Esthétique des décompositions Goldbach de certains nombres pairs

Denise Vella

Septembre 2006

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

Je "cotoie" les décompositions Goldbach des nombres inférieurs à 100 depuis un an. J'ai essayé d'approcher la conjecture de multiples manières, toutes infructueuses. Si les exemples qui vont être présentés ici sont le résultat de coïncidences, leur multitude reste troublante. En tant qu'amatrice, je leur trouve même une certaine beauté, ce qui explique le titre de cette note. Dans la suite, on appellera "nombre premier décomposant $2a$" un nombre premier inférieur à a fournissant une décomposition Goldbach de $2a$ (c'est à dire un nombre premier p inférieur à a tel que $q = 2a - p$ est également premier).

2 Solutions d'équations polynômiales ?

L'article "le théorème de Noël" du livre de Ian Gordon [12] présente le domaine de la "géométrie des nombres", dont Minkowski est à l'origine.
On y trouve l'exemple suivant : dans $\mathbb{Z}_{17}$, l'équation polynômiale
$(x - 4y)(x + 4y) = 0$, équivalente à $x^2 - 16y^2 = 0$, est également équivalente à $x^2 + y^2 = 0$ puisque $-16 \equiv 1 \ (mod\ 17)$.
Ailleurs, on trouve un exemple similaire : dans $\mathbb{Z}_4$, le monôme $x + 2$ est un diviseur de x^2 car $(x + 2)^2 = x^2 \ (mod\ 4)$ dans la mesure où le module 4 a fait disparaître le $4x + 4$ du développement de $(x + 2)^2$.

On peut imaginer que les nombres premiers qui fournissent une décomposition Goldbach d'un nombre pair sont les solutions d'équations polynômiales particulières dans l'anneau $\mathbb{Z}_{2a}$ du nombre pair considéré. Le travail présenté ici consiste à rechercher quelles peuvent être ces équations polynômiales. On essaie alors de trouver des similitudes entre les cas correspondant aux nombres pairs qui admettent le même nombre de décompositions.

En annexe 1, on fournit toutes les décompositions Goldbach des nombres de 1 à 100, de 200 et de 500.

On étudiera d'abord 6 cas particulièrement "esthétiques" du fait de l'intuition géométrique que l'on peut en avoir. Ensuite, on présentera certains "calculs troublants".

3 Huit merveilleux cas géométriques

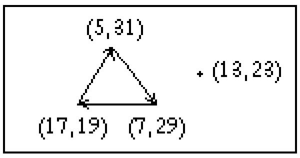
3.1 Nombre pair 24 : 3 décompositions Goldbach

24 possède les trois décompositions $5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$[1].
5, 7, 11, 13, 17 et 19 sont tous racines de l'unité et $5 * 7 * 11 = 1$. Ce qui est merveilleux, c'est que les trois nombres 5, 7 et 11 se comportent un peu comme les trois sommets d'un triangle, le produit de deux sommets étant toujours égal au troisième sommet :

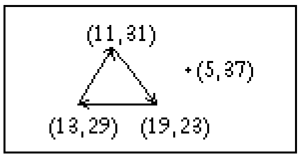
$$\begin{gathered}5 * 7 \equiv 11 \ (mod\, 24)\\ 5 * 11 \equiv 7 \ (mod\, 24)\\ 7 * 11 \equiv 5 \ (mod\, 24)\end{gathered}$$

3.2 Nombres pairs 36 ou 42 : 4 décompositions Goldbach

Pour 36 ou 42, les solutions sont comme disposées aux 4 sommets de tétraèdres auxquels on ferait subir des rotations de $2\Pi/3$ selon un axe passant par l'un des sommets du tétraèdre. On a représenté cela sur les deux schémas ci-après (la base du tétraèdre est représentée par un triangle tandis que le sommet "selon" lequel s'effectue la rotation est le point extérieur au triangle).



Cas36 à 4 décompositions G.



Cas 42 à 4 décompositions G.

