Essayer d'expliciter l'exercice subsidiaire, où l'on comprend ce que l'on n'avait pas compris (Denise Vella-Chemla, 12.5.2018)

On cherche à démontrer la conjecture de Goldbach. On définit 4 variables ainsi :

$$X_a(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ premiers}\}$$

$$X_b(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ composé et } q \textit{ premier}\}$$

$$X_c(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ premier et } q \textit{ composé}\}$$

$$X_d(n) = \#\{p+q=n \textit{ tels que } p \textit{ et } q \textit{ impairs},\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ composés}\}$$

On trouve dans http://denise.vella.chemla.free.fr/nombres-et-lettres.pdf les démonstrations par récurrence d'assertions qui ont pour conséquence qu'à partir d'un certain rang, on a [*] :

$$X_d(n) - X_a(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \delta(n) \tag{1}$$

(avec $|\delta(n)| \leqslant 2$). On peut écrire cette égalité en prose :

$$X_d \text{ est “accroché à” } X_a \text{ par une différence fixe.} \tag{1'}$$

Or X_d est de plus en plus grand et on souhaite voir si au-delà d'un certain rang, on aurait toujours :

$$X_d > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \delta(n). \tag{2}$$

Pour visualiser le fait que $X_d > \dfrac{n}{4} - \pi(n) + \delta(n)$, utilisons le dessin suivant :

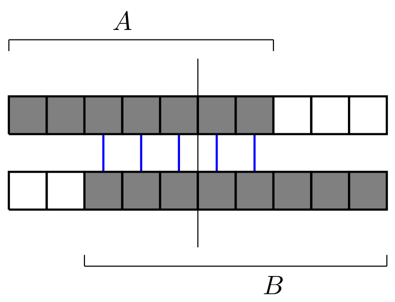

Figure 1 : *Appariement par bijection de nombres appartenant à deux ensembles suivant les cardinaux de leurs sous-ensembles de nombres premiers (blancs) et composés (gris), l'ordre entre les nombres de la ligne inférieure n'est pas forcément l'ordre habituel des entiers mais chaque appariement concerne un nombre x et son complémentaire $n-x$.*

Le fait de placer sur le schéma toutes les compositions de la forme *composé*+*composé* au centre du schéma est sans importance : les colonnes contenant toujours deux nombres x et $n-x$ sont interchangeables.

L'exercice consiste à apparier bijectivement les nombres de deux ensembles ; dans le premier ensemble contenant k nombres, A sont composés et $k-A$ sont premiers tandis que dans le deuxième ensemble, contenant également k nombres, B nombres sont composés et $k-B$ sont premiers. Si $A \leqslant k/2$ et $B \leqslant k/2$, la bijection peut ne pas apparier forcément deux nombres composés. Mais dès que $A > k/2$ et $B > k/2$,

---

*. Alain Connes explique que cette assertion découle simplement de propriétés des cardinaux d'ensembles, de leur union et de leur intersection - ici l'ensemble des décompositions de la forme *premier* + (*premier* $\vee$ *composé*) (de cardinal $Z_a(n) = \#\{3+q \leqslant \dfrac{n+2}{2} \textit{ tels que } q \textit{ premier}\}$) et l'ensemble des décompositions de la forme (*premier* $\vee$ *composé*) + *premier* (de cardinal $Y_a(n) = \#\{3+q \textit{ tels que} \dfrac{n+2}{2} < 3+q \leqslant n \textit{ et } q \textit{ premier}\}$). L'intersection de ces ensembles a pour cardinal $X_a(n)$ (c'est l'ensemble des décompositions de Goldbach de n), leur union a pour cardinal $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - X_d(n)$ (c'est l'ensemble des décompositions contenant un premier au moins, i.e. des 3 formes *premier* + *composé*, *composé* + *premier* ou *premier* + *premier*) ; enfin, la somme de leurs cardinaux est égale à $\pi(n)$.

un certain nombre d'appariements sont contraints d'associer un nombre composé du premier ensemble et un nombre composé du deuxième ensemble. Le nombre d'appariements associant bijectivement deux nombres composés est au moins égal à $A + B - k$. Pour le problème qui nous intéresse (la conjecture de Goldbach), $k = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.

Parmi les nombres impairs compris entre 3 et $n/2$, très vite, plus de la moitié sont composés. De même, parmi les nombres impairs compris entre $n/2$ et $n-3$, très vite, plus de la moitié sont composés. Ainsi, il y a assez vite à la fois plus de la moitié des nombres qui peuvent être petit sommant d'une décomposition de n qui sont composés et plus de la moitié des nombres qui peuvent être grand sommant d'une décomposition de n qui sont composés. La propriété de "dépassement de la moitié en haut" (plus de la moitié des grands sommants potentiels sont composés) $A > k/2$ correspond dans le cas de la conjecture de Goldbach au fait que $X_b(n) + X_d(n) > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. La propriété de "dépassement de la moitié en bas" (plus de la moitié des petits sommants potentiels sont composés) $B > k/2$ correspond dans le cas de la conjecture de Goldbach au fait que $X_c(n) + X_d(n) > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. Mais X_b ou X_c positifs tous les deux ne dépassent pas $\pi(n)$ et on ne peut donc en déduire que $X_d(n) > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n)$.

Si on avait pu prouver $X_d(n) > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n)$, cette inégalité stricte cumulée à l'égalité $X_d(n) - X_a(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \delta(n)$ aurait eu pour conséquence que $X_a(n)$ aurait alors toujours été strictement positif.

En résumé, (1) et (2) n'ont pas pour conséquence qu'X_a ne peut plus être nul au-dessus de $n = 244$.