Snurpf et plan complexe (Denise Vella-Chemla, janvier 2024)

On poursuit l'étude d'un système de représentation par les restes (modulaires) pour les parties finies de $\mathbb{N}$ (ou *Snurpf*) associé à un positionnement des nombres dans le plan complexe.

1. Introduction : présentation de la représentation du *Snurpf* dans le plan complexe

Pour illustrer le *Snurpf complexe*, voyons comment il positionne les entiers de 1 à $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ dans le plan complexe.

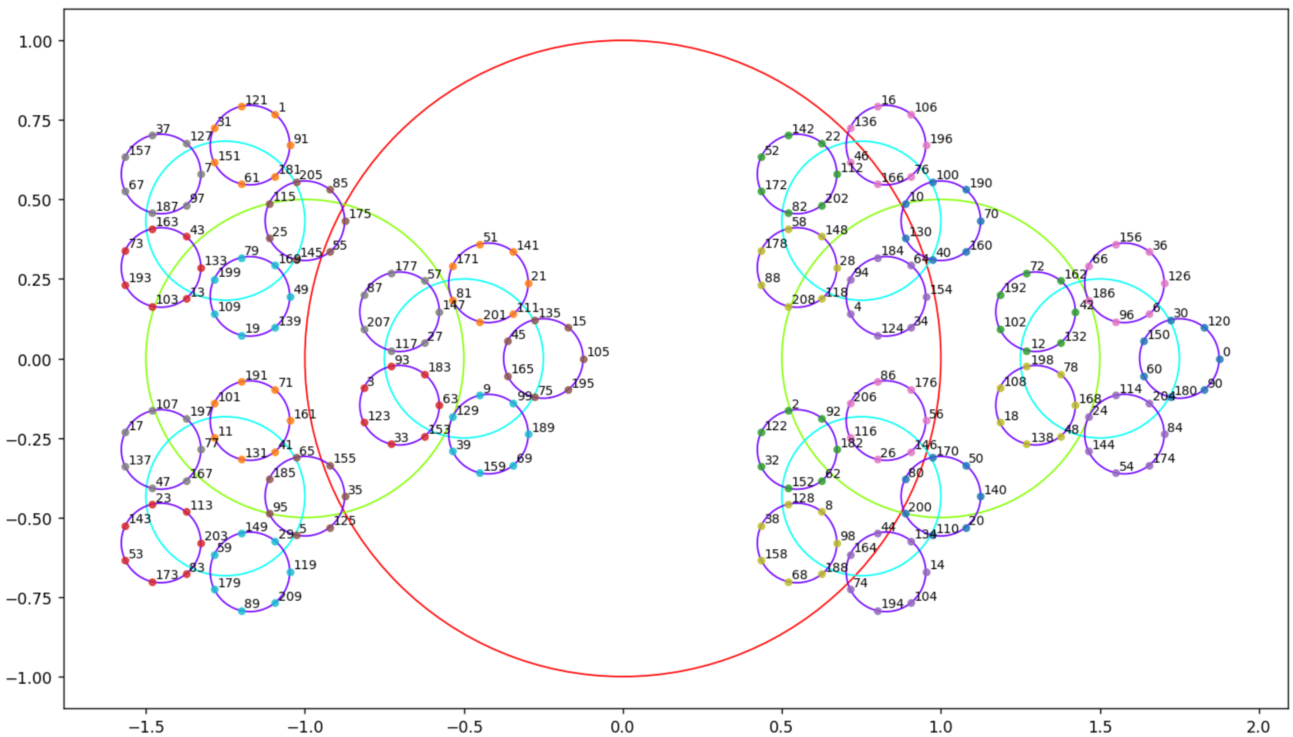


FIGURE 1 : Placement des 210 premiers nombres dans le plan complexe par le *Snurpf*

Chaque nombre est positionné dans le plan complexe suivant ses restes de division euclidienne par les nombres premiers d'une base, ici $\mathscr{B} = \{2, 3, 5, 7\}$.

Les nombres pairs sont positionnés dans le demi-plan réel supérieur (droit), les nombres impairs sont positionnés dans le demi-plan réel inférieur (gauche).

L'affixe d'un nombre n est $\displaystyle\sum_{k=1}^{|\mathscr{B}|=4} \frac{1}{2^k} e^{\frac{2i\pi(n \bmod p_k)}{p_k}}$.

On a fait ce choix des multiplications par les inverses des puissances successives de 2 pour que les positions des différents nombres ne risquent pas d'interférer les unes avec les autres dans la mesure où $\displaystyle\sum \frac{1}{2^k} < 1$.

Du fait du partage des restes modulo 2, 3 et 5 de tous les nombres positionnés sur un même cercle, les cercles contiennent les nombres de suites de raison 30 (de la forme $30x + a$), selon le graphique ci-dessous :

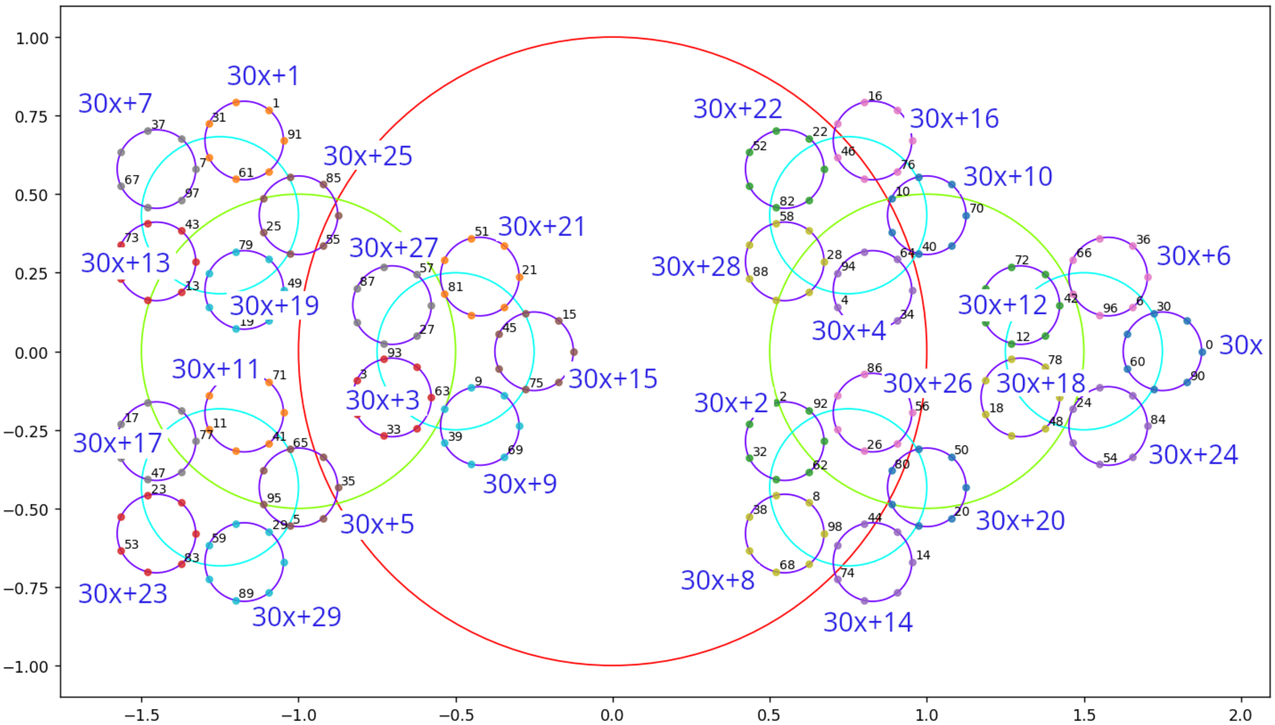


FIGURE 2 : Positionnement des suites $30x + k$ sur les différents cercles complexes

