Interpréter géométriquement l'hypothèse de Riemann (Denise Vella-Chemla, 7.8.2017)

On essaie d'interpréter géométriquement la formulation littérale de la fonction ζ de Riemann qui est :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s$$

Cette somme est une somme de nombres complexes. A chacun de ces nombres complexes est associé un point du plan complexe. On peut voir la somme comme une spirale brisée qui à l'infini s'enroulerait autour d'un point du plan complexe à déterminer.

L'hypothèse de Riemann correspondrait alors au fait que seules les racines carrées des entiers successifs seraient admissibles aux dénominateurs pour calculer les longueurs des côtés successifs de la spirale mais que toute autre sorte de longueurs ne permettrait pas que la spirale finisse par aboutir au point origine.

Les angles de rotation $\theta, \theta', \theta''$ qui séparent deux côtés successifs de la spirale sont tous différents : quand on écrit littéralement la somme $\zeta(s)$ avec $s = a + ib$, on obtient

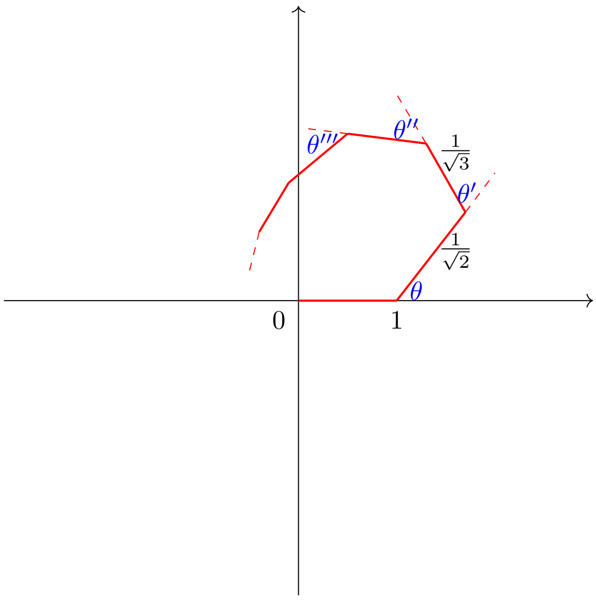
$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^a e^{-ib\ ln\ 2} + \left(\frac{1}{3}\right)^a e^{-ib\ ln\ 3} + \left(\frac{1}{4}\right)^a e^{-ib\ ln\ 4} + \ldots$$

Les deux premiers points de la spirale sont $z = 0$ et $z = 1$.

Dans le cas où $a = \frac{1}{2}$, les côtés successifs de la spirale brisée ont pour longueur $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots$.

Dans le cas où $a = \frac{1}{3}$ par exemple, les côtés successifs de la spirale brisée ont pour longueur $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \ldots$.

Les transformations qui permettent d'obtenir un côté de la spirale à partir du côté précédent (une translation, une homothétie et une rotation) ne commutent pas et doivent être effectuées dans l'ordre énoncé.



Pour les complexes appartenant à la droite critique (i.e. qui ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$), on peut voir les longueurs des côtés de la spirale de la forme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ comme les longueurs d'hypothénuses de triangles rectangles d'autres côtés de longueurs 1 et $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$. Les seules longueurs admissibles pour les côtés successifs de la spirale seraient selon l'hypothèse les inverses des racines carrées des entiers successifs. Il faudrait identifier une propriété que seuls auraient les inverses des racines carrées et que n'auraient pas toute autre sorte de nombres, et qui aurait pour conséquence que les zéros de ζ ne pourraient qu'appartenir à la droite critique.

Il me semble qu'il faut se focaliser sur la notion de racine carrée comme ayant une propriété spécifique et négliger les angles car je crois que ces angles étant en nombre infini, on peut trouver pour chacun d'eux son complémentaire au tour complet, ce qui permet de toujours pouvoir "se ramener à" l'orientation de l'axe des réels.