Pour 42 par exemple,

$$\begin{gathered}5 * 11 \equiv 13 \ (mod\, 42)\\ 5 * 13 \equiv 23 \ (mod\, 42)\\ 5 * 23 \equiv 31 \ (mod\, 42)\\ 5 * 31 \equiv 29 \ (mod\, 42)\\ 5 * 29 \equiv 19 \ (mod\, 42)\\ 5 * 19 \equiv 11 \ (mod\, 42)\end{gathered}$$

C'est dans l'article [2] qu'on a trouvé qu'il s'agit de la permutation du groupe $A4$ des permutations paires sur 4 éléments, qui conserve le tétraèdre régulier a, b, c, d, et qui consiste en une rotation d'angle $2\Pi/3$ autour de l'axe du tétraèdre

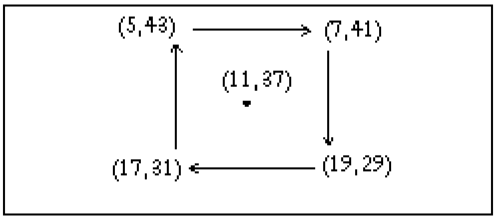
[1]Les 6 cas pour lesquels on a trouvé des configurations "esthétiques" des solutions sont systématiquement les *plus petits* nombres pairs (non compris les doubles de nombres premiers) qui ont 3, 4, 6 ou 7 décompositions.

passant par d. La permutation des trois sommets du triangle, alors que le quatrième sommet reste fixe se note :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$$

3.3 Nombre pair 48 : 5 décompositions Goldbach

On est en présence d'une pyramide à base carrée. C'est la solution $11 + 37$ qui est sur l'axe de rotation d'angle $2\Pi/4$.



Cas 48 à 3 décompositions G.

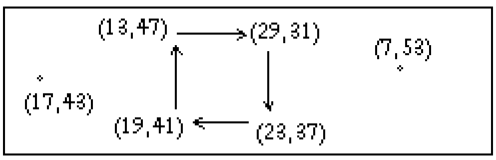
$$\begin{array}{l} 11 * 5 \equiv 7 \ (mod\ 48) \\ 11 * 7 \equiv 29 \ (mod\ 48) \\ 11 * 19 \equiv 17 \ (mod\ 48) \\ 11 * 17 \equiv 43 \ (mod\ 48) \end{array}$$

3.4 Nombres pairs 60 et 66 : 6 décompositions Goldbach

Pour 60 ($= 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31$), on est en présence d'un octaèdre.

$$\begin{array}{l} 7 * 13 * 17 * 23 \equiv 1 \ (mod\ 60) \\ 19^2 \equiv 1 \ (mod\ 60) \\ 29^2 \equiv 1 \ (mod\ 60) \end{array}$$

Cette fois-ci, on peut voir quatre solutions disposées en carré (la face "interne" de l'octaèdre), la cinquième et la sixième étant extérieures au carré et "amenant par la multiplication" un sommet sur le suivant, selon le schéma ci-après :



Cas 60 à 6 décompositions G.

L'un des sommets extérieurs fait tourner le carré dans un sens, tandis que l'autre sommet extérieur le fait tourner dans l'autre sens.

La permutation des quatre sommets en carré, alors que le cinquième sommet reste fixe se note

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ d & a & b & c & e & f \end{pmatrix}$$

dans un sens et

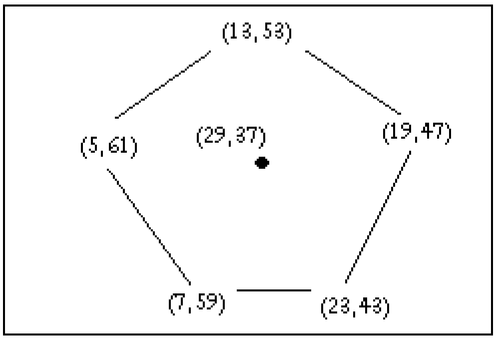
$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & d & a & e & f \end{pmatrix}$$

dans l'autre sens.

$$\begin{aligned} &7 * 13 \equiv 31 \ (mod\ 60) \\ &7 * 31 \equiv 37 \ (mod\ 60) \\ &7 * 37 \equiv 19 \ (mod\ 60) \\ &7 * 19 \equiv 13 \ (mod\ 60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &17 * 13 \equiv 41 \ (mod\ 60) \\ &17 * 19 \equiv 23 \ (mod\ 60) \\ &17 * 23 \equiv 31 \ (mod\ 60) \\ &17 * 29 \equiv 13 \ (mod\ 60) \end{aligned}$$

Quant au nombre pair 66, on a une sorte de pyramide à base pentagonale et c'est la solution 29+37 qui appartient à l'axe de rotation de la pyramide qui subit une rotation de $2\Pi/5$.



