tu ne peux pas les éviter. Les gens doivent savoir cela.

Après cela, quand vous voulez entrer dans des sujets plus élaborés, la diversité devrait être la règle. Nous devons cultiver des gens originaux, comme je l'ai expliqué dans le première partie de l'entretien, qui sont en mesure de fournir aux étudiants une approche totalement originale par rapport à cette connaissance commune. Cela donnera aux jeunes mathématiciens des clés totalement personnelles, qui leur permettront d'ouvrir leurs propres mondes. S'ils ont de la chance, ils seront intéressés par beaucoup de choses différentes, car il est important pour eux de pouvoir passer d'une chose à l'autre pendant un certain temps au tout début, jusqu'à ce qu'ils trouvent un sous-projet qui va vraiment les inspirer. Je pense qu'il est important de ne pas dépasser une certaine limite pour ce fond commun. Ensuite, vous devez trouver et suivre votre propre ligne, avec un conseiller qui vous permettra de renforcer votre propre originalité. Mais bien sûr, il n'y a pas de recette générale.

Mais recommanderiez-vous vraiment qu'un jeune mathématicien apprenne beaucoup de mathématiques sans être spécialiste d'un domaine ?

Pour un jeune mathématicien, il est absolument crucial de prouver d'abord qu'il ou elle est un mathématicien ou une mathématicienne. Et cela signifie devenir spécialiste d'un sujet et prouver que vous êtes capable de faire quelque chose de très difficile. Et ce n'est pas compatible avec le rêve d'apprendre un peu tout en même temps. Ainsi, après avoir trouvé le sujet que vous trouvez attrayant, il est obligatoire de se concentrer, peut-être pendant un certain nombre d'années, jusqu'à ce que vous fassiez une vraie percée. Ensuite, bien sûr, une fois que vous avez réussi, une fois que vous avez votre passeport pour faire des mathématiques, c'est merveilleux si vous réussissez à élargir votre spectre pour éviter de rester un spécialiste d'une discipline étroite pour le reste de votre vie. Mais c'est très difficile d'être généraliste. Parce qu'il y a le danger de ne pas faire de vraies choses en mathématiques.

Avez-vous des idées sur la façon dont les mathématiques devraient être enseignées ?

Nous devons absolument former de très jeunes gens à des exercices mathématiques précises, en particulier des exercices de géométrie, c'est une très bonne formation. Et c'est horrible quand je vois qu'à l'école, les enfants apprennent des recettes, juste des recettes, et ne sont pas encouragés à penser. Quand j'étais à l'école, je me souviens que nous étions confrontés à des problèmes de géométrie solide (spatiale). Nous avions beaucoup de mal à les résoudre. Ce n'était pas de la géométrie de bébé. C'étaient des choses difficiles, avec des preuves subtiles. Et deux ans plus tôt, nous faisions des problèmes de géométrie planaire. Nous avions l'habitude de passer des nuits à résoudre ces problèmes. Et maintenant, si nous donnions les mêmes problèmes lors d'un examen (l'expérience a été réalisée récemment), on nous traiterait de meurtriers ! Ce n'est pas un progrès. Les problèmes de géométrie sont faciles à poser, et alors vous devez vous donner beaucoup de mal pour trouver une preuve.

C'est dommage qu'on ne le fasse plus. J'ai vu des problèmes récents au lycée, où sont définis des groupes de rotations, les rotations étant des classes d'équivalence... rester à un niveau préhistorique de sophistication juste à cause du lourd poids du "formalisme"... C'est affreux... Parce que la géométrie implique de dessiner des figures, elle doit être directement accessible. Malheureusement, ce n'est pas impossible que cette utilisation exagérée du formalisme mathématique ait été héritée de Bourbaki - qui ne définit pas les

nombres réels avant le chapitre 9 de Topologie, longtemps après avoir défini les structures uniformes...

Vous mentionnez Bourbaki. Comment jugez-vous maintenant le rôle de Bourbaki ?

Bourbaki a joué un rôle phénoménal. Vous ne pouvez pas nier qu'il a transformé beaucoup de sujets dans lesquels régnait l'obscurité la plus profonde en des champs d'une incroyable clarté. Il y a de merveilleux livres de Bourbaki : l'Algèbre Chaptitre III et tous les volumes sur les groupes de Lie, vous ne pouvez qu'être stupéfait d'admiration. Maintenant, une fois que tout cela a été fait, c'est fait. Il y a encore des domaines où quelque chose de ce genre aurait pu être fait et n'a pas été fait. Mais je ne pense pas que faire davantage ferait une grande différence. Globalement, Bourbaki a eu une si grande influence en nous donnant un souci de clarté et de rigueur que l'effet bénéfique s'est déjà produit. Si Bourbaki n'avait pas été là, les mathématiques auraient dérivé vers de nombreux résultats sur lesquels vous ne pourriez pas compter.