2. Propriétés qui découlent de la représentation choisie

2.1. Cribler les nombres qui partagent un reste avec 0

On souhaite *cribler les divisibles par au moins un* p_k, avec pour l'illustration considérée $p_k \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Les *divisibles par au moins un* p_k ont leur affixe qui est dans une zone Z qu'on peut qualifier de fractale et qui a la forme présentée sur le graphique ci-dessous.

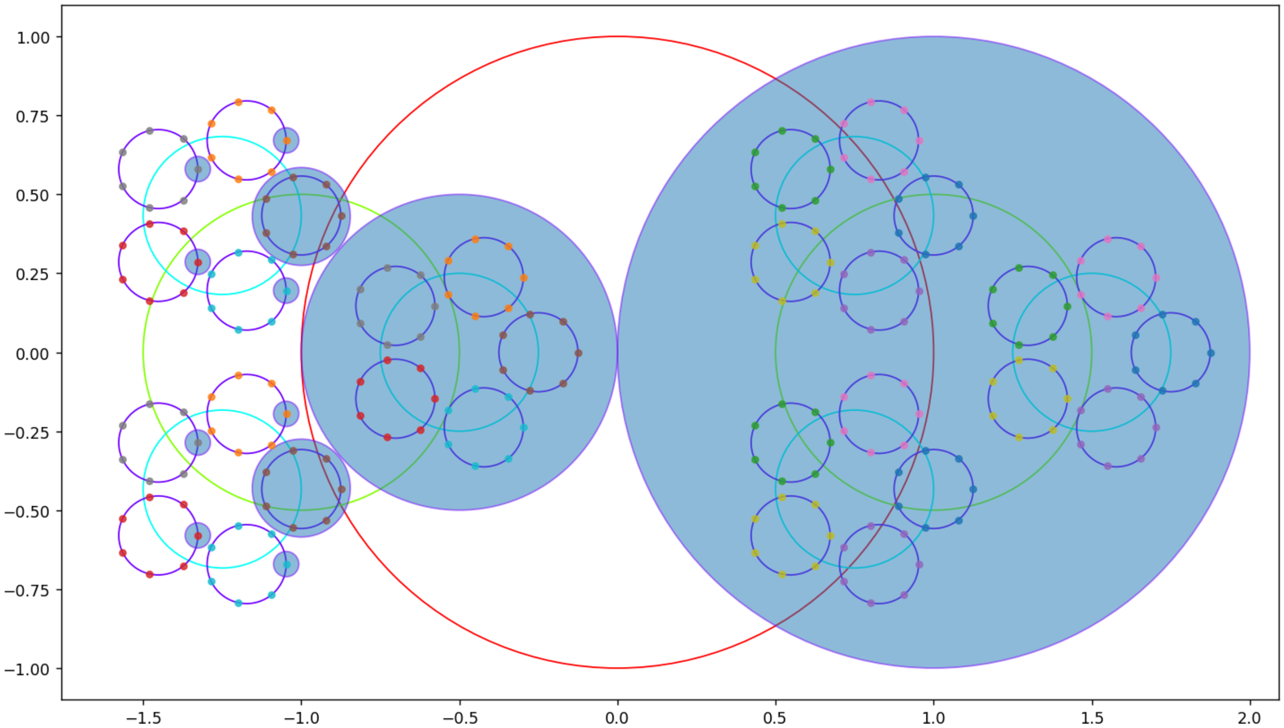


FIGURE 3 : Les *divisibles* (ou espace fractal contenant les nombres qui ont au moins un reste nul, i.e. un reste qu'ils partagent avec le nombre 0)

Le disque bleu le plus grand à droite contient tous les nombres pairs ($\equiv 0 \pmod 2$). Le disque de taille moyenne à gauche du disque le plus grand contient les nombres impairs divisibles par 3 ($\equiv 0 \pmod 3$). Les deux disques plus petits contiennent les nombres qui ne sont ni divisibles par 2 ni divisibles par 3 (qui étaient contenus par les 2 disques plus gros) mais qui sont divisibles par 5 ($\equiv 0 \pmod 5$). Enfin, les 8 disques contiennent des nombres divisibles par 7 (et non divisibles par 2, 3 ou 5).

La symétrie horizontale (par rapport à l'axe des abscisses), qui en l'occurrence envoie x sur $210-x$, permet soit d'envoyer un nombre qui est dans la zone Z sur un nombre qui est dans la zone Z (on dira que cette opération fait rester dans la zone Z), soit d'envoyer un nombre qui est à l'extérieur de la zone Z sur un nombre qui est également à l'extérieur de la zone Z (on dira que cette opération fait rester à l'extérieur de la zone Z).

2.2. Cribler les nombres qui partagent un reste (au moins) avec n

On peut, similairement à la façon dont on a *criblé 0* au paragraphe précédent, *cribler* n.

Reprenons notre exemple classique : *cribler 98* consiste à enlever les nombres dans la zone Z' (rose) ci-dessous qui contient les nombres pairs (comme l'est 98), ainsi que (parmi les nombres restant) les nombres congrus à 2 (mod 3) (comme l'est 98), ainsi que (parmi les nombres restant) les nombres congrus à 3 (mod 5) (comme l'est 98), ainsi que (parmi les nombres restant) les nombres divisibles par 7 (congrus à 0 (mod 7), comme l'est 98).

Le fractal Z' est représenté sur le graphique ci-dessous.