Cas 66 à 6 décompositions G.

La permutation des cinq sommets du pentagone, alors que le sixième sommet reste fixe se note

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & a & b & c & d & f \end{pmatrix}$$

Les congruences correspondant à cette permutation sont :

$$\begin{aligned} &29 * 5 \equiv 13 \ (mod\ 66) \\ &29 * 13 \equiv 19 \ (mod\ 66) \\ &29 * 19 \equiv 23 \ (mod\ 66) \\ &29 * 23 \equiv 7 \ (mod\ 66) \\ &29 * 7 \equiv 5 \ (mod\ 66) \end{aligned}$$

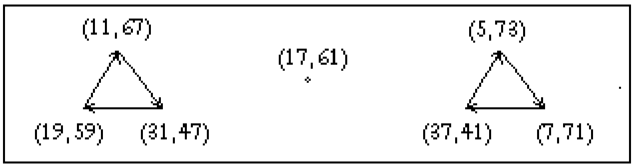
3.5 Nombres pairs 78 et 96 : 7 décompositions Goldbach

Ici, la configuration géométrique est connue sous le nom de “bipyramide” (on préfèrera noeud papillon rotatif !)

Pour 78 (= 5+73 = 7+71 = 11+67 = 17+61 = 19+59 = 31+47 = 37+41),

$$5 * 7 * 11 * 19 * 31 * 37 \equiv 1 \ (mod\ 78)$$
$$17^6 \equiv 1 \ (mod\ 78)$$

C’est encore une “belle” configuration : 5 est inverse de 47 (et donc 31 de 73), d’une part, et d’autre part, 7 est inverse de 67 (et complémentairement, 11 de 71). 17 est comme extérieur à deux triangles, sur les sommets desquels il opère une rotation. Expliquons cela sur le petit dessin suivant :



Cas 78 à 7 décompositions Goldbach

La permutation des deux triangles, alors que le septième sommet reste fixe se note :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ c & a & b & d & g & e & f \end{pmatrix}$$

L’action de 17 sur le premier triangle correspond aux calculs modulaires suivants :

$$17 * 11 \equiv 31 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 31 \equiv 59 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 59 \equiv 67 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 67 \equiv 47 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 47 \equiv 19 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 19 \equiv 11 \ (mod\ 78)$$

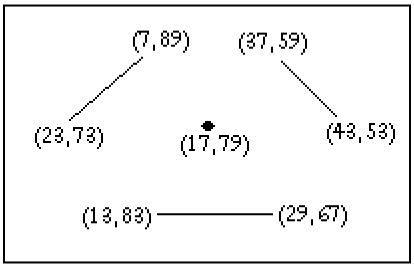
L’action de 17 sur le deuxième triangle correspond aux calculs modulaires suivants :

$$17 * 5 \equiv 7 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 7 \equiv 41 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 41 \equiv 73 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 73 \equiv 71 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 71 \equiv 37 \ (mod\ 78)$$
$$17 * 37 \equiv 5 \ (mod\ 78)$$

Enfin, pour le nombre pair 96 (= 7 + 89 = 13 + 83 = 17 + 79 = 23 + 73 = 29 + 67 = 37 + 59 = 43 + 53),

$$7 * 37 * 43 \equiv 1 \ (mod\ 96)$$
$$13^8 \equiv 1 \ (mod\ 96)$$
$$17^2 \equiv 1 \ (mod\ 96)$$
$$23^4 \equiv 1 \ (mod\ 96)$$
$$29^8 \equiv 1 \ (mod\ 96)$$

Ici, au lieu d'avoir deux triangles et un point au milieu, on a trois doublons et un point au milieu :



Cas 96 à 7 décompositions G.

