Sommes de résidus modulaires (Denise Vella-Chemla, 14.8.2017)

Il s'agit ici de présenter des constats[1] induits de suites de résultats calculés par programme pour les entiers inférieurs à 100 concernant les sommes de résidus quadratiques, cubiques et quintiques des entiers.

Les résidus (quadratiques, cubiques, etc) sont les solutions d'équations et on effectue donc des sommes de solutions modulaires.

Résidus quadratiques

La somme des résidus quadratiques calculée ici est $q(n) = \sum_{k=1}^{milieu} k^2 \ (mod\ n)$ avec $milieu$ qui vaut $\dfrac{n}{2}$ si n est pair et $\dfrac{n-1}{2}$ sinon.

1) $n = 8k$

Dans la suite $\{8 \to 6,\ 16 \to 12,\ 24 \to 2,\ 32 \to 24,\ 40 \to 30,\ 48 \to 4,\ 56 \to 42,\ 64 \to 48,\ 72 \to 6,\ 80 \to 60,\ 88 \to 66,\ 96 \to 8\}$, on repère les nombres 6, 12,..., 24, 30,..., 42, 48,...60, 66, on infère : parmi les $8k$, les $n = 24k'$ ont leur somme qui vaut $\dfrac{n}{12}$ tandis que les $24k'+8$ et les $24k'+16$ ont pour somme des résidus quadratiques $\dfrac{3n}{4}$;

2) $n = 8k+1$

De la suite $\{17 \to 0,\ 25 \to 0,\ 33 \to 11,\ 41 \to 0,\ 49 \to 0,\ 57 \to 19\}$, on infère que les $n = 8k+1$ divisibles par 3 (les $24k'+9$) ont pour somme des résidus quadratiques $\dfrac{n}{3}$ tandis que ceux qui ne sont pas divisibles par 3 (les $24k'+1$ et les $24k'+17$) ont une somme des résidus quadratiques qui est nulle ;

3) $n = 8k+2$

Dans la suite $\{10 \to 5,\ 18 \to 15,\ 26 \to 13,\ 34 \to 17,\ 42 \to 35,\ 50 \to 25,\ 58 \to 29,\ 66 \to 55,\ 74 \to 37,\ 82 \to 41,\ 90 \to 75,\ 98 \to 49\}$, on repère les nombres 13,17,...,25,29,...,37,41, on infère que les $24k'+18$ ont pour somme des résidus quadratiques $\dfrac{5n}{6}$ tandis que les $n = 24k'+2$ et les $n = 24k'+10$ ont pour somme des résidus quadratique $\dfrac{n}{2}$;

4) $n = 8k+3$

De la suite $\{11 \to 0,\ 19 \to 0,\ 27 \to 9,\ 35 \to 0,\ 43 \to 0,\ 51 \to 17,\ 59 \to 0,\ 67 \to 0,\ 75 \to 25,\ 83 \to 0,\ 91 \to 0\}$, on infère que les $24k'+3$ ont pour somme des résidus quadratiques $\dfrac{n}{3}$ tandis que les $n = 24k'+11$ et les $n = 24k'+19$ ont leur somme des résidus quadratiques qui est nulle ;

5) $n = 8k+4$

Dans la suite $\{4 \to 1,\ 12 \to 7,\ 20 \to 5,\ 28 \to 7,\ 36 \to 21,\ 44 \to 11,\ 52 \to 13,\ 60 \to 35,\ 68 \to 17,\ 76 \to 19,\ 84 \to 49,\ 92 \to 23,\ 100 \to 25\}$, on repère les nombres 5, 7,..., 11, 13, ..., 17, 19, ..., 23, 25, on infère que les $24k'+12 = 12(2k'+1)$ ont pour somme des résidus quadratiques $\dfrac{7n}{12}$ tandis que les $n = 24k+4$ et les $n = 24k+20$ ont leur somme des résidus quadratiques qui vaut $\dfrac{n}{4}$;

6) $n = 8k+5$

De la suite $\{5 \to 0,\ 13 \to 0,\ 21 \to 7,\ 29 \to 0,\ 37 \to 0,\ 45 \to 15,\ 53 \to 0,\ 61 \to 0\}$, on infère que les $24k'+21$ ont pour somme des résidus quadratiques $\dfrac{n}{3}$ tandis que les $n = 24k'+5$ et les $n = 24k'+13$ ont leur somme des résidus quadratique qui est nulle ;