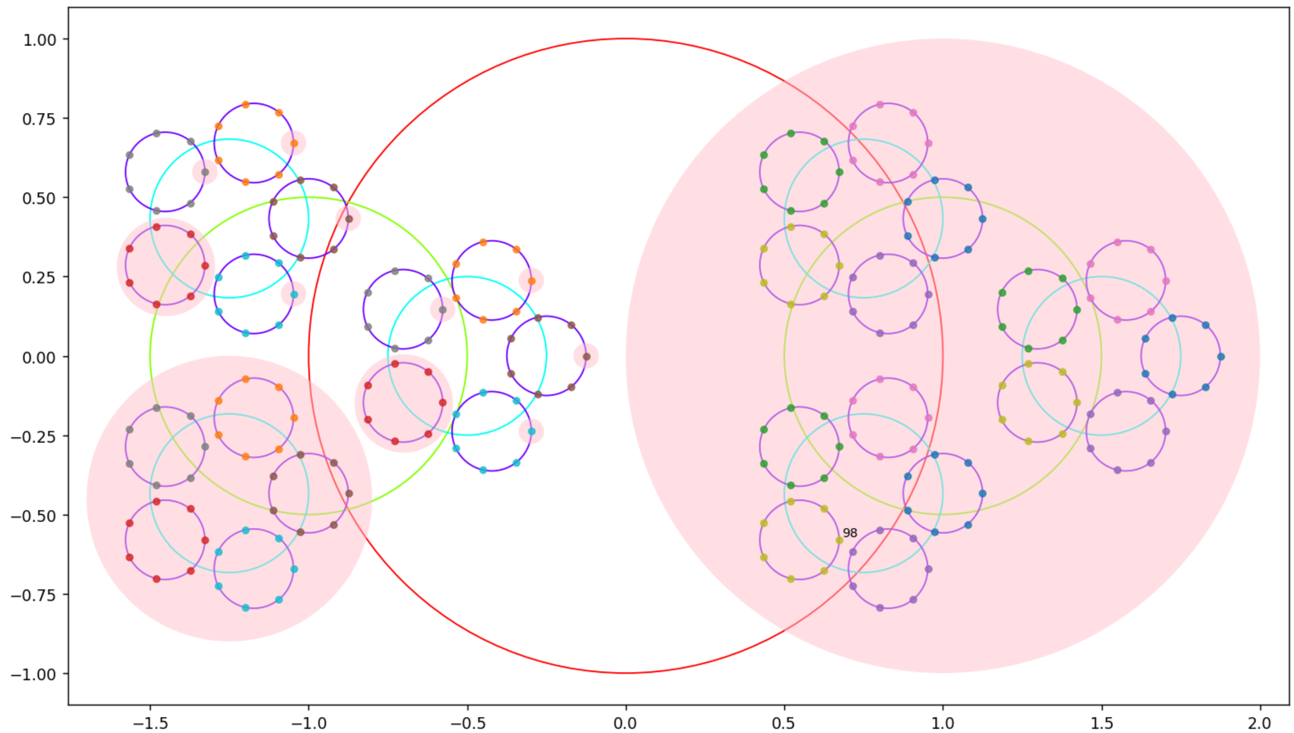


FIGURE 4 : les *congrus à* $n = 98$ (ou espace fractal contenant les nombres qui partagent au moins un reste avec n)

L'opération qui permet soit de rester dans le fractal Z', soit de rester à l'extérieur du fractal Z', est l'opération qui à x associe $2n - x$. On montre simplement dans le graphique ci-dessous les appariements (121,75) et (107,89) pour $n = 98,\ 2n = 196$.

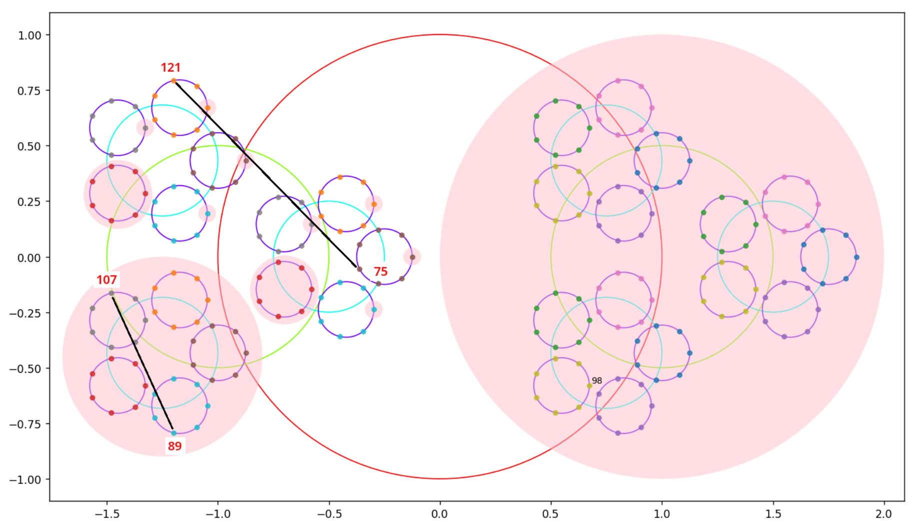


FIGURE 4 bis : opération qui fait rester dans (resp. à l'extérieur du) fractal Z'

2.3. Double crible

A été démontré (voir http://denise.vella.chemla.free.fr/jade1.pdf) qu'un nombre compris entre 3 et $n/2$ qui n'est jamais congru ni à 0 ni à n est un décomposant de Goldbach de n (compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$).

Appliquer ce double crible consiste à cribler les fractals Z et Z' vus aux deux paragraphes précédents, selon le graphique ci-dessous.

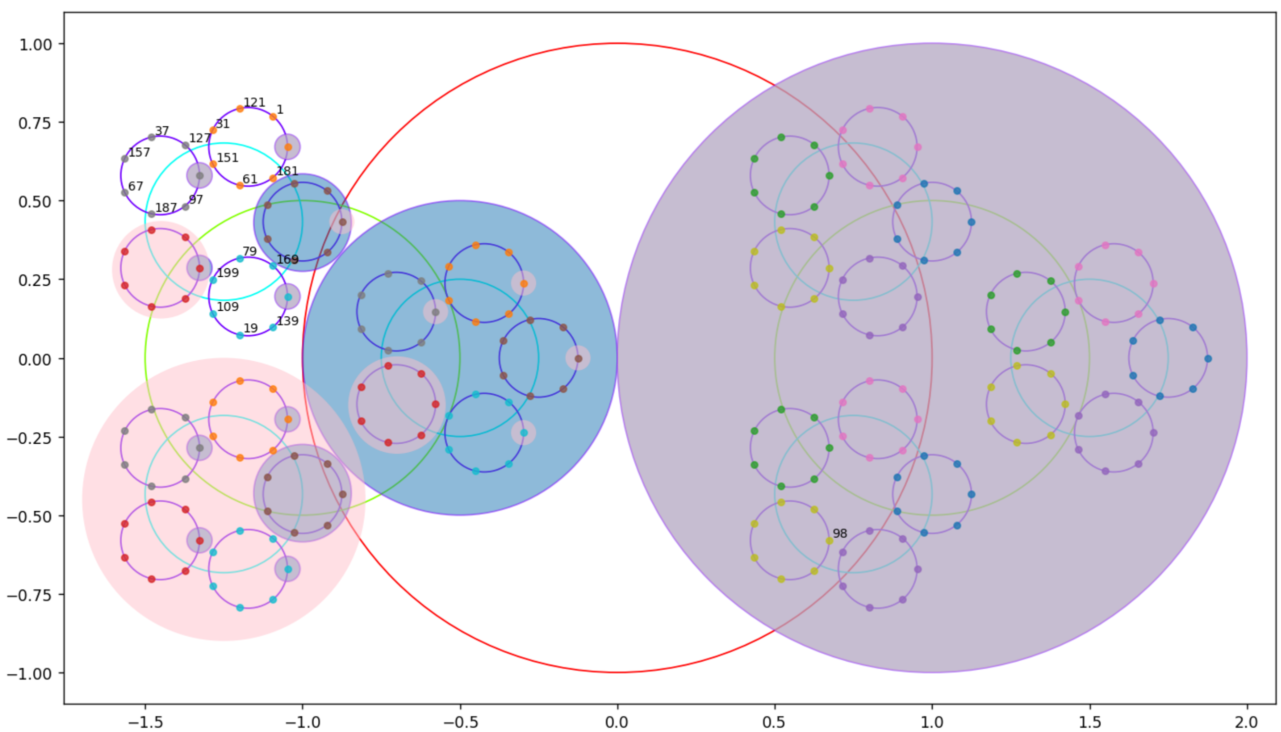


FIGURE 5 : double crible (des nombres qui partagent au moins un reste avec 0 ainsi que des nombres qui partagent au moins un reste avec n)

