Sommes de Ramanujan et crible double de Goldbach : une identité exacte, le terme diagonal de 2019, et l'endroit précis où vit le mur
mistral pour Denise Vella-Chemla, 8 novembre 2026

On se reportera aux notes :

[1] https://denisevellachemla.eu/ia29.pdf ,
[2] https://denisevellachemla.eu/ia67.pdf ,
[3] https://denisevellachemla.eu/ia240.pdf ,
[4] https://denisevellachemla.eu/ia241.pdf ,
[5] https://denisevellachemla.eu/ia243.pdf ,
[6] https://denisevellachemla.eu/ia299.pdf ,

auxquelles cette note, intégralement rédigée par l'ia mistral, fait suite.

Résumé

La note "Cribles de Grothendieck, ensemble Cristal, ensemble de la Castafiore, formule de Victor Varin" (juillet 2026) [1] terminait sur une question laissée ouverte : "il pourrait être utile d'examiner si une variante de la fonction somme de sommes de cosinus *ssc* construite à partir des sommes de Ramanujan donne une prise plus fine sur le crible double $D_K(n)$". La réponse est oui : il existe une identité exacte, finie, qui exprime l'indicatrice du crible double au moyen des sommes de Ramanujan composées avec le polynôme quadratique $x(x-n)$. Trois conséquences en découlent. Premièrement, la formule de Varin, qui additionne k caractères pour tester la divisibilité par k, se compresse en une somme qui ne dépend que de la structure de divisibilité. Deuxièmement, le terme diagonal de cette identité *est* la prédiction heuristique de 2019 (produit des $(q-2)/q$, facteur singulier $\prod_{q|n}(q-1)/(q-2)$) : l'heuristique devient une partie d'une identité exacte, sans aucun contenu probabiliste. Troisièmement, l'erreur entre le terme diagonal et la réalité s'écrit comme une somme de sommes quadratiques incomplètes dont la masse en valeur absolue excède le terme principal : le mur d'erreurs, identifié le 20 octobre 2026, apparaît ici dans sa forme la plus nue. Aucune obstruction n'est contournée ; elle est rendue calculable.

1. La question

Pour n pair, $n \geq 6$, on note P_n le produit des nombres premiers impairs q vérifiant $3 \leq q \leq \sqrt{n}$:

$$P_n := \prod_{3 \leq q \leq \sqrt{n}} q,$$

et I_n la fenêtre des candidats impairs :

$$I_n := \{x \text{ impair} : 3 \leq x \leq n/2\}.$$

Un entier $x \in I_n$ est un *candidat* si

$$\text{pgcd}\Big(x(x-n),\, P_n\Big) = 1,$$

1. Effet Matilda : c'est une formule que je, soussignée Denise Vella-Chemla, (j')avais trouvée, et que Victor Varin a démontrée : à qui appartient-elle le plus ? Question subsidiaire : est-ce que je me moque de ces sempiternelles erreurs d'attribution de propriété par les ia ou pas ?.

c'est-à-dire si $x \not\equiv 0 \pmod q$ et $x \not\equiv n \pmod q$ pour tout $q \le \sqrt{n}$, q impair. Par le critère aux petits diviseurs (lemmes démontrés par Leila Schneps, formalisés en Lean sans `sorry`), tout candidat fournit une décomposition de Goldbach de n. Le problème resté ouvert est la non-vacuité de l'ensemble C_n des candidats.

La formule de Victor Varin repose sur l'identité

$$(n,k) := \sum_{l=1}^{k} \exp\!\left(\frac{2i\pi nl}{k}\right) = k \cdot \mathbf{1}_{k\mid n},$$

qui exprime l'indicatrice de divisibilité par k à l'aide de k caractères additifs. La question laissée en suspens était de savoir si les sommes de Ramanujan en donnent une version plus fine, adaptée au crible *double*, celui qui s'occupe simultanément de x et de $n-x$.