Pensez-vous qu'il serait possible aujourd'hui de lancer un tel projet si ambitieux et altruiste ?

Être désintéressé à ce point maintenant n'est pas une chose évidente, car tout le monde est tellement occupé avec toutes sortes de "choses à faire". Il y avait un esprit merveilleux au début du groupe Bourbaki, une idée de service désintéressé à la communauté. J'ai participé pendant une courte période à la fin des années 70. J'ai écrit quelques ébauches mais ce qui m'a empêché de continuer, c'est quand j'ai réalisé que, dans une salle de l'Ecole Normale, il y avait des centaines de manuscrits, 100 à 150 pages chacune, qui ne verraient jamais la lumière du jour. J'ai trouvé ça déprimant. Bien sûr, il y avait des doublons partiels... mais il y avait une telle exigence de perfection avant que le contenu ne soit publié, que finalement c'était comme si ces textes n'existaient pas. Le temps a passé, et avec le temps, ils sont devenus obsolètes. Il y a cet incroyable dévouement des membres de Bourbaki qui procédaient par l'écriture de brouillons. Lorsqu'un manuscrit est terminé, il est vrai que vous avez beaucoup appris, vous comprenez mieux les choses, mais si le texte n'apparaît jamais, vous obtenez un vrai sentiment de frustration. Pendant très longtemps, Dieudonné jouait un rôle clé pour veiller à ce que les choses convergent à un moment donné, mais après qu'il

ait quitté, une grande partie de l'efficacité est partie avec lui en quelque sorte.

Sur quoi travaillez-vous maintenant ?

En ce moment, je travaille sur une analyse difficile qui a à voir avec les axiomes spectraux de la géométrie non-commutative. C'est le contenu de mon année au Collège de France et c'est beaucoup de travail technique mais aussi cela offre une diversion bienvenue. Juste avant cette diversion, après avoir remis le manuscrit de notre livre 2 avec Matilde Marcolli, j'étais dans un état mental obsessionnel en raison du risque inévitable d'une erreur dans un si grand ensemble de travaux. Bien sûr, on peut vérifier les choses et essayer de les visualiser sous toutes sortes d'angles, mais par exemple dès qu'on touche à la physique, les difficultés s'accumulent puisque la précision des calculs ne suffit pas pour garantir qu'ils auront une "signification" pour le monde réel et passeront le test de réalité. Par rapport à cela, j'essaie de partager l'attitude du grand physicien Pierre-Gilles de Gennes quand il a dit :

"Le vrai point d'honneur n'est pas toujours dans le vrai. Il est d'oser, de proposer des idées neuves, et ensuite de les vérifier. Il est aussi, bien sûr, de savoir reconnaître publiquement ses erreurs. L'honneur du scientifique est absolument à l'opposé de l'honneur de Don Diègue. Quand on a commis une erreur, il faut accepter de perdre la face."

Ce qui importe certainement, dans ce que nous faisons, c'est d'essayer de mettre constamment nos idées à l'épreuve et de voir ce qui se passe. Rien de mieux que de se réveiller au milieu de la nuit à cet égard. Et il ne faut pas avoir peur. Ici, voici ce qu'Alexandre Grothendieck écrit dans son livre inédit *Récoltes et Semailles* à ce sujet :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mus, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée."

Comment lisez-vous les mathématiques ?

La seule façon dont je parviens à lire les mathématiques est extrêmement lente car je lis une phrase puis j'essaie d'y penser. Je ne comprends pas une preuve si je n'ai pas essayé de la prouver moi-même avant. Une fois que je suis perplexe longtemps sur un résultat, je peux le comprendre en quelques secondes en scannant la preuve ; je vois le seul endroit où quelque chose se passe et que je ne pouvais pas deviner avant. Le problème est que cette méthode de lecture est très lente, j'ai besoin d'un temps énorme pour me familiariser avec le résultat. Je suis presque incapable de lire un livre mathématique de façon linéaire. Une discussion ou un discours, au contraire, me permettent d'aller plus vite. Mais je sais que d'autres mathématiciens fonctionnent de manière très différente.

Est-ce la même chose avec la physique ?