On comprend aisément que les diviseurs premiers p_{div} de n ne font éliminer qu'une seule classe de congruence au lieu de deux modulo p_{div} : ils font cribler la seule classe modulaire $\equiv 0 \pmod{p_{div}}$, alors que les nombres premiers p_{nondiv} qui ne divisent pas n font cribler deux disques de même taille correspondant aux classes de congruence modulaire $\equiv 0 \pmod{p_{nondiv}}$ et $\equiv n \pmod{p_{nondiv}}$.

De ce fait, les nombres qui ont peu de diviseurs premiers (comme les nombres qui sont des puissances de 2 par exemple, ou bien les nombres qui ont peu de diviseurs premiers dans leur factorisation) auront, localement, bien moins de décomposants de Goldbach que les entiers qui sont proches d'eux.

2.4. Brisure de symétrie de la représentation par n

On rappelle l'anecdote du clavier de piano, et de ses touches noires et blanches : c'est le fait qu'il y ait des paquets de 3 touches noires d'une part, et des paquets de 2 touches noires d'autre part (la brisure de symétrie), qui permet de trouver la position de la note *do* sur un clavier (touche blanche immédiatement contigue (à gauche) à un paquet de deux touches noires).

On a vu ci-dessus qu'on pouvait *cribler l'espace par un nombre*. On va maintenant *symétriser l'espace par un nombre* n, i.e. apparier les nombres x et y dont la somme $\sigma_n = x + y$ est congrue à n modulo le produit des éléments de la base $\mathscr{B}$ (i.e. $\sigma_n = x + y \equiv n \pmod{\prod_{b_k \in \mathscr{B}} b_k}$),.

Pour poursuivre avec l'exemple du nombre 98, qui se trouve être égal à 308 modulo 210, 98 permet d'associer les différents cercles de la représentation de la façon suivante.

À la manière dont Gauss enfant associait les nombres 2 à 2 pour calculer la somme des 100 premiers nombres entiers, on peut voir le nombre 98 comme procédant à l'association suivante entre les nombres compris entre 1 et 210.

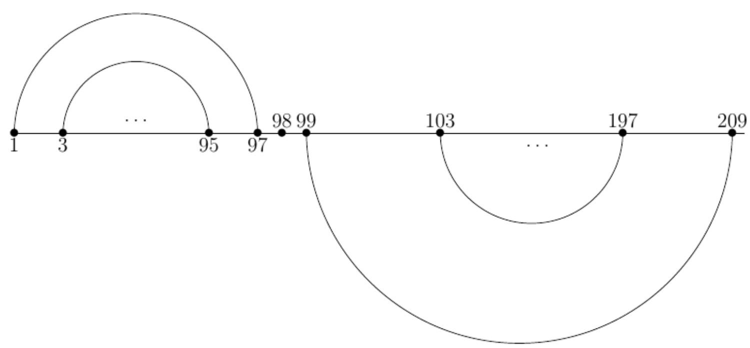


FIGURE 6 : positionnement des sommes de deux termes $\equiv 98 \pmod{210}$ sur l'intervalle $[1, 210]$

Présentons d'abord pour deux cercles l'appariement par somme pour $n = 98$ (noter les sens de rotation inversés sur les deux cercles).

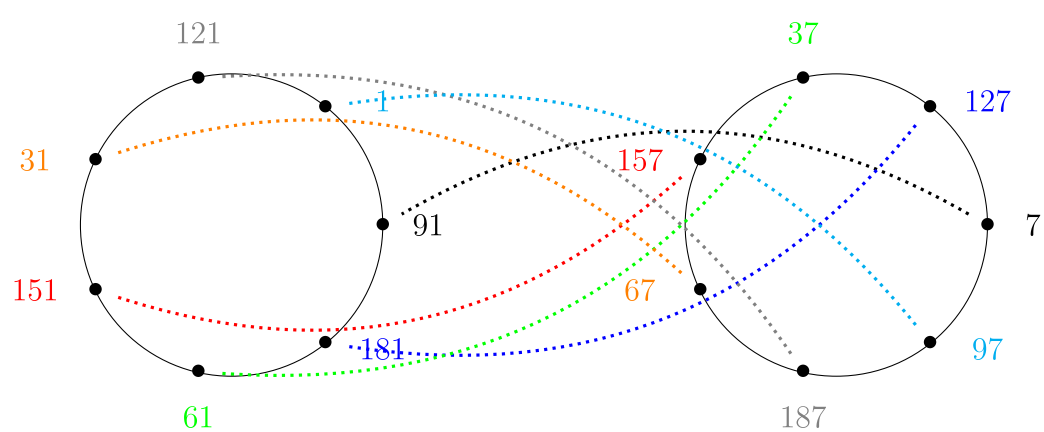


FIGURE 7 : appariement des cercles pour $n = 98$

Voyons comment les cercles sont globalement appariés par somme pour $n = 98$.

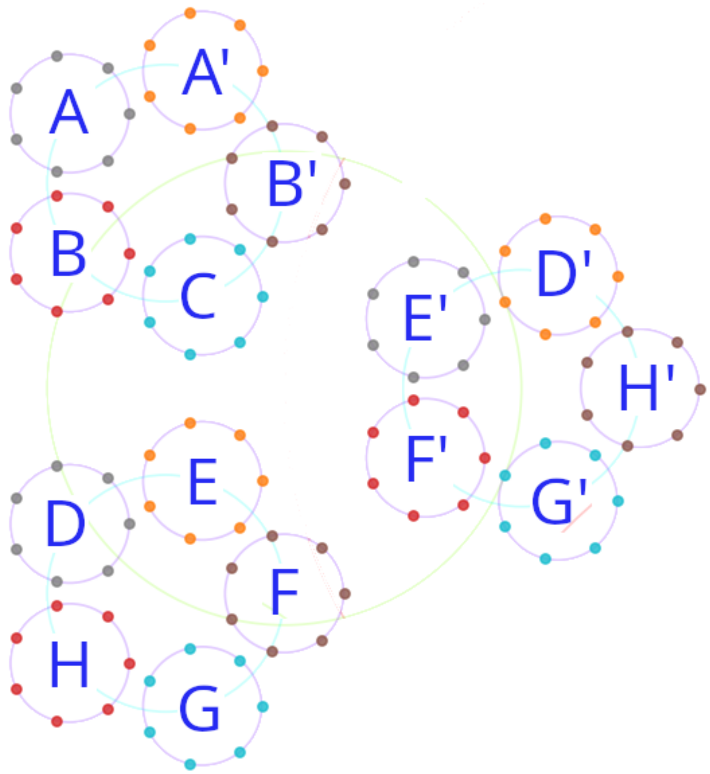


FIGURE 8 : appariement des cercles pour $n = 98$

Les deux lettres A et A' représentent le fait que les $30x+7$ sont appariés ainsi aux $30x+1$ (pour que la somme 98 soit maintenue, 98 étant un $30x+8$, on tourne dans le sens horaire sur un cercle et dans le sens anti-horaire sur l'autre cercle) :

