Chercher des idées (Denise Vella-Chemla, 31.5.2018)

On propose ici l'ébauche d'une façon de voir les nombres premiers comme annulant certains polynômes sur le disque-unité.

On a proposé la caractérisation suivante des nombres premiers (motivée par le fait que si p est un nombre premier, $\sigma(p) = p + 1$) :

$$n \text{ } est \text{ } premier \iff \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} cos \frac{2\pi no}{b} = 0$$

Victor Varin, du Keldysh Institute de Moscou, nous a fourni une démonstration de cette assertion, que l'on peut consulter ici : http://denise.vella.chemla.free.fr/VictorVarinKeldyshSumsumcos.pdf.

On peut utiliser les polynômes de Tchebychev, pour calculer chacun des cosinus.

On trouve les propriétés de ces polynômes dans la page wikipedia *Polynômes de Tchebychev.*

Utiliser le résultat $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(x\theta) = T_x(\cos\theta)$ $(n \text{ } entier)$ du paragraphe *Définition trigonométrique* permet de remplacer dans la somme de sommes de cosinus chacun des cosinus par un polynôme.

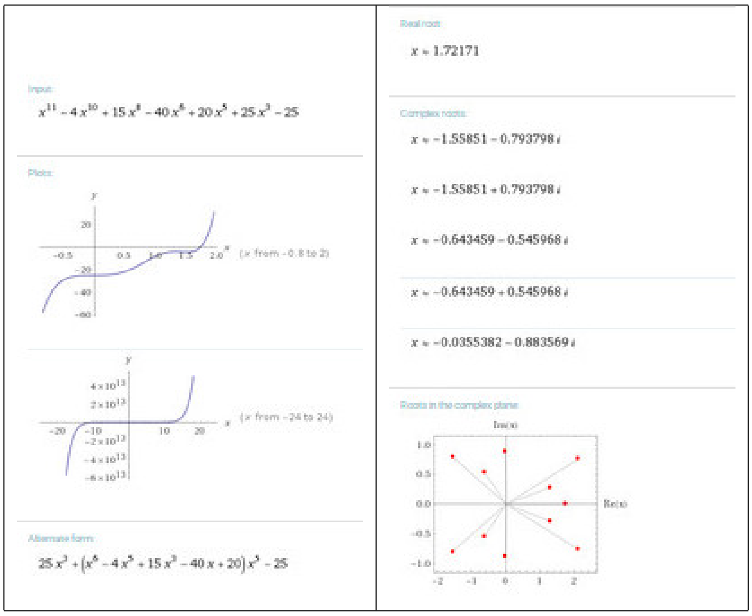
Cependant le remplacement de chaque cosinus en appliquant la formule polynomiale nécessite que celui-ci ait pour argument un multiple entier de θ ; problème : comme les dénominateurs sont les entiers successifs, pour éliminer ces dénominateurs de manière à obtenir des multiples entiers de θ comme arguments des cosinus, il nous faudrait multiplier chaque cosinus par $n!$ (qu'on peut "faire entrer" comme multiplicande dans l'argument du cosinus) pour obtenir cela. Mais alors une autre conséquence de cette multiplication par $n!$ est de permettre l'obtention d'un polynôme en une seule et même variable $X = cos\ \theta$ avec $\theta = 2\pi n^2$ qui est la partie commune des arguments de tous les cosinus à sommer. Et alors tous les cosinus étant d'argument pair valent 1 et ce qu'on a fait perd tout intérêt.

On imagine cependant qu'on aurait ainsi obtenu de manière théorique un polynôme (dont on laisse le calcul des coefficients de côté pour l'instant) dont les zéros seraient les nombres premiers.

Ce polynôme se serait annulé sur le disque unité, comme le fait par exemple le polynome :

$$P(x) = x^{11} - 4 * x^{10} + 15 * x^8 - 40 * x^6 + 20 * x^5 + 25 * x^3 - 25.$$

Visualisons les racines de l'équation polynomiale $P(x) = 0$ sur le disque-unité complexe en utilisant la version en ligne du logiciel Wolfram-Mathematica.



Certaines solutions sont dans le disque-unité du plan complexe.

On aurait alors peut-être pu utiliser la formule de Jensen qui décrit le comportement d'une fonction analytique f sur un cercle selon les modules des zéros de cette fonction. La formule de Jensen fournit des résultats sur certaines intégrales logarithmiques dans lesquelles interviennent les zéros de f.