

Orbites de force centrale sous différentes lois de puissance par A. Tan

Le sujet du mouvement planétaire a attiré les astronomes, les mathématiciens et les physiciens pendant des siècles. Il est bien connu que les orbites de force centrale sous la loi de gravitation en carré inverse sont des sections coniques. La procédure habituelle pour le montrer est d'éliminer le temps entre les équations du mouvement et de résoudre l'équation différentielle résultante. La procédure d'intégration est souvent compliquée lorsque la force attractive n'est pas de nature en carré inverse. Une méthode d'étude alternative consiste à prescrire l'orbite et à déterminer la loi de force. Par exemple, MacMillan [1] a montré que pour une orbite circulaire avec le centre attracteur sur la circonférence, la loi de force varie comme la puissance inverse cinquième de la distance au centre attracteur. D'autres orbites sont également données par MacMillan [1] comme exercices.

Dans cet article, nous avons l'intention de déterminer les lois de force pour la courbe générale en coordonnées polaires planes (r, θ)

$$r^n = a^n \cos n\theta, \quad (1)$$

où n est un nombre rationnel. En suivant la méthode de MacMillan [1], nous pouvons montrer que la loi de force pour cette courbe générale est

$$f(r) \propto \frac{1}{r^m}, \quad (2)$$

avec

$$m = 2n + 3, \quad (3)$$

L'équation (1) représente une famille de courbes, dont certaines sont listées dans le Tableau I. La puissance inverse correspondante de la variation de la force est également donnée dans le tableau, ainsi que des exemples de telles forces dans la nature. Les courbes orbitales sont tracées sur la Figure 1. Les nombres correspondent à la puissance inverse de la distance radiale.

La courbe avec $n = -2$ est une hyperbole rectangulaire dont les asymptotes sont les droites de pente ± 1 . La courbe avec $n = -\frac{3}{2}$ est aussi une hyperbole mais les asymptotes sont des droites faisant des angles de $\pm \frac{\pi}{3}$ avec l'axe des x . Elle correspond à l'attraction d'une distribution infinie surfacique de matière (ou de charge). $n = 1$ est le cas d'une distribution linéique infinie. Sur la Figure 1, cette ligne passe par l'origine et est perpendiculaire au plan du papier. $n = -\frac{1}{2}$ est un exemple de la loi en carré inverse, sur laquelle nous reviendrons plus tard. Le cas $n = 0$ appartient aux spirales, qui ont été traitées en détail par Lamb [2]. Les cas $n = 1$ et $n = 2$ peuvent être trouvés dans MacMillan [1] et aussi dans Lamb [2]. Ce dernier cas a un exemple physique dans les faibles

Partir d'une trajectoire et chercher la force qui peut la produire.

forces de Van der Waals entre deux atomes ou molécules neutres (cf. Born [3]).

La cardioïde présente un cas pour lequel la force varie comme la puissance inverse quatrième de la distance. On peut rappeler que, dans la Théorie de la Relativité Générale d'Einstein, le champ gravitationnel peut être pensé comme un carré inverse plus un petit terme en puissance inverse quatrième. Le terme en carré inverse, bien sûr, donne l'orbite newtonienne, tandis que le terme en puissance inverse quatrième est responsable de la précession du périhélie (cf. Eddington [4]). Géométriquement, nous pourrions penser à la précession du périhélie comme le résultat de la perturbation d'une faible cardioïde sur l'orbite elliptique dominante.

La liste des courbes n'est en aucun cas exhaustive. Il y a des courbes plus haut et plus bas dans l'échelle et aussi entre les entrées. Mais quelques observations intéressantes peuvent être faites à partir du Tableau I et de la Figure 1. Il est facile de voir que les courbes plus hautes que la parabole passent par le centre attracteur. Par conséquent, la formation de la famille des planètes et des satellites n'est pas possible, dans de tels mondes, seules les collisions le sont. Les courbes de l'autre côté de l'échelle sont de nature hyperbolique, avec des conséquences similaires (seule la diffusion est possible, dans de tels mondes).

Même dans le monde familier de la loi de force en carré inverse, toutes les trajectoires ne sont pas des orbites stables. Les trajectoires paraboliques et hyperboliques, par exemple, sont non bornées et représentent une diffusion. Seules les orbites elliptiques et le cas limite de l'orbite circulaire peuvent constituer des orbites planétaires stables. Le cas du carré inverse comprend une catégorie plus large de courbes, à l'exception du cas de la loi en cube inverse (cf. Lamb [2]). Pour l'instant, toute la famille des coniques peut être candidate à des trajectoires légitimes. Nous pouvons le montrer en prenant dans l'équation (1), l'équation polaire d'une conique

$$r(1 + e \cos \theta) = 2a. \quad (4)$$

Inverse de $r(m)$	ordre de la courbe(n)	courbe	exemple dans la Nature
-1	-2	hyperbole	
0	$-\frac{3}{2}$	hyperbole	distribution surface infinie
1	-1	droite	distribution droite infinie
2	$-\frac{1}{2}$	parabole	distribution point
3	0	spirales	dipôle électrique
4	$\frac{