7	127	37	157	67	187	97
91	181	61	151	31	121	1

Certains cercles sont appariés avec eux-mêmes (par exemple le cercle des $30x+19$ pour $n = 98$ selon le graphique ci-dessous, la somme de deux $30x+19$ donnant un $30x+8$).

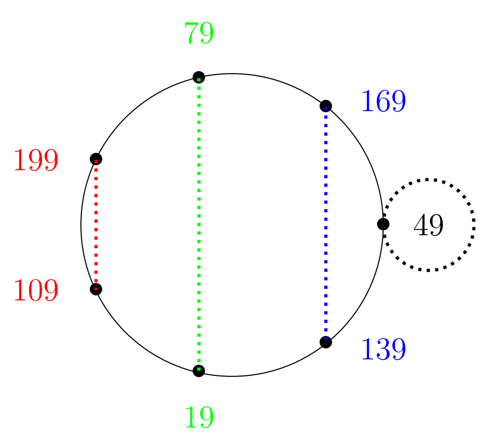


FIGURE 9 : exemple d'appariement d'un cercle avec lui-même ; les sommes de sommets appariés sont toutes congrues à 98 (mod 210).

Lorsqu'on crible deux classes de congruences au maximum selon chaque nombre premier, restent forcément au moins $\prod_{k=1}^{4}(p_k - 2)$ nombres appariés. Ces nombres qui, dans une certaine proportion, sont inférieurs à n, fournissent les décompositions de Goldbach cherchées.

Exemple pour $n = 128 = 19+109 = 31+97 = 61+67$ (il y a un schisme, les positions se chevauchent, voir en annexe une autre représentation par cercles tangents internes pour éviter le chevauchement).

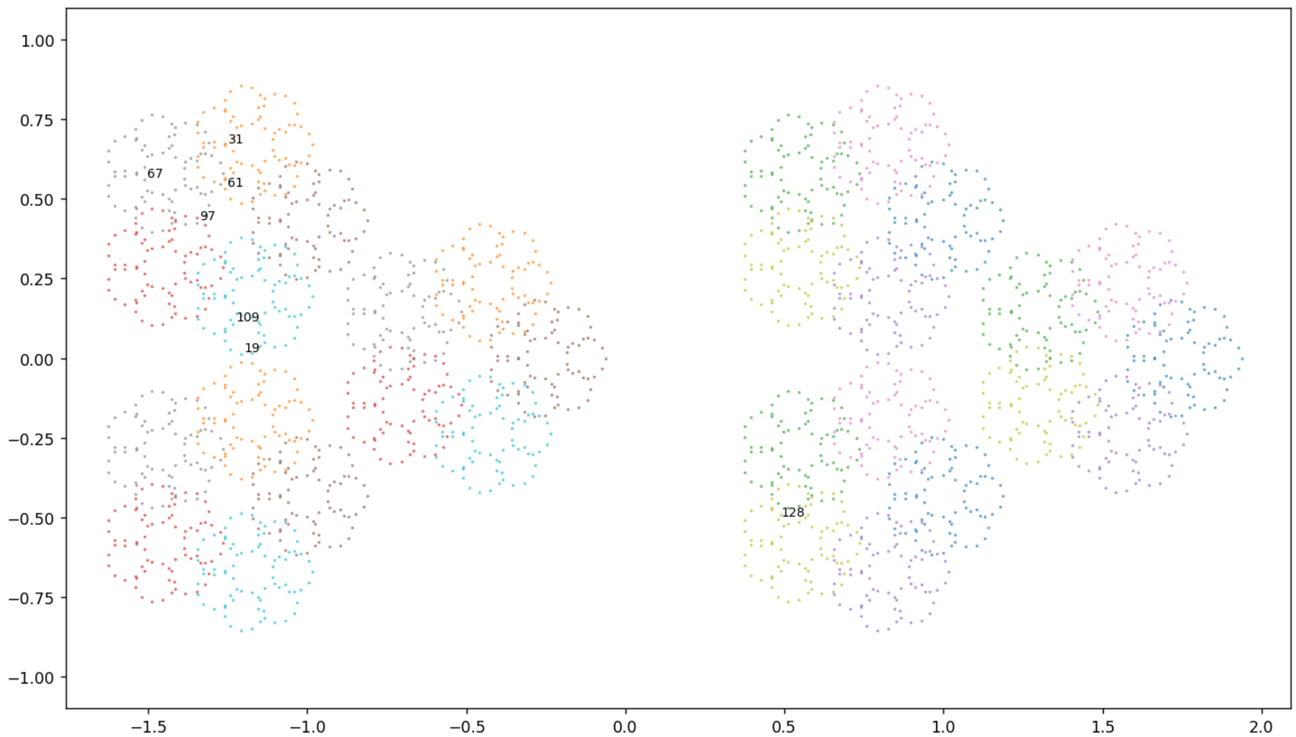


FIGURE 10 : décomposants de Goldbach de $n = 128$

Exemple pour $n = 256 = 5 + 251 = 17 + 239 = 23 + 233 = 29 + 227 = 59 + 197 = 83 + 173 = 89 + 167 = 107 + 149$:

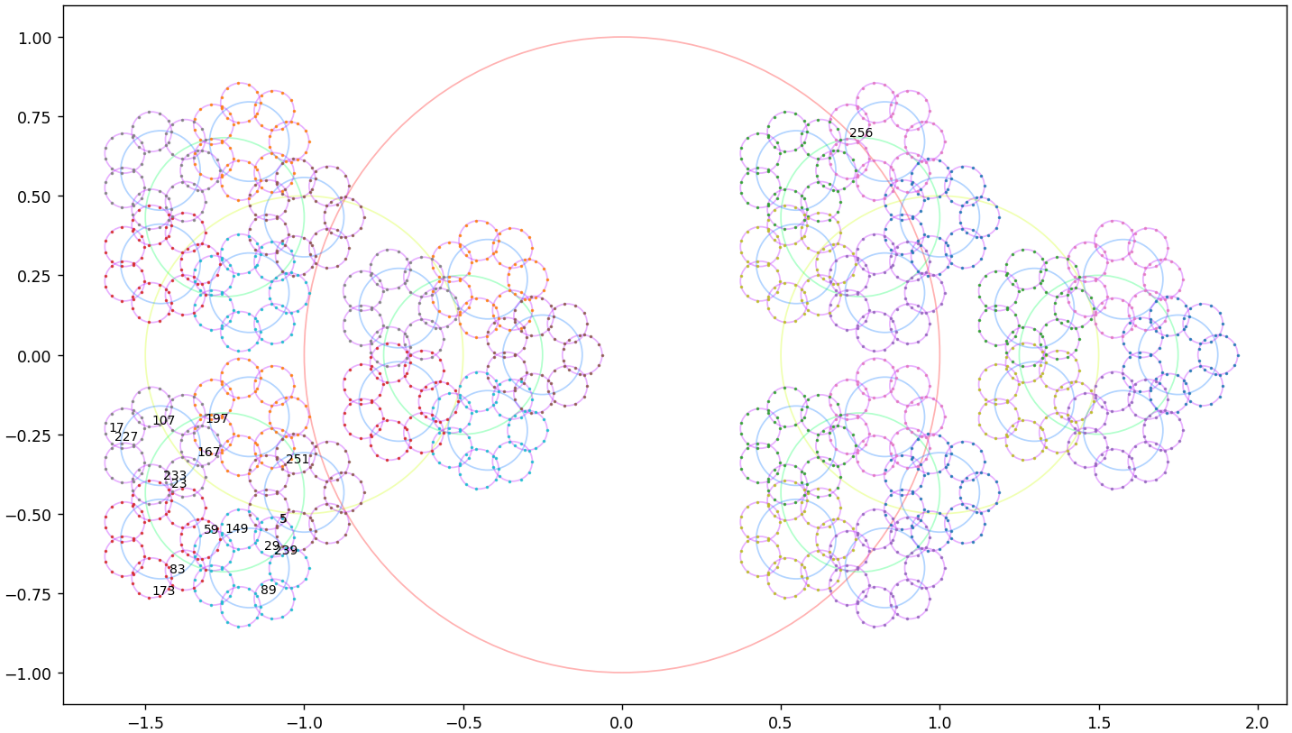


Figure 11 : décomposants de Goldbach de $n = 256$ avec $\mathscr{B} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

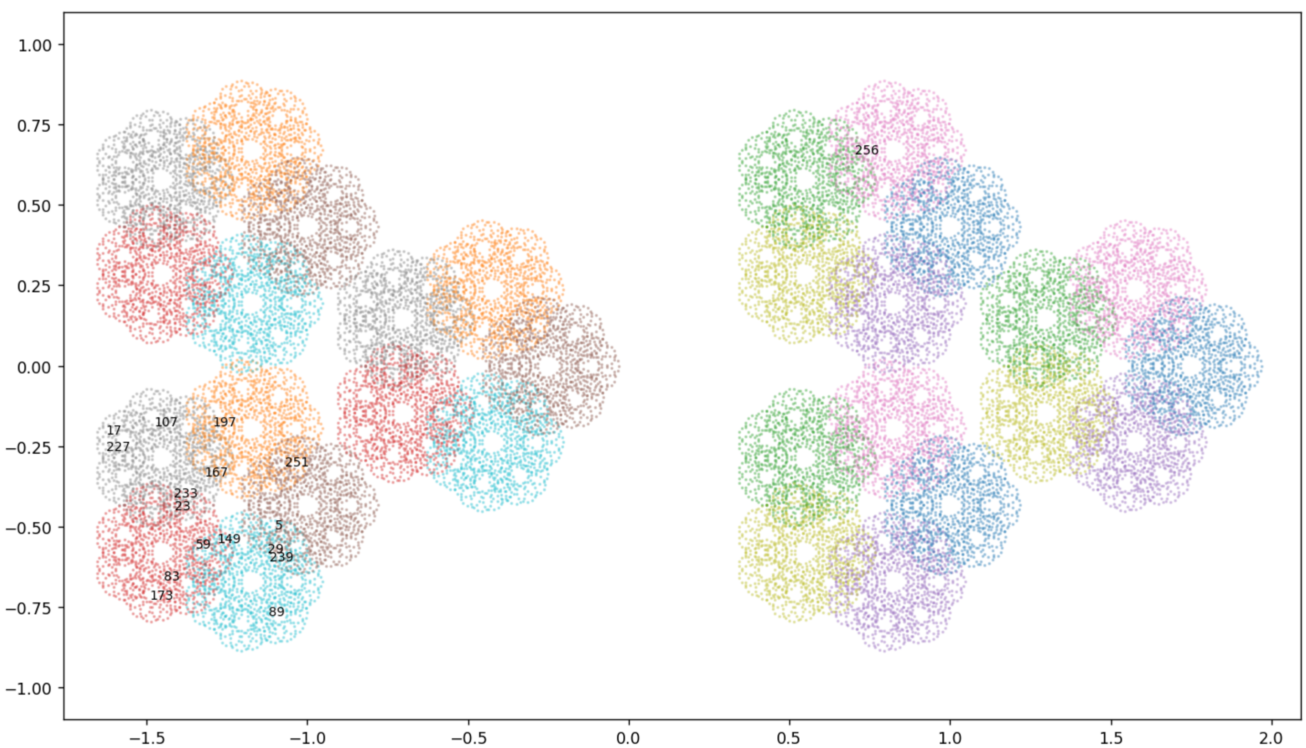


Figure 12 : décomposants de Goldbach de $n = 256$ avec $\mathscr{B} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