Non, c'est totalement différent. En physique, j'adore lire ; j'ai passé environ quinze ans à étudier le livre de Schwinger, *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*. Il a rassemblé tous les articles cruciaux de Dirac, Feynman, Schwinger lui-même, Bethe, Lamb, Fermi, tous les articles fondamentaux sur la théorie des champs quantiques, ceux de Heisenberg aussi, bien sûr. Cela a été mon livre de chevet pour des années et des années. Parce que j'ai toujours été fasciné par le sujet et je voulais le comprendre. Et cela m'a pris très longtemps de le comprendre. Pas tant pour comprendre le détail des articles, mais pour comprendre ce qu'ils voulaient dire, quelles mathématiques étaient derrière eux. En physique, par contre, j'ai une réaction totalement différente. Je n'ai pas du tout cette incapacité à lire. C'est étrange. Je pense qu'il y a une raison possible : en mathématiques, je dois me protéger davantage, à certains égards. En physique, je ne ressens pas ce besoin.

Et en dehors de la science ? Voulez-vous parler de quelque chose d'autre, la musique, l'art ?

Ces deux dernières années, je n'ai plus eu le temps parce que je devais travailler plus dur, mais avant je prenais des cours de dessin et de piano. Ce qui m'a frappé en musique, c'était de voir comment certains compositeurs avaient atteint un niveau incalculable de perfection dans leur art. En étudiant cer-

taines partitions, j'ai été frappé de réaliser que vous apprenez autant qu'en lisant quelques articles mathématiques. Tout simplement à cause du niveau de sophistication. Il ne s'agit pas d'une analogie entre mathématiques et musique. Quelques compositeurs nous touchent par une œuvre hallucinante de précision, par un niveau de perfection proche de celui de certains travaux de Riemann. Et face à ce niveau de perfection, je réagis de la même manière, par un sentiment d'admiration - mais une admiration qui crée du mouvement, quelque chose qui n'est pas du tout statique : la beauté plus la perfection met la pensée en mouvement, elle vous force à penser. Cette perfection sous la forme d'une œuvre d'art est bien sûr très rare. Pour prendre un exemple, cette fois dans la littérature, il y a une différence frappante de "forme" entre *Madame Bovary* [Flaubert] et *Le lys dans la vallée* [Balzac]. Madame Bovary est la perfection absolue, une merveille de précision qui est le résultat d'une quantité phénoménale de travail, tandis que l'autre est un peu bâclé. *Le lys dans la vallée* contient aussi des trucs merveilleux mais il y a une différence évidente en apparence.

J'ai souvent cette impression quand je regarde des papiers mathématiques ou des œuvres d'art, et je ressens intensément cette distinction. Certaines pièces se démarquent bien au-dessus des autres, on a le sentiment que l'auteur, au lieu de s'arrêter à l'instant t et en disant : "Très bien, ça va le faire, je vais remettre mes affaires" (Balzac a été forcé de faire ça, il avait un couteau sous la gorge, il n'avait pas le choix) juste continuent à travailler jusqu'à atteindre quelque chose qui est proche de la perfection absolue. C'est principalement ce que je ressens de l'art. Ces œuvres, celles avec cette perfection absolue, vous donnent de l'élan. Elles vous donnent quelque chose qui n'est pas seulement un sentiment ; elles vous donnent un pouvoir extraordinaire, une force qui vous porte plus loin. Cela vous transmet quelque chose. J'ai cette impression avec certains articles en mathématiques ou en physique. L'article de Riemann sur la fonction zêta, celui d'Einstein sur la relativité par exemple ... Il y en a peu, très peu. Ils mettent les normes d'écriture à un niveau si élevé. C'est merveilleux. Vous voyez cela et vous comprenez vraiment. Ce sont des instruments extraordinaires pour comprendre et, au-delà de la clarté, vous ressentez quelque chose qui vous met en mouvement. Cela vous dit : "continue".

Alain Connes est professeur au Collège de France, à l'IHES et à Vanderbilt Université. Parmi ses récompenses figurent une médaille Fields en 1982, le Prix Crafoord en 2001 et la Médaille d'or du CNRS en 2004.

Catherine Goldstein [cgolds@math.jussieu.fr] est Directrice de recherches à l'Institut de mathématiques de Jussieu. Ses projets de recherche sont dans le domaine de l'Histoire des mathématiques, en particulier de la théorie des nombres. Elle a récemment coédité "La mise en forme de l'arithmétique" (d'après le Disquisitiones Arithmeticae) et travaille actuellement sur l'impact de la Première Guerre mondiale sur les mathématiques et les sciences.

Georges Skandalis [skandal@math.jussieu.fr] est professeur à l'Université Paris Diderot à Paris 7 et à l'Institut de mathématiques de Jussieu. Son sujet de recherche principal est la géométrie non-commutative. Il étudie actuellement les feuilletages singuliers et la théorie de l'indice associée. Il est un ancien étudiant d'Alain Connes.