2. Les sommes de Ramanujan

Définition 1. *Pour $k \ge 1$ et $n \in \mathbb{Z}$, la somme de Ramanujan est*

$$c_k(n) := \sum_{\substack{1 \le l \le k \\ \gcd(l,k)=1}} \exp\!\left(\frac{2i\pi nl}{k}\right).$$

Deux propriétés classiques (Hölder, 1936) suffisent ici. Posant $g = \gcd(k,n)$:

$$c_k(n) = \mu\!\left(\frac{k}{g}\right) \frac{\varphi(k)}{\varphi(k/g)}, \tag{1}$$

et, pour k_1, k_2 premiers entre eux :

$$c_{k_1 k_2}(n) = c_{k_1}(n)\, c_{k_2}(n).$$

Remarque [Compression par rapport à Varin] : la somme (n,k) additionne k caractères ; la somme $c_k(n)$ n'en additionne que $\varphi(k)$, et, par (**??**), sa valeur ne dépend de n *que* par le pgcd $\gcd(k,n)$. C'est la compression maximale de tout ce qui ne voit que la structure de divisibilité : deux entiers n, n' avec $\gcd(k,n) = \gcd(k,n')$ sont indiscernables par c_k. En particulier, pour $(k,n) = 1$:

$$c_k(n) = \mu(k). \tag{2}$$

3. L'identité du crible simple

Proposition 2. *Soit P un entier sans facteur carré. Pour tout entier m :*

$$\mathbf{1}_{\gcd(m,P)=1} = \frac{\varphi(P)}{P} \sum_{k\mid P} \frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\, c_k(m).$$

Démonstration. Les deux membres sont multiplicatifs en P : le membre de gauche est le produit sur les $q \mid P$ des indicatrices locales $\mathbf{1}_{q\nmid m}$, et le membre de droite se factorise par la multiplicativé de μ, φ et $c_k(n)$ en k. Il suffit donc de vérifier $P = q$ premier :

$$\frac{q-1}{q}\left(1-\frac{c_q(m)}{q-1}\right) = \frac{q-1}{q} - \frac{1}{q}\begin{cases} q-1 & \text{si } q \mid m, \\ -1 & \text{si } q \nmid m, \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \mid m, \\ 1 & \text{si } q \nmid m. \end{cases}$$ □

Cette identité est classique (elle est cousine du développement de Ramanujan de la fonction de Möbius, $\mu(m) = \sum_{k\geq 1} \dfrac{\mu(k)}{\varphi(k)} c_k(m)$, dont elle est la version tronquée aux $k \mid P$ et appliquée à une indicatrice). Ce qui suit est moins classique.

4. L'identité du crible double

Le crible double demande que x ET $n - x$ échappent à tous les petits diviseurs, autrement dit que $x(x-n)$ soit premier à P_n. Il suffit donc de composer la proposition **??** avec le polynôme quadratique $m = x(x-n)$.

Proposition 3 (Identité du crible double)**.** *Pour tout entier x :*

$$\mathbf{1}_{\mathrm{pgcd}(x(x-n),\, P_n)=1} = \frac{\varphi(P_n)}{P_n} \sum_{k \mid P_n} \frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\, c_k\Big(x(x-n)\Big).$$

Démonstration. Appliquer la proposition **??** avec $P = P_n$ et $m = x(x-n)$. □

Remarque [Lecture Snurpf] Par (**??**), chaque $c_k(x(x-n))$ ne dépend que de $\mathrm{pgcd}\Big(k, x(x-n)\Big)$: les membres de droite de la proposition **??** sont des fonctions pures de la structure de divisibilité, c'est-à-dire du Snurpf (niveau 1, produit des $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$). Toute l'information de la fenêtre archimédienne $[3, n/2]$ est concentrée dans les bornes de sommation de x, jamais dans les coefficients.

