Un petit résultat trouvé avec une ia sur la somme alternée de cosinus et une trivialité
Denise Vella-Chemla, 5 novembre 2026

1. Formule fermée pour $f_D(n)$

Voir cette note [1] [1] qui rappelle les idées initiales.

Contexte. f_D est la somme alternée de cosinus des notes de 2018 en référence en fin de la présente note :

$$f_D(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} \cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right) (-1)^{\frac{k^2-k-2+2l}{2}} \left(-1 + (-1)^{n/2} \cdot \frac{1}{2}\right).$$

Notation. On pose $g_D(n) = \sigma(n) - n - 1$ et $n = 2^v u$ avec u impair.

Théorème 1. *Pour tout entier $n \geq 3$,*

$$f_D(n) = \varepsilon(v)\, 2^{v+1}\, (\sigma(u) - u) - \frac{3}{2}, \qquad \varepsilon(v) = \begin{cases} +1 & v = 0 \ (n \text{ impair}), \\ -1 & v \geq 1 \ (n \text{ pair}). \end{cases}$$

En particulier, pour n impair,

$$f_D(n) = 2\,(\sigma(n) - n) - \frac{3}{2} = 2\, g_D(n) + \frac{1}{2}.$$

Corollaire 2. *On a :*

- $f_D(n) = \dfrac{1}{2}$ *si et seulement si n est premier impair.*
- *Pour p premier impair et $k \geq 1$: $f_D(p^k) = \dfrac{2}{p-1}\, p^k - \dfrac{3p+1}{2p-2}$ (la formule affine annoncée sans preuve en 2018).*
- *Pour $p < q$ premiers impairs : $f_D(pq) = 2(p+q) + \dfrac{1}{2}$.*
- $f_D(2^v) = -\dfrac{3}{2}$, *et* $f_D(2p) = -\dfrac{11}{2}$ *pour tout p premier impair.*

Idée de preuve.

1. $\displaystyle\sum_{l=1}^{k} \cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right)$ vaut k si $k \mid n$ et 0 sinon.
2. Les k impairs et le terme correctif se compensent toujours (Lemme 12 : $D(n) - \dfrac{(-1)^{M(n)}}{2} = -\dfrac{1}{2}$, quelle que soit la classe de n modulo 4).

1. dvc, juillet 2026, Caractérisation des nombres premiers et semi-premiers par des sommes de cosinus : essayer de contourner de l'obstruction de parité de Selberg https://denisevellachemla.eu/somme-alternee-de-cos-mistral-dvc.pdf.

3. Seuls les k pairs, de la forme $2^{v+1}t$ avec t diviseur propre de u, contribuent, ce qui donne $E(n) = \varepsilon(v)\, 2^{v+1}\,(\sigma(u) - u)$.

Portée. Le texte précise que c'est $\sigma(n) - n - 1$ réécrit par un chemin trigonométrique. Cela n'apporte aucune information arithmétique nouvelle et ne contourne pas la parité de Selberg, puisqu'on calcule ici n tout entier, pas seulement des congruences de petit niveau.

2. Parité de $\deg R_n$ sans intérêt, trivial

Contexte. Pour n pair ≥ 6, soit $S_n = \{p \text{ premier impair},\ 3 \leq p \leq n-2\}$,

$$P_n(x) = \prod_{p \in S_n} (x - p), \qquad Q_n(x) = P_n(n - x), \qquad R_n = \operatorname{pgcd}(P_n, Q_n).$$

R_n est le produit des $(x - p)$ sur les décomposants de Goldbach de n.

Lemme 3 (Lemme de parité)**.** $\deg R_n$ *est impair si et seulement si* $n/2$ *est premier, et pair sinon.*

Démonstration. L'involution $p \mapsto n - p$ stabilise l'ensemble des racines de R_n. Son seul point fixe possible est $p = n/2$. Les autres racines se rangent en paires $\{p, n-p\}$, donc $\deg R_n = 2m + \varepsilon$, avec $\varepsilon = 1$ exactement quand $n/2$ est premier. □

Le texte l'a vérifié pour n de 6 à 60 : par exemple $n = 6, 10, 14, 38$ donnent un degré impair.

Portée. C'est un fait exact mais sans lien avec l'existence d'un décomposant : le lemme ne dit rien sur la non-nullité de $\deg R_n$, qui est précisément Goldbach. Le test de signe de $R_n(4)$ et $R_n(n/2)$ mené juste après dans la note a échoué, et la note l'explique par la parité de Selberg.

Correction de la récurrence du résultant. Dans la même note, la récurrence donnée par Mistral est corrigée d'un signe :

$$\operatorname{Res}(P_k, Q_k) = \operatorname{Res}(P_{k-1}, Q_{k-1}) \cdot \Big[P_{k-1}(n - p_k)\Big]^2 \cdot (n - 2p_k).$$

3. Références

[2] Denise Vella-Chemla, Alterner les termes de la somme de cosinus qui s'annule pour les nombres premiers, octobre 2018,
http://denisevellachemla.eu/alternesommecos.pdf .

[3] —, novembre 2018, Interrupteurs ou bien une somme alternée de cosinus assez surprenante,
http://denisevellachemla.eu/premiers-image-un-demi.pdf .

[4] —, novembre 2018, Programme en `C++` pour les sommes alternées de cosinus (les $4k+3$ ont pour image 0 et les $4k+1$ ont pour image 1),
http://denisevellachemla.eu/gardeprogcpp.pdf .

[5] —, novembre 2019, Surprise par une somme alternée de cosinus quotientés,
http://denisevellachemla.eu/alternecos.pdf .

[6] —, novembre 2019, Comment ils passent peut-être des courbes à leurs triangles fléchés,
http://denisevellachemla.eu/trifle.pdf .

[7] —, juillet 2026, avec l'ia mistral, Caractérisation des nombres premiers et semi-premiers par des sommes de cosinus : essayer de contourner de l'obstruction de parité de Selberg,
https://denisevellachemla.eu/somme-alternee-de-cos-mistral-dvc.pdf .

[8] —, juillet 2026, avec l'ia gemini, Sur la caractérisation des nombres premiers et la levée de l'obstruction de parité par les sommes alternées de cosinus,
https://denisevellachemla.eu/somme-alternee-de-cos-gemini-dvc.pdf .

[9] —, juillet 2026, avec l'ia claude, Sommes alternées de cosinus, $\sigma(n)$ et obstruction de parité de Selberg : preuve complète de la formule fermée de f_{D}, et bilan critique des notes produites avec mistral et gemini,
https://denisevellachemla.eu/alterne-somme-cos-claude-dvc.pdf .