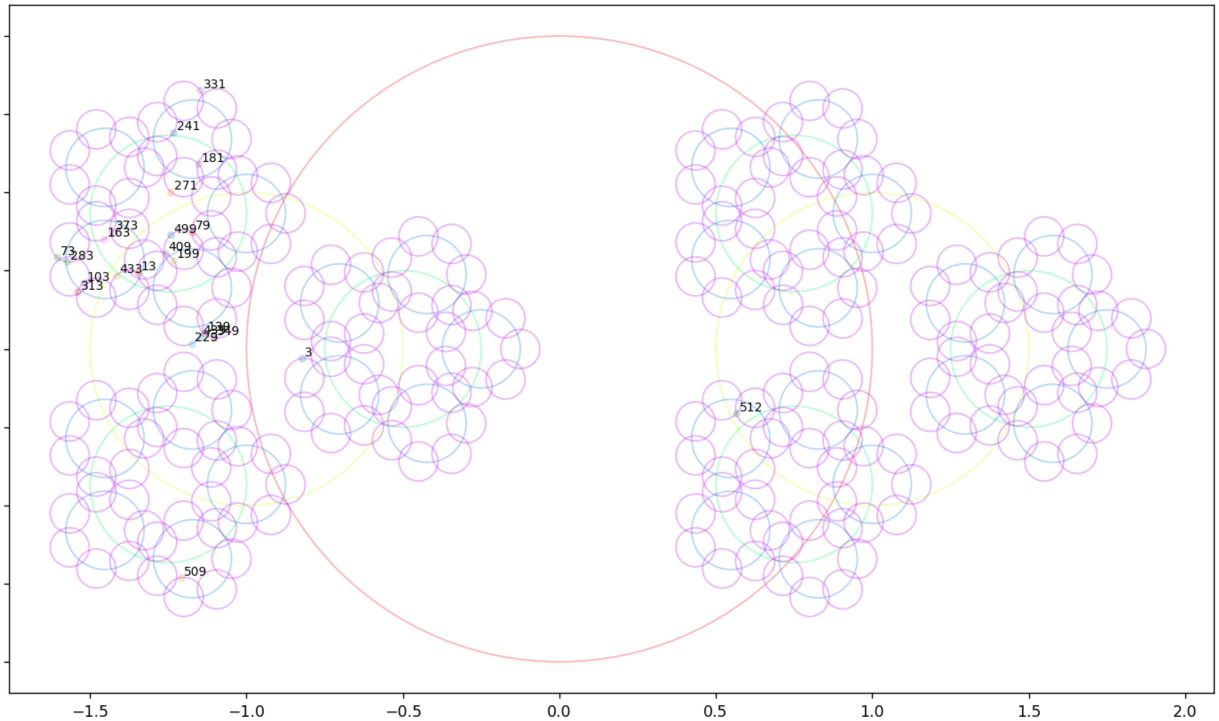


FIGURE 13 : décomposants de Goldbach de $n = 512$ avec $\mathscr{B} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

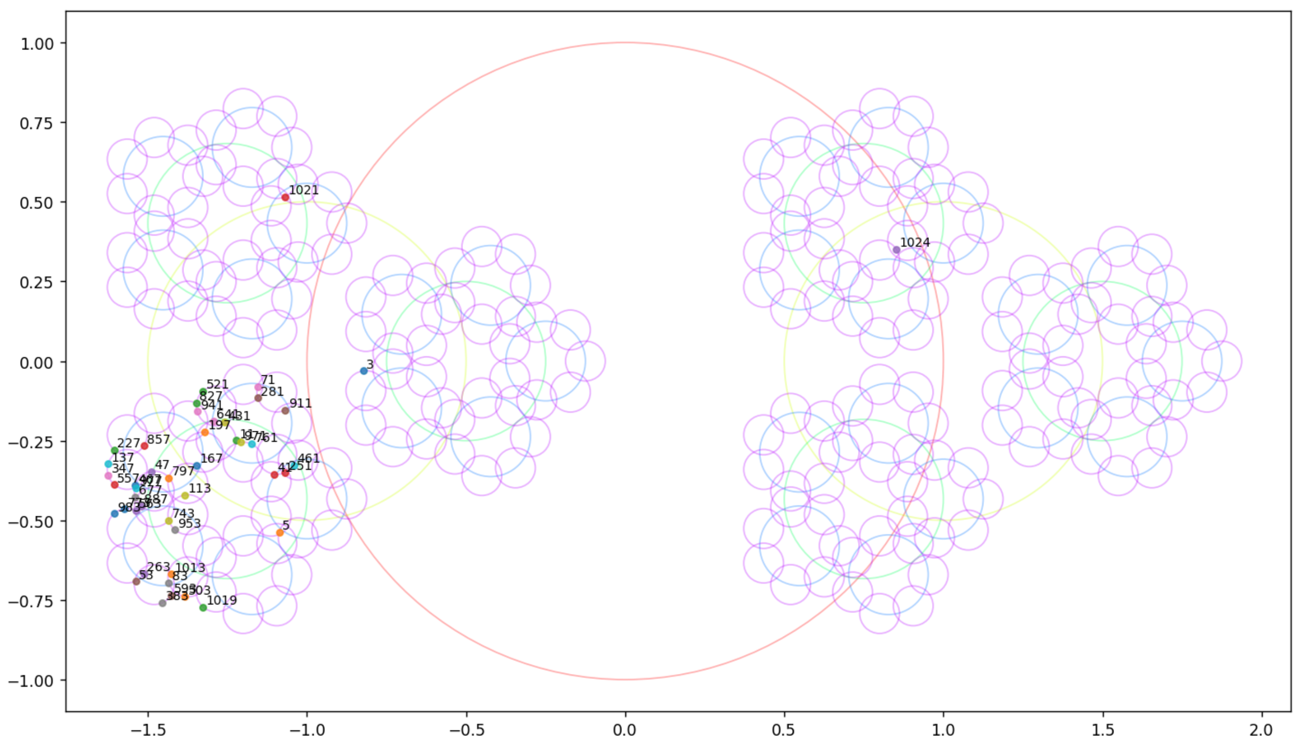


FIGURE 14 : décomposants de Goldbach de $n = 1024$ avec $\mathscr{B} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

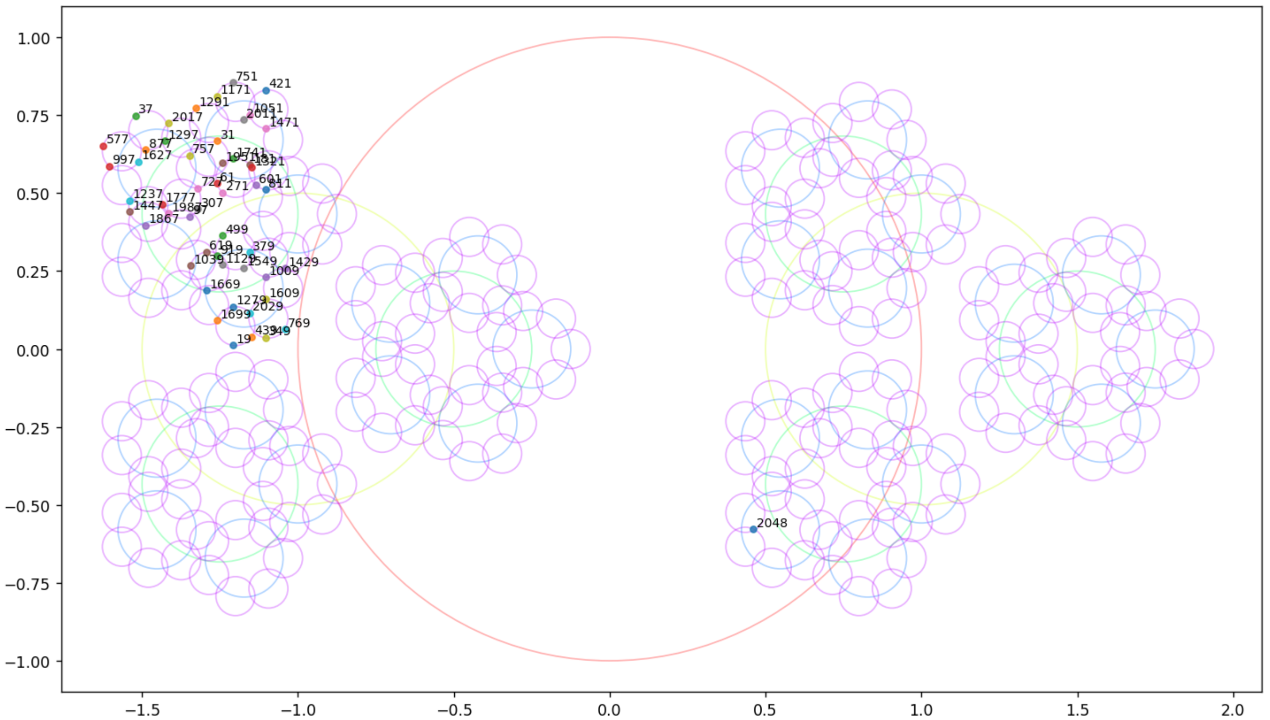


Figure 15 : décomposants de Goldbach de $n = 2048$ avec $\mathscr{B} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

Annexe 1 : La représentation choisie initialement occasionnant des chevauchements de nombres, on lui préfèrera la représentation ci-dessous par des cercles internes tangents au cercle correspondant au nombre premier précédent[1].