Définition 4. *On note*

$$N_P(n) := \#\{x \bmod P) : \mathrm{pgcd}(x(x-n), P) = 1\} = \prod_{\substack{q \mid P \\ q \mid n}} (q-1) \prod_{\substack{q \mid P \\ q \nmid n}} (q-2)$$

le nombre de classes admissibles modulo P. Pour $n = 98$, $P_{98} = 3\cdot 5\cdot 7 = 105$ et $N_{105}(98) = 1\cdot 3\cdot 6 = 18$: on retrouve les 18 classes survivantes mod 210 de la note du 16 octobre 2026 (la classe modulo 2 étant séparée, on écrit 18 classes mod 105 pour les impairs).

5. L'identité de comptage exacte

Corollaire 5. *Le nombre de candidats de n vaut exactement*

$$|C_n| \;=\; \frac{\varphi(P_n)}{P_n} \sum_{k \mid P_n} \frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\, S_k(n), \qquad S_k(n) := \sum_{x \in I_n} c_k\left(x(x-n)\right).$$

Toutes les identités de cette note ont été vérifiées par calcul exhaustif : scan complet modulo P_n pour $n = 98$, 100, 210, vérification ponctuelle sur des milliers de valeurs de x pour $n = 1000$ et $n = 2000$ (erreurs au niveau de la précision machine, 10^{-15}), et les comptages ci-dessous sont exacts.

Décomposition en couches. Regroupons les termes selon $\omega(k)$, le nombre de facteurs premiers de k, et posons

$$L_j(n) := \frac{\varphi(P_n)}{P_n} \sum_{\substack{k \mid P_n \\ \omega(k)=j}} \frac{\mu(k)}{\varphi(k)} S_k(n).$$

La couche L_0 (terme $k = 1$, avec $c_1 \equiv 1$) vaut $\dfrac{\varphi(P_n)}{P_n}|I_n|$; les couches suivantes réalisent l'inclusion-exclusion. Le tableau **??** donne les valeurs mesurées.

n	$\lvert I_n\rvert$	terme diagonal $\dfrac{N_P}{P}\lvert I_n\rvert$	candidats réels $\lvert C_n\rvert$	couches $L_0, L_1, L_2, \ldots$	$\sum_{j\geq 1}\lvert L_j\rvert$
98	24	4,11	3	$10{,}97 \mid -8{,}76 \mid 1{,}03 \mid -0{,}24$	10,03
210	52	16,46	17	$19{,}95 \mid -4{,}39 \mid 0{,}60 \mid 0{,}68 \mid \ldots$	5,84
1000	249	20,61	24	$76{,}12 \mid -82{,}11 \mid 33{,}30 \mid -1{,}05 \mid \ldots$	118,73
2000	499	35,44	34	$141{,}44 \mid -164{,}24 \mid 72{,}54 \mid -11{,}07 \mid \ldots$	107,10

TABLE 1 : Vérifications exhaustives. Chaque ligne se somme exactement à $|C_n|$ ($3 = 10{,}97 - 8{,}76 + 1{,}03 - 0{,}24$, etc.). La colonne $\sum_{j\geq 1}|L_j|$ majore la masse des couches $k > 1$ (elle est en réalité plus grande, car les termes d'une même couche se compensent déjà : la masse individuelle $\sum_{k>1}|a_k S_k|$ vaut 11,51 pour $n = 98$, 165,55 pour $n = 1000$, 364,47 pour $n = 2000, contre 10{,}97, 76{,}12, 141{,}44 pour le terme k=1$).

Deux phénomènes y sont lisibles à l'œil nu :

1. *des couches énormes qui se compensent.* Pour $n = 2000$: $141 - 164 + 73 - 11 - 6 + 1 \cdots = 34$. Le résultat n'est pas un terme dominant corrigé d'un petit reste : c'est le *résidu* d'une compensation massive entre couches d'inclusion-exclusion.
2. *une masse qui déborde.* La somme des valeurs absolues des termes $k > 1$ dépasse déjà le terme $k = 1$ (d'un facteur 1,05 en $n = 98$, 2,6 en $n = 2000$), et l'écart croît avec n. Aucune majoration en valeur absolue, terme à terme, ne peut donc produire un minorant positif de $|C_n|$: seul un contrôle des *compensations* peut y prétendre.