La permutation des trois doublons du triangle, alors que le septième sommet reste fixe se note :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ b & a & d & c & f & e & g \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 17 * 7 \equiv 23 \ (mod\ 96) \\ 17 * 23 \equiv 7 \ (mod\ 96) \\ 17 * 37 \equiv 53 \ (mod\ 96) \\ 17 * 43 \equiv 59 \ (mod\ 96) \\ 17 * 13 \equiv 29 \ (mod\ 96) \\ 17 * 29 \equiv 13 \ (mod\ 96) \end{array}$$

4 Polynômes symétriques

On appelle *polynôme symétrique* un polynôme invariant par permutation de ses racines. Dans la suite, on appellera σ_1 la somme des racines, σ_2 la somme de tous les produits 2 à 2 des racines, ... σ_i la somme de tous les produits de i racines. Voici ce que l'on a découvert en effectuant toutes sortes de calculs avec les nombres premiers permettant de trouver des décompositions Goldbach d'un nombre pair.
Prenons trois des nombres premiers permettant de trouver les trois décompositions Goldbach de 24, qui sont 5, 7 et 11. Développons le polynôme à une inconnue qui fait intervenir les trois solutions Goldbach.

$$\begin{aligned} (x-5)(x-7)(x-11) \quad &= x^3 - 23x^2 + 167x - 385 \\ &= x^3 + x^2 - x - 1 \\ &= (x+1)^2(x-1) \end{aligned}$$

Ce polynôme s'annule si x vaut 1 ou -1. Si au lieu d'une indéterminée, on écrit le polynôme à trois indéterminées.

$$(x-5)(y-7)(z-11) \quad = xyz - 5yz - 7xz - 11xy + 55y + 77x + 35z - 385$$

Il s'annule si $x = y = z = 1$.

De la même façon, pour le nombre 30 dont deux solutions sont 7 et 11,

$$\begin{aligned}(x-7)(x-11) &= xy - 7y - 11x + 77 \\ &\equiv xy - 7y - 11x + 17 \ (mod\, 30)\end{aligned}$$

Si $x = y = 1$, le polynôme s'annule.

De la même façon, pour le nombre 36 dont les solutions sont 5, 7, 13 et 17,

$$\begin{cases} \sigma_1 = 42 \\ \sigma_2 = 616 \\ \sigma_3 = 3702 \\ \sigma_4 = 7735 \end{cases}$$

La somme de ces nombres est -1 (mod 36). Ce qui est amusant, c'est que $\sigma_4 - \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_1$ est aussi congru à -1.

De la même façon, pour le nombre 40 dont les solutions sont 3, 11 et 17,

$$\begin{cases} \sigma_1 = 31 \\ \sigma_2 = 271 \\ \sigma_3 = 561 \end{cases}$$

$$31 - 271 + 561 = 1 \ (mod\, 40).$$

Pour le cas 42, les racines dont le produit vaut 1 sont $5, 11, 13$ et 23. Le calcul des fonctions symétriques élémentaires donne :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 52 \\ \sigma_2 = 930 \\ \sigma_3 = 6764 \\ \sigma_4 = 16445 \end{cases}$$

La somme de tous ces nombres est congrue à -1 (modulo 42).

Pour le cas 48, les racines dont le produit est 1 sont $5, 7$ et 11. Le calcul des fonctions symétriques élémentaires donne :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 23 \\ \sigma_2 = 167 \\ \sigma_3 = 385 \end{cases}$$

La somme de tous ces nombres est congrue e à -1 (modulo 48).

Pour le cas 50, les racines dont le produit vaut 1 sont $3, 7, 13$ et 19. Le calcul des fonctions symétriques élémentaires donne :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 42 \\ \sigma_2 = 588 \\ \sigma_3 = 3142 \\ \sigma_4 = 5187 \end{cases}$$

Or, on n'a pas directement la congruence à l'unité. Si on veut l'obtenir, il faut remplacer σ_1 par $16 = 3+7-13+19$ et faire alors le calcul $16+588-3142+587$ et on trouve une congruence à -1 (modulo 50).

Pour le cas 52, les racines dont le produit vaut 1 sont $5, 11$ et 23. Le calcul des fonctions symétriques élémentaires donne :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 39 \\ \sigma_2 = 423 \\ \sigma_3 = 1265 \end{cases}$$

La somme de tous ces nombres n'est pas égale à 1. Si on veut obtenir la congruence à l'unité, il faut remplacer σ_1 par 29 en affectant la racine 5, et elle seule, du signe $-$.

