Tourner en rond (Denise Vella-Chemla, 19.4.2016)

On essaie d'établir un lien entre nos petites idées et la fonction ζ de Riemann.

On a trouvé, mais sans en avoir encore lu la démonstration, que les nombres premiers annulent la fonction f définie par :

$$f(n) = \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} cos \frac{2\pi no}{b}$$

Cette nullité de f pour les nombres premiers provient du fait que la somme des diviseurs se calcule par une double somme presque identique à celle ci-dessus si ce n'est que b doit prendre pour la calculer des valeurs de 1 à n (plutôt que de 2 à $n-1$) et que la somme des sommes de cosinus correspondant aux valeurs 1 et n de b a pour valeur $1+n$ qui se trouve être exactement la somme des diviseurs de n lorsque n est un nombre premier.

La fonction zeta est définie par :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

En particulier, si r est la partie imaginaire d'un nombre complexe annulant zeta, on définit :

$$\begin{aligned} z(r) &= 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ri}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ri}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}(cos(r\ ln\ 2) + i\ sin(r\ ln\ 2))} + \frac{1}{\sqrt{3}(cos(r\ ln\ 3) + i\ sin(r\ ln\ 3))} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(r\ ln\ n) - i\ sin(r\ ln\ n)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

La fonction f s'annule pour les nombres premiers et la fonction z s'annule pour les parties imaginaires des zéros de ζ et il faudrait établir un passage de f à z.

Par programme, la formule ne converge pas assez vite vers 0 et on trouve sur la toile ici :
http://math.stackexchange.com/questions/490308/show-how-to-calculate-the-riemann-zeta-function-for-the-first-non-trivial-zero
qu'il faut utiliser plutôt la formule

$$\frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

pour "voir rapidement l'annulation".