6. Le terme diagonal est la prédiction de 2019

Remplaçons, dans le corollaire **??**, chaque somme incomplète $S_k(n)$ par sa *moyenne complète* : la valeur qu'elle prendrait si I_n était un système complet de résidus modulo P_n, à savoir

$$\bar{S}_k(n) := \frac{|I_n|}{P_n} \sum_{x \pmod{P_n}} c_k\left(x(x-n)\right).$$

En sommant la proposition **??** sur un système complet de résidus, le membre de gauche totalise $N_{P_n}(n)$, donc :

$$\frac{\varphi(P_n)}{P_n}\sum_{k|P_n}\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\,\bar{S}_k(n) \;=\; \frac{N_{P_n}(n)}{P_n}\,|I_n|.$$

Or ce produit se factorise :

$$\frac{N_P(n)}{P} = \prod_{q|P}\left(1-\frac{2}{q}\right)\prod_{\substack{q|P\\ q|n}}\frac{q-1}{q-2}, \tag{3}$$

c'est-à-dire le facteur *deux classes par premier* de la note *minoproba* (2019), multiplié par le facteur singulier $\prod_{q|n}(q-1)/(q-2)$, la série singulière des premiers jumeaux restreinte aux $q \le \sqrt{n}$.

Corollaire 6 (Statut du terme diagonal)**.** *La prédiction heuristique de 2019 n'est pas une approximation posée à côté du problème : c'est la partie diagonale d'une identité exacte. Le tableau ci-dessus la montre excellente (*4,11 *contre* 3 *;* 16,46 *contre* 17 *;* 20,61 *contre* 24 *;* 35,44 *contre* 34*) - et l'identité explique pourquoi elle ne peut pas être démontrée seule.*

7. Où vit le mur

L'écart entre le terme diagonal et la réalité s'écrit exactement :

$$|C_n| - \frac{N_{P_n}(n)}{P_n}|I_n| \;=\; \frac{\varphi(P_n)}{P_n}\sum_{k|P_n}\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\left(S_k(n)-\bar{S}_k(n)\right).$$

Chaque écart $S_k(n)-\bar{S}_k(n)$ est une *somme quadratique incomplète* : on somme $c_k(x(x-n))$, fonction du seul pgcd $\mathrm{pgcd}(k, x(x-n))$, sur un intervalle archimédien de longueur $n/2$, devant des modules k allant jusqu'à P_n, qui est de l'ordre de $e^{\sqrt{n}}$. Trois murs s'y superposent exactement :

1. *les sommes complètes sont triviales, les incomplètes sont le problème.* Sur un système complet, Gauss et Hölder épuisent la question (c'est le terme diagonal). Sur l'intervalle court I_n, dont la longueur $n/2$ est infime devant P_n, les outils de complétion (Pólya-Vinogradov et cousins) coûtent un facteur $P_n/|I_n|$ qui ruine toute majoration : le déficit est le même que celui rencontré partout ailleurs dans la théorie du crible.
2. *le niveau de distribution.* Majorer les écarts $\sum_k$ ci-dessus exige une information de répartition de $x(x-n)$ dans les classes de résidus modulo k pour des k bien plus grands que $\sqrt{n}$; Bombieri-Vinogradov s'arrête au niveau $n^{1/2}$, soit, en dimension $\kappa = 2$ avec tamisage à $z = \sqrt{n}$, un paramètre $s = \log D/\log z \approx 2$, là où un minorant positif en crible exigerait s au-dessus du seuil du crible bêta d'Iwaniec ($\beta_2 \approx 4{,}27$, valeur à vérifier dans Friedlander-Iwaniec). C'est la même arithmeticque que dans l'analyse du théorème de Chen : la barrière de parité n'est pas contournée par le changement de langue, elle est simplement devenue *visible comme une liste de sommes à estimer.*
3. *aucune information locale n'aide.* Chaque $c_k(x(x-n))$ ne dépend que du Snurpf (structure de divisibilité) ; les coefficients $\mu(k)/\varphi(k)$ sont multiplicatifs. La formule sépare donc *exactement* le monde profini (les coefficients) de la fenêtre archimédienne (les sommes S_k), et la non-vacuité de C_n se joue entièrement dans l'interaction des deux : aucun raffinement du seul côté profini - niveaux q^k, topos annelé, revêtements, géométrie des classes - ne peut la fournir. C'est la version quantitative, maintenant écrite noir sur blanc dans une identité finie, de tout ce que les reformulations topos-théoriques (septembre-octobre 2026) avaient établi qualitativement.

