Spirale et ζ (suite) (Denise Vella-Chemla, 28.10.2017)

On étudie une spirale du plan cartésien dont les coordonnées des sommets sont définis par la suite :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} cos\ \theta_n & -sin\ \theta_n \\ sin\ \theta_n & cos\ \theta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n - x_{n-1} \\ y_n - y_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_n + \lambda_n cos\ \theta_n x_n - \lambda_n cos\ \theta_n x_{n-1} - \lambda_n sin\ \theta_n y_n + \lambda_n sin\ \theta_n y_{n-1} \\ y_n + \lambda_n sin\ \theta_n x_n - \lambda_n sin\ \theta_n x_{n-1} + \lambda_n cos\ \theta_n y_n - \lambda_n cos\ \theta_n y_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire la suite des coordonnées en utilisant des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et une matrice 4×4 pour la transformation.

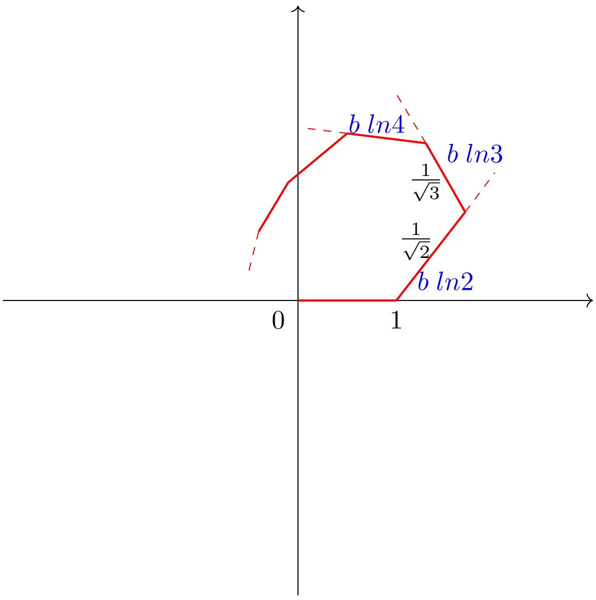
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda_n cos\ \theta_n & -\lambda_n sin\ \theta_n & -\lambda_n cos\ \theta_n & \lambda_n sin\ \theta_n \\ \lambda_n sin\ \theta_n & 1+\lambda_n cos\ \theta_n & -\lambda_n sin\ \theta_n & -\lambda_n cos\ \theta_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Les angles de rotation $\theta, \theta', \theta''$ qui séparent deux côtés successifs de la spirale sont tous différents : quand on écrit littéralement la somme $\zeta(s)$ avec $s = a + ib$, on obtient

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^a e^{-ib\ ln\ 2} + \left(\frac{1}{3}\right)^a e^{-ib\ ln\ 3} + \left(\frac{1}{4}\right)^a e^{-ib\ ln\ 4} + \ldots$$

Les deux premiers points de la spirale sont $z = 0$ et $z = 1$.

Dans le cas où $a = \dfrac{1}{2}$, les côtés successifs de la spirale brisée ont pour longueur $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{4}}, \ldots$ (sur le dessin ci-dessous, on a bêtement mis les angles dans le sens anti-horaire, ça correspond à des $+ib\ldots$ comme puissances des e dans la formule ci-dessus plutôt que des $-ib$, c'est sans importance car l'axe des abcissses est axe de symétrie de ζ). Les λ_n (coefficients réducteurs pour passer de la longueur d'un côté à la longueur du côté suivant de la spirale) sont de la forme $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$.



Au départ, on était plutôt parti sur une décomposition en trois opérations successives, une translation, une homothétie puis une rotation codées par les matrices de transformation ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_n \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 2x_{n+1} - x_n \\ 2y_{n+1} - y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1-\lambda_n) & 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & (1-\lambda_n) & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_n \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ x_n + \lambda_n x_{n+1} - \lambda_n x_n \\ y_n + \lambda_n y_{n+1} - \lambda_n y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_n \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ \cos\theta \; x_{n+1} - \sin\theta \; y_{n+1} \\ \sin\theta \; x_{n+1} + \cos\theta \; y_{n+1} \end{pmatrix}$$