Des premiers comme s'il en pleuvait (Denise Vella-Chemla, 26.4.2019)

En essayant de placer les nombres entiers successifs non pas sur la droite linéaire et séquentielle traditionnelle mais sur un plan cartésien, selon la numérotation de Cantor, on a découvert des sortes de "gisements de premiers" qui apparaissent comme des travées de nombres de la couleur choisie pour distinguer les nombres premiers des autres nombres au sein du carré.

On a testé cette chaîne-ci :

$$3 \xrightarrow{+8} 11 \xrightarrow{+12} 23 \xrightarrow{+16} 39 \xrightarrow{+20} 59 \ldots$$

définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \Delta_0 = 8 \\ U_{n+1} = U_n + \Delta_n \\ \Delta_{n+1} = \Delta_n + 4 \end{cases}$$

Pour $n = 10000$, on trouve une proportion de 16.4 % de nombres premiers dans la séquence considérée alors que ce ratio est de 12.29 % pour l'ensemble des entiers de 1 à 10000 ; pour $n = 100000$, le ratio passe à 12.81 % alors qu'il est de 9.59 % dans la séquence complète des entiers jusqu'à 100000.

En décidant de se promener par légers zig-zags, on trouve également la séquence :

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+4} 7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+6} 17 \xrightarrow{+6} 23 \xrightarrow{+8} 31 \xrightarrow{+8} 39 \ldots$$

définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \Delta_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + \Delta_n \\ \Delta_{n+1} = \Delta_n + 2 \text{ si } n \text{ est pair, } \Delta_{n+1} = \Delta_n \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour $n = 10000$, on trouve une proportion de 20.97 % de nombres premiers dans la séquence considérée alors que ce ratio est de 12.29 % pour l'ensemble des entiers de 1 à 10000 ; pour $n = 100000$, le ratio passe à 15.99 % alors qu'il est de 9.59 % dans la séquence complète des entiers jusqu'à 100000.

En faisant une dernière étude visuelle du résultat du programme qui écrivait les nombres à la manière de Cantor, on trouve un ultime gisement ; il correspond à la séquence de nombres :

$$29 \xrightarrow{+2} 31 \xrightarrow{+6} 37 \xrightarrow{+10} 47 \xrightarrow{+14} 61 \xrightarrow{+18} 79 \xrightarrow{+22} 91 \xrightarrow{+26} 117 \ldots$$

définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 29 \\ \Delta_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + \Delta_n \\ \Delta_{n+1} = \Delta_n + 4 \end{cases}$$

On note dans le tableau ci-dessous la proportion de nombres premiers trouvés selon le nombre de nombres de la séquence définie ci-dessus testés, c'est assez impressionnant :

nb de nbs testés	dernier nombre testé	pourcentage de nombres premiers
50	5029	86.27 %
100	20029	75 %
200	80029	66.66 %
500	500029	54.5 %
800	1280029	50.81 %
1000	2000029	49.65 %
2019	8152751	44.75 %
5000	50000029	38.39 %
50000	5000000029	29.69 %
500000	500000000029	23.95 %

Il vaut mieux penser que le k−ième nombre de la la séquence qui semble prolifique s'obtient par l'opération matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 29 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2k & k^2 - k \\ 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On lit que la matrice 3×3 est une matrice de Toeplitz et on obtient une formule simple pour les nombres dont on teste la primalité : ils sont de la forme $2k^2 + 29$.