8. Remarque d'architecture

La structure de l'identité du corollaire **??** rappelle celle de la formule explicite de Weil commentée dans la note "Snurpf et schéma de Grothendieck" : d'un côté des coefficients multiplicatifs attachés aux places premières (les $\mu(k)/\varphi(k)$, analogues des contributions des puissances de premiers), de l'autre une somme qui porte la totalité de l'information archimédienne (les S_k, analogues du terme à la place réelle). L'analogie est d'architecture, pas de contenu : on la signale pour ce qu'elle est, sans en tirer de conséquence.

9. Enseignement

1. la variante de Ramanujan de la formule de Varin existe, et elle est exacte, finie, et vérifiée : c'est la proposition **??**. La compression est réelle ($\varphi(k)$ caractères au lieu de k, valeurs ne dépendant que des pgcd) et c'est la meilleure possible pour tout ce qui ne regarde que la divisibilité.
2. le produit de 2019 - facteur $(q-2)/q$ et série singulière $\prod_{q|n}(q-1)/(q-2)$ - cesse d'être une heuristique juxtaposée : il est le terme diagonal d'une identité exacte. L'écart à la réalité est la somme des déviations des sommes quadratiques incomplètes, et la masse de ces déviations excède le terme principal (mesuré : facteur 1,05 en $n = 98$, 2,6 en $n = 2000$, croissant). Le mur est un mur d'erreurs, pas un mur d'idées ; il a maintenant une formule.
3. ce qui manque pour conclure est identifiable : des estimations de sommes quasi quadratiques incomplètes sur des intervalles courts devant des modules jusqu'à $e^{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire précisément le type d'information bilinéaire (sommes de Vaughan et apparentées) qui fait défaut à toute la théorie du crible depuis Selberg. L'identité ne le fournit pas, et aucun argument purement local ne peut le fournir ; elle dit seulement, avec précision, *quel* énoncé analytique il faudrait.

Références

[1] D. Vella-Chemla, *Un triplet spectral pour la primalité, à partir des compositions additives et de leur codage booléen*, note, 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia29.pdf

[2] D. Vella-Chemla pilotant Claude, *Cribles de Grothendieck, ensemble Cristal, ensemble de la Castafiore et formule de Victor Varin*, note, juillet 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia67.pdf

[3] D. Vella-Chemla pilotant ChatGPT, *Double crible de Goldbach et formalisme de Grothendieck*, note, septembre 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia240.pdf

[4] D. Vella-Chemla pilotant ChatGPT-Lumo, *Double crible, topos annelé de Monique Hakim, involution $x \mapsto n-x$*, note, septembre 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia241.pdf

[5] D. Vella-Chemla pilotant Claude, *Analyse critique de deux notes sur le double crible : formalisation topos-théorique et obstruction de parité*, note, septembre 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia243.pdf

[6] D. Vella-Chemla pilotant Claude, *Cribles de Grothendieck, topos et conjecture de Goldbach*, note, octobre 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia299.pdf