7) $n = 8k+6$

De la suite $\{22 \to 0,\ 30 \to 10,\ 38 \to 0,\ 46 \to 0,\ 54 \to 18,\ 62 \to 0,\ 70 \to 0,\ 78 \to 26,\ 86 \to 0,\ 94 \to 0\}$, on infère que les $24k'+6$ ont pour somme des résidus quadratiques $\dfrac{n}{3}$ tandis que les $n = 24k'+14$ et les $n = 24k'+22$ ont leur somme des résidus quadratiques qui est nulle ;

8) $n = 8k+7$

[1]à démontrer si c'est possible.

De la suite $\{7 \to 0,\ 15 \to 5,\ 23 \to 0,\ 31 \to 0,\ 39 \to 13,\ 47 \to 0,\ 55 \to 0,\ 63 \to 21\}$, on infère que les $24k'+15$ ont pour somme des résidus quadratiques $\dfrac{n}{3}$ tandis que les $n = 24k'+7$ et les $n = 24k'+23$ ont leur somme des résidus quadratiques qui est nulle.

Résidus cubiques

Pour les résidus cubiques, on infère :

1) parmi les $8k$, les $16k'$ ont pour somme des résidus cubiques 0 tandis que les $n = 16k'+8$ ont leur somme qui vaut $\dfrac{n}{2}$;

2) les $8k+1$ ont leur somme de résidus cubiques qui vaut k^2 ;

3) les $n = 8k+2$ ont leur somme de résidus cubiques qui vaut $\dfrac{n}{2}$;

4) pour les $8k+3$ ont leur somme de résidus cubiques qui vaut k^2+3k+1 ;

5) parmi les $8k+4$, les $n = 16k'+4$ ont pour somme des résidus cubiques $\dfrac{n}{4}$ tandis que les $n = 16k'+12$ ont leur somme de résidus cubiques qui vaut $\dfrac{3n}{4}$;

6) les $8k+5$ ont leur somme de résidus cubiques qui vaut k^2-k-1 ;

7) les $8k+6$ ont leur somme de résidus cubiques qui est nulle ;

8) les $8k+7$ (ou $8k-1$) ont (comme les $8k+1$) leur somme de résidus cubiques qui vaut k^2.

Résidus quintiques

Pour les résidus quintiques, on infère :

1) parmi les $8k$, les $16k'$ ont pour somme des résidus quintiques 0 tandis que les $n = 16k'+8$ ont leur somme qui vaut $\dfrac{n}{2}$ (même chose que pour les résidus cubiques) ;

2) pour les $8k+1$, voir ci-après ;

3) les $8k+2$ ont leur somme de résidus quintiques qui vaut $\dfrac{n}{2}$ (même chose que pour les résidus cubiques) ;

4) pour les $8k+3$, dans la suite $\{19 \to 23,\ 27 \to 31,\ 35 \to 38,\ 43 \to 44,\ 51 \to 49,\ 59 \to 53,\ 67 \to 56\}$ (remarque : les premières sommes de restes sont avant équivalence modulaire), on remarque qu'on passe d'une somme de restes à la suivante en faisant +8, +7, +6, +5, +4, +3 ; voir ci-après ;

5) parmi les $8k+4$, les $n = 16k'+4$ ont pour somme des résidus quintiques $\dfrac{n}{4}$ tandis que les $n = 16k'+12$ ont leur somme de résidus quintiques qui vaut $\dfrac{3n}{4}$ (même chose que pour les résidus cubiques) ;

6) pour les $8k+5$, voir ci-après ;

7) les $8k+6$ ont leur somme de résidus quintiques qui est nulle ;

8) les $8k+7$ ont leur somme de résidus quintiques qui est nulle.

Pour les $8k+3$ et les $8k+5$, on comprend que les formules doivent être quadratiques en k.

En effet, en prenant la suite des sommes de restes quintiques suivante

$$\{14, 23, 31, 38, 44, 53, 56\}$$

(des entiers $11, 19, 27, \ldots$ de la forme $8k+3$), on voit qu'on passe d'une somme de restes à la suivante en faisant $+9, +8, +7, +6, +5, etc.$. La somme des restes quintiques d'un nombre est donc une somme $\sum(10-k)$ et est de second degré en k.