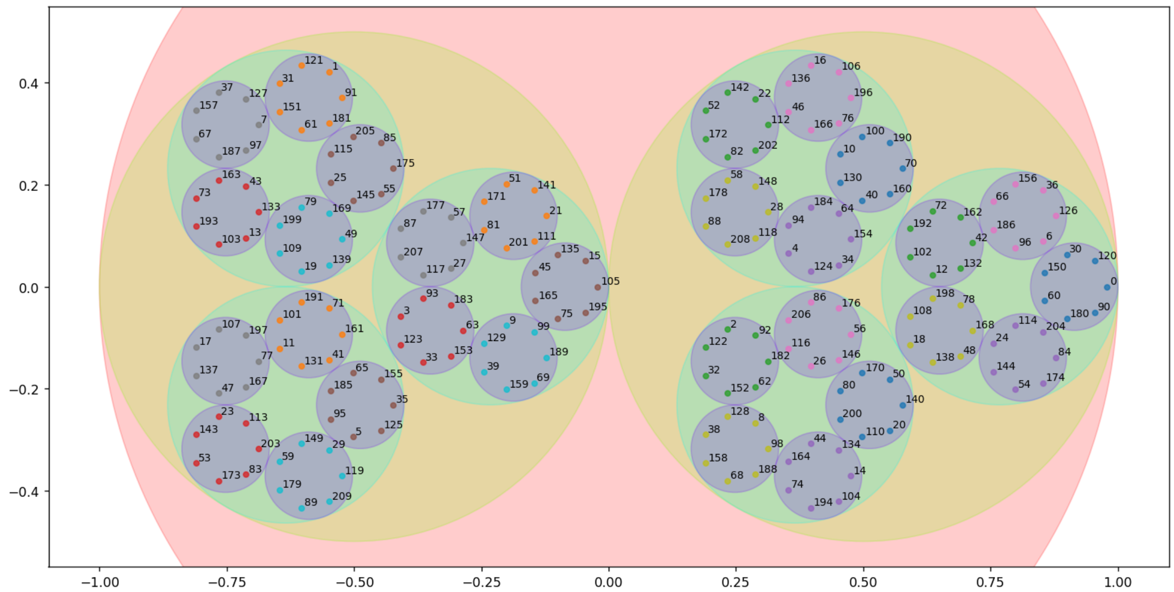
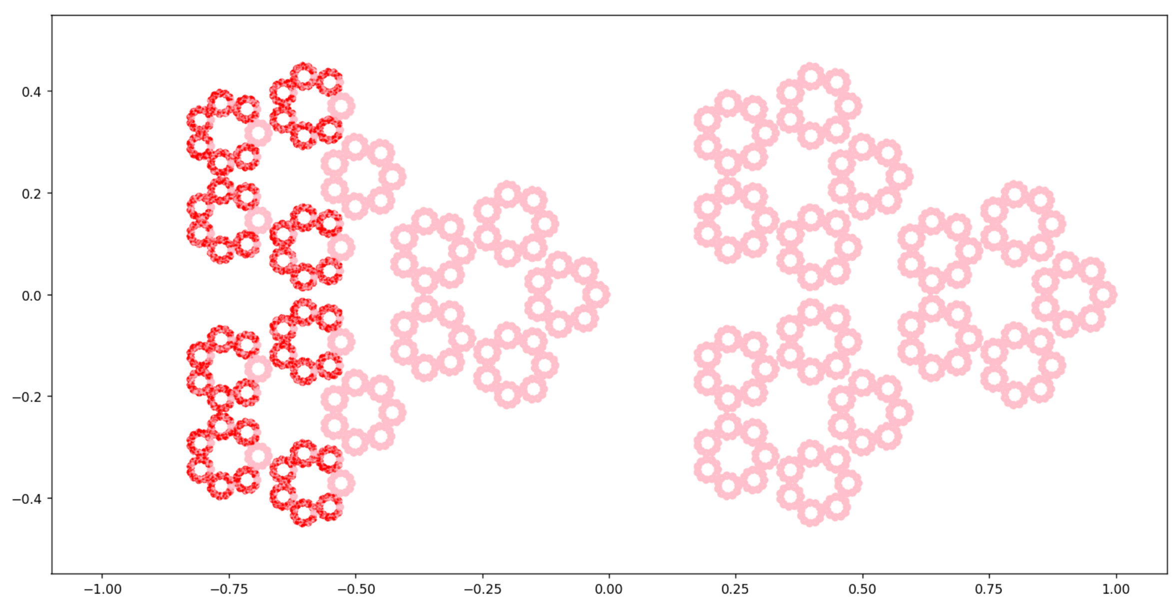


FIGURE 16 : représentation par cercles tangents internes au cercle correspondant au nombre premier précédent avec $\mathscr{B} = \{2, 3, 5, 7\}$

Annexe 2 : En se focalisant sur les nombres inférieurs à 510510 = 17#, (le symbole # dénote la primorielle, i.e. produit des nombres premiers successifs de 2 à 17), si l'on colorie en rouge les points correspondant aux nombres premiers et en rose ceux correspondant aux nombres composés, on voit les nombres premiers se concentrer sur les cercles à l'extrême gauche du graphique.



[1] Merci Jacques.

FIGURE 17 : positionnement des nombres premiers (en rouge) et des nombres composés (en rose) sur la représentation du *Snurpf* dans le plan complexe.

On voit clairement la symétrie des positionnement des nombres premiers de la forme $6x + 1$ et $6x + 5$. Additivement, les nombres pairs de la forme $6x + 2$ se décomposent en sommes de deux nombres premiers de la forme $6x + 1$, les nombres pairs de la forme $6x + 4$ se décomposent en sommes de deux nombres premiers de la forme $6x + 5$ tandis que les nombres pairs de la forme $6x$ se décomposent en sommes d'un nombre premier de la forme $6x + 1$ et d'un nombre premier de la forme $6x + 5$ (en deux fois plus de sommes donc).

Reste à démontrer pourquoi l'opérateur $x \mapsto n - x$ pour n un nombre pair supérieur à 4 ne peut pas envoyer tous les nombres premiers inférieurs à $n/2$ dans la zone Z' définie par le double criblage du paragraphe 2.3.