Pour le cas 64, les racines dont le produit vaut 1 sont $5, 11, 17, 23$. Le calcul des fonctions symétriques élémentaires donne :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 56 \\ \sigma_2 = 1086 \\ \sigma_3 = 8456 \\ \sigma_4 = 21505 \end{cases}$$

La somme de tous ces nombres est égale à -1 (modulo 64).

Pour le cas 66, les racines dont le produit vaut 1 sont $5, 13, 19, 23, 29$. Le calcul des fonctions symétriques élémentaires donne :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 89 \\ \sigma_2 = 2998 \\ \sigma_3 = 47078 \\ \sigma_4 = 335689 \\ \sigma_5 = 823745 \end{cases}$$

$\sigma_5 - \sigma_4 + \sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_1$ vaut 1 (modulo 66).

Pour le cas 72, les racines dont le produit vaut -1 (modulo 72) sont $5, 11, 19, 29, 31$. Le calcul des fonctions symétriques élémentaires donne :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 95 \\ \sigma_2 = 3358 \\ \sigma_3 = 54050 \\ \sigma_4 = 385441 \\ \sigma_5 = 939455 \end{cases}$$

Le calcul de $_5 - \sigma_4 + \sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_1$ est congru à 1 (modulo 72).

Ces multiples exemples nous confortent dans l'idée qu'il faut creuser du côté des polynômes symétriques.

5 Derniers émerveillements

On travaille souvent sur le cas 98 car il n'a que 3 décompositions sur 19, 31 et 37. On se rend compte dans un premier temps du fait que si l'on ajoute les deux premières racines 19 et 31 ensemble ainsi qu'à leurs carrés respectifs, on obtient 1372 qui est divisible par 98. La troisième racine quant à elle a son carré qui est très proche de 1372 (1369). On n'a pas un traitement "équitable" des trois racines puisqu'on a d'abord trouvé une relation entre deux d'entre elles seulement, puis on a trouvé une propriété liant la troisième aux deux premières.

C'est insatisfaisant, on poursuit les calculs. Ce sera la somme des puissances 4èmes des racines ajoutée à la somme des carrés des racines qui sera "quasiment" divisible par 98 ($19^4+31^4+37^4+19^2+31^2+37^2 = 2930694$ tandis que $29905 \times 98 = 2930690$).

On essaye ainsi de trouver des polynômes symétriques qui relient *toutes* les solutions ensemble. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Nombre pair 2a	*Nombres premiers décomposants*	*polynôme divisible(ou"presque") par* 2a
6	3	$\Sigma x + \Sigma x^2$
8	3	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3 + \Sigma x^4$
10	$3, 5$	$\Sigma x + \Sigma x^3$
12	5	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3 + \Sigma x^4$
14	$3, 7$	$\Sigma x + \Sigma x^4$
16	$3, 5$	$\Sigma x + \Sigma x^3$
18	$5, 7$	Σx^3
20	$3, 7$	$\Sigma x + \Sigma x^3$
22	$3, 5, 11$	Σx^2
24	$5, 7, 11$	$\Sigma x + \Sigma x^2$
26	$3, 7, 13$	Σx^4
28	$5, 11$	Σx^3
30	$7, 11, 13$	Σx^3
32	$3, 13$	$\Sigma x + \Sigma x^3$
34	$3, 5, 11, 17$	$\Sigma x^3 + \Sigma x^4$
36	$5, 7, 13, 17$	$\Sigma x^3 + \Sigma x^4$
38	$7, 19$	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3$
40	$3, 11, 17$	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3$
42	$5, 11, 13, 19$	Σx^2
44	$3, 7, 13$	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3$
46	$3, 5, 17, 23$	$\Sigma x^2 + \Sigma x^4$
48	$5, 7, 11, 17, 19$	$\Sigma x + \Sigma x^3 + \Sigma x^4$
50	$3, 7, 13, 19$	$\Sigma x^2 + \Sigma x^4$
52	$5, 11, 23$	Σx^2
54	$7, 11, 13, 17, 23$	Σx^3
56	$3, 13, 19$	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3 + \Sigma x^4$
58	$5, 11, 17, 29$	Σx^2
60	$7, 13, 17, 19, 23, 29$	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3 + \Sigma x^4$
62	$3, 19, 31$	$\Sigma x^2 + \Sigma x^3$
64	$3, 5, 11, 17, 23$	Σx^3
66	$5, 7, 13, 19, 23, 29$	$\Sigma x + \Sigma x^4$
68	$7, 31$	$\Sigma x^2 + \Sigma x^3$
70	$3, 11, 17, 23, 29$	$\Sigma x^3 + \Sigma x^4$
72	$5, 11, 13, 19, 29, 31$	$\Sigma x + \Sigma x^3$
74	$3, 7, 13, 31, 37$	Σx^4
76	$3, 5, 17, 23, 29$	Σx
78	$5, 7, 11, 17, 19, 31, 37$	$\Sigma x^2 + \Sigma x^3$
80	$7, 13, 19, 37$	$\Sigma x + \Sigma x^4$
82	$3, 11, 23, 29, 41$	$\Sigma x^3 + \Sigma x^4$