De la même manière, en prenant la suite des sommes de restes quintiques suivante

$$\{8, 20, 31, 41, 50, 58, 65, 71, 76, 80, 83, 85\}$$

(des entiers $5, 13, 21, \ldots$ de la forme $8k+5$), on voit qu'on passe d'une somme de restes à la suivante en faisant $+12, +11, +10, +9, +8, etc.$. La somme des restes quintiques d'un nombre est donc une somme $\sum(12-k)$ et est de second degré en k.

On ne parvient pas à trouver la règle pour les $8k+1$.

Résumé

forme de n	*sum quadrat.*	*sum cubic.*	*sum quintic.*
$24k$	$n/12$	$48k \to 0$ $48k+24 \to n/2$	$48k \to 0$ $48k+24 \to n/2$
$24k+1$	0	k^2	
$24k+2$	$n/2$	$n/2$	$n/2$
$24k+3$	$n/3$	k^2+3k+1	
$24k+4$	$n/4$	$48k+4 \to n/4$ $48k+28 \to 3n/4$	$48k+4 \to n/4$ $48k+28 \to 3n/4$
$24k+5$	0	k^2-k-1	
$24k+6$	$n/3$	0	0
$24k+7$	0	k^2	0
$24k+8$	$3n/4$	$48k+32 \to 0$ $48k+8 \to n/2$	$48k+32 \to 0$ $48k+8 \to n/2$
$24k+9$	$n/3$	k^2	
$24k+10$	$n/2$	$n/2$	$n/2$
$24k+11$	0	k^2+3k+1	
$24k+12$	$7n/12$	$48k+36 \to n/4$ $48k+12 \to 3n/4$	$48k+36 \to n/4$ $48k+12 \to 3n/4$
$24k+13$	0	k^2-k-1	
$24k+14$	0	0	0
$24k+15$	$n/3$	k^2	0
$24k+16$	$3n/4$	$48k+40 \to n/2$ $48k+16 \to 0$	$48k+40 \to n/2$ $48k+16 \to 0$
$24k+17$	0	k^2	
$24k+18$	$5n/6$	$n/2$	$n/2$
$24k+19$	0	k^2+3k+1	
$24k+20$	$n/4$	$48k+44 \to 3n/4$ $48k+20 \to n/4$	$48k+44 \to 3n/4$ $48k+20 \to n/4$
$24k+21$	$n/3$	k^2-k-1	
$24k+22$	0	0	0
$24k+23$	0	k^2	0

On voit que les sommes de restes, dans le cas de restes quadratiques, sont toujours linéairement proportionnelles à n, ce qui n'est pas le cas des restes pour les puissances supérieures impaires (quelques calculs pour les puissances biquadratiques montrent qu'il semblerait que la linéarité de la somme des restes advienne pour toutes les sommes de restes des puissances paires).

On constate également que les sommes de restes quadratiques sont systématiquement nulles pour les nombres premiers qui sont nécessairement de la forme $24k+1$, ou $24k+5$ ou $24k+7$ ou $24k+11$ ou $24k+13$ ou $24k+17$ ou $24k+19$ ou $24k+23$.

Cela serait-il lié à l'hypothèse de Riemann, l'appartenance des zéros de zêta à la droite des complexes de partie réelle $\dfrac{1}{2}$ pouvant être interprété comme le fait d'enrouler une spirale brisée dont les côtés seraient fonctions des racines carrées des entiers successifs autour du point origine ? On peut rêver.

On comprend en étudiant les restes cubiques et quintiques de 2 nombres $8k+4$ (20 et 28) pour quelle raison leur somme de restes de l'un ou l'autre degré sont égales : il y a pour le premier cas échange de certains restes (12 et 8 d'une part, 7 et 3 d'autre part par exemple, pour les restes de 20), les autres restes étant fixes, ce qui préserve la somme ; dans le second cas, la plupart des restes sont modifiées mais le résultat est invariant modulo 28.

Restes de 20

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
restes cubiques	1	8	7	4	5	16	3	12	9	0
restes quintiques	1	12	3	4	5	16	7	8	9	0

Restes de 28

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
restes cubiques	1	8	27	8	13	20	7	8	1	20	15	20	13	0
restes quintiques	1	4	19	16	17	20	7	8	25	12	23	24	13	0