Nombre pair 2a	*Nombres premiers décomposants*	*polynôme divisible*(*ou*"*presque*") *par* 2a
84	$5, 11, 13, 17, 23, 31, 37, 41$	Σx^3
86	$3, 7, 13, 19, 43$	Σx
88	$5, 17, 29, 41$	$\Sigma x^3 + \Sigma x^4$
90	$7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43$	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3$
92	$3, 13, 19, 31$	$\Sigma x + \Sigma x^2$
94	$5, 11, 23, 41, 47$	$\Sigma x + \Sigma x^3$
96	$7, 13, 17, 23, 29, 37, 43$	$\Sigma x + \Sigma x^3$
98	$19, 31, 37$	$\Sigma x^2 + \Sigma x^4$
100	$3, 11, 17, 29, 41, 47$	$\Sigma x + \Sigma x^2 + \Sigma x^3$
128	$19, 31, 61$	$\Sigma x^2 + \Sigma x^3$

6 Conclusion

Tous ces résultats sont étranges, même si rien de systématique n'a été trouvé. De plus, Abel a prouvé l'impossibilité de résoudre l'équation générale de degré supérieur à 5 par radicaux. Il est vrai qu'ici, à aucun moment, il n'a été question d'équation générale. Enfin, quand on est seulement amatrice, les cours d'algèbre, de théorie des groupes, de théorie des anneaux sont totalement hermétiques, même si on aimerait beaucoup avoir une explication. A feuilleter ces cours et ces ouvrages, on prend la pleine mesure de notre incompréhension. Finissons cependant humoristiquement avec cette citation de H.Poincaré in "La Science et l'Hypothèse" : *"une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierre n'est une maison."*.

Annexe 1 : Décompositions Goldbach des nombres pairs de 6 à 100, de 200 et de 500

6	$= 3+3$						
8	$= 3+5$						
10	$= 3+7$	$= 5+5$					
12	$= 5+7$						
14	$= 3+11$	$= 7+7$					
16	$= 3+13$	$= 5+11$					
18	$= 5+13$	$= 7+11$					
20	$= 3+17$	$= 7+13$					
22	$= 3+19$	$= 5+17$	$= 11+11$				
24	$= 5+19$	$= 7+17$	$= 11+13$				
26	$= 3+23$	$= 7+19$	$= 13+13$				
28	$= 5+23$	$= 11+17$					
30	$= 7+23$	$= 11+19$	$= 13+17$				
32	$= 3+29$	$= 13+19$					
34	$= 3+31$	$= 5+29$	$= 11+23$	$= 17+17$			
36	$= 5+31$	$= 7+29$	$= 13+23$	$= 17+19$			
38	$= 7+31$	$= 19+19$					
40	$= 3+37$	$= 11+29$	$= 17+23$				
42	$= 5+37$	$= 11+31$	$= 13+29$	$= 19+23$			
44	$= 3+41$	$= 7+37$	$= 13+31$				
46	$= 3+43$	$= 5+41$	$= 17+29$	$= 23+23$			
48	$= 5+43$	$= 7+41$	$= 11+37$	$= 17+31$	$= 19+29$		
50	$= 3+47$	$= 7+43$	$= 13+37$	$= 19+31$			
52	$= 5+47$	$= 11+41$	$= 23+29$				
54	$= 7+47$	$= 11+43$	$= 13+41$	$= 17+37$	$= 23+31$		
56	$= 3+53$	$= 13+43$	$= 19+37$				
58	$= 5+53$	$= 11+47$	$= 17+41$	$= 29+29$			
60	$= 7+53$	$= 13+47$	$= 17+43$	$= 19+41$	$= 23+37$	$= 29+31$	
62	$= 3+59$	$= 19+43$	$= 31+31$				
64	$= 3+61$	$= 5+59$	$= 11+53$	$= 17+47$	$= 23+41$		
66	$= 5+61$	$= 7+59$	$= 13+53$	$= 19+47$	$= 23+43$	$= 29+37$	
68	$= 7+61$	$= 31+37$					
70	$= 3+67$	$= 11+59$	$= 17+53$	$= 23+47$	$= 29+41$		
72	$= 5+67$	$= 11+61$	$= 13+59$	$= 19+53$	$= 29+43$	$= 31+41$	
74	$= 3+71$	$= 7+67$	$= 13+61$	$= 31+43$	$= 37+37$		
76	$= 3+73$	$= 5+71$	$= 17+59$	$= 23+53$	$= 29+47$		
78	$= 5+73$	$= 7+71$	$= 11+67$	$= 17+61$	$= 19+59$	$= 31+47$	$= 37+41$
80	$= 7+73$	$= 13+67$	$= 19+61$	$= 37+43$			
82	$= 3+79$	$= 11+71$	$= 23+59$	$= 29+53$	$= 41+41$		
84	$= 5+79$	$= 11+73$	$= 13+71$	$= 17+67$	$= 23+61$	$= 31+53$	$= 37+47$
	$= 41+43$						
86	$= 3+83$	$= 7+79$	$= 13+73$	$= 19+67$	$= 43+43$		
88	$= 5+83$	$= 17+71$	$= 29+59$	$= 41+47$			
90	$= 7+83$	$= 11+79$	$= 17+73$	$= 19+71$	$= 23+67$	$= 29+61$	$= 31+59$
	$= 37+53$	$= 43+47$					
92	$= 3+89$	$= 13+79$	$= 19+73$	$= 31+61$			
94	$= 5+89$	$= 11+83$	$= 23+71$	$= 41+53$	$= 47+47$		

96	$= 7 + 89$	$= 13 + 83$	$= 17 + 79$	$= 23 + 73$	$= 29 + 67$	$= 37 + 59$	$= 43 + 53$
98	$= 19 + 79$	$= 31 + 67$	$= 37 + 61$				
100	$= 3 + 97$	$= 11 + 89$	$= 17 + 83$	$= 29 + 71$	$= 41 + 59$	$= 47 + 53$	
200	$= 3 + 197$	$= 7 + 193$	$= 19 + 181$	$= 37 + 163$	$= 43 + 157$	$= 61 + 139$	
	$= 73 + 127$	$= 97 + 103$					
500	$= 13 + 487$	$= 37 + 463$	$= 43 + 457$	$= 61 + 439$	$= 67 + 433$	$= 79 + 421$	
	$= 103 + 397$	$127 + 373$	$= 151 + 349$	$= 163 + 337$	$= 193 + 307$	$= 223 + 277$	$= 229 + 271$

Annexe 2 : éléments épars

- Extrait d'un numéro spécial du magazine la Recherche "Nombres" n°278, juillet/août 1995.

  Quand les paramètres et les variables de l'équation sont des éléments d'un corps fini (remarque de l'auteur : mais cela n'est pas le cas pour $\mathbb{Z}_n$ lorsque n n'est pas premier car il existe des diviseurs de 0), on dit que l'équation définit une courbe sur le corps fini considéré. Ce sont des courbes *algébriques*, car leurs équations sont toujours données par des polynômes. En effet, sur un corps fini, *toutes* les fonctions sont des polynômes, ce qui simplifie grandement les calculs : il n'y a ni sinus ni cosinus (cela découle du fait que pour tout élément x d'un tel corps, on a $x^q = x$, où q est le nombre d'éléments du corps). L'un des résultats les plus importants concerne le nombre de points d'une courbe algébrique sur un corps fini, c'est-à-dire le nombre de solutions du système d'équations correspondant. Le mathématicien français André Weil a prouvé en 1940 que le nombre N de points de la courbe vérifie l'inégalité $N \leq q+1+2g\sqrt{q}$ (où q est le nombre d'éléments du corps considéré et g est le "genre" de la courbe, un nombre qui mesure sa complexité). La généralisation de cette inégalité a valu à Pierre Deligne la médaille Fields en 1978.

- Extrait d'une revue de vulgarisation mathématique

  L'équation $x^n - 1 = 0$ est équivalente à autant d'équations particulières que $n-1$ a de facteurs premiers et les degrés des équations sont les facteurs en question. Par exemple, l'équation $x^{13} - 1 = 0$ puisque $13 - 1 = 12 = 2 * 2 * 3$ est équivalente à deux équations du second degré et une équation du troisième degré.

  D'ailleurs, il n'y a que les équations d'un pareil degré p^ν qui soient à la fois primitives et solubles par radicaux.

- Extrait des oeuvres mathématiques d'Evariste Galois trouvées sur Gallica p.405

  Le principal avantage de la nouvelle théorie que nous venons d'exposer est de ramener les congruences à la propriété (si utile dans les équations ordinaires) d'admettre précisément autant de racines qu'il y a d'unités dans l'ordre de leur degré. La méthode pour avoir toutes ces racines sera très simple. Premièrement, on pourra toujours préparer la congruence donnée $Fx = 0$, et le moyen de le faire est évidemment le même que pour les équations ordinaires.

Ensuite, pour avoir les solutions entières, il suffira, ainsi que M. Libri paraît en avoir fait le premier la remarque, de chercher le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p-1} = 1$.

Si maintenant on veut avoir les solutions imaginaires du second degré, on cherchera le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p^{\nu}-1} = 1$.

C'est surtout dans la théorie des permutations, où l'on a sans cesse besoin de varier la forme des indices, que la considération des racines imaginaires des congruences paraît indispensable. Elle donne un moyen simple et facile de reconnaître dans quel cas une équation primitive est soluble par radicaux, comme je vais essayer d'en donner en deux mots une idée [...] Ainsi, pour chaque nombre de la forme p^{ν}, on pourra former un groupe de permutations tel que toute fonction des racines invariable par ces permutations devra admettre une valeur rationnelle quand l'équation de degré p^{ν} sera primitive et soluble par radicaux.

References

[1] J. Calais. *Eléments de théorie des anneaux : anneaux commutatifs*. Éd. Ellipses.

[2] A. Connes. *Symétries*. Éd. Magazine Pour la Science, n°292, février 2001.

[3] A. Doxiadis. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach*. Éd. Points Seuil 2003.

[4] L. Euler. *Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*. Éd. Commentationes arithmeticae 2, p.639, 1849.

[5] E. Galois. *Oeuvres mathématiques*. Éd. Gallica.

[6] M. Gardner. *L'univers ambidextre, les symétries de la nature*. Éd. Points Sciences.

[7] C.F. Gauss. *Recherches arithmétiques*. Éd. Jacques Gabay, 1989.

[8] . *Les équations algébriques*. Éd. Bibliothèque Tangente, HS n°22.

[9] P. Hoffman. *Erdös, l'homme qui n'aimait que les nombres*. Éd. Belin, 2000.

[10] C.A. Laisant. *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*. Éd. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.

[11] J. Sivardière. *Description de la symétrie : des groupes de symétrie aux structures fractales*. Éd. Grenoble Sciences, 2004.

[12] I. Stewart. *L'univers des nombres*. Éd. Belin Pour la Science, 2000.

[13] G. Tenenbaum, M. Mendès France. *Les nombres premiers*. Éd. Que sais-je ?, n°571, 1997.

[14] G. Verriest. *Leçons sur la théorie des équations selon Galois*. Éd. Jacques Gabay.

[15] H. Weil. *Symétrie et mathématiques modernes*. Éd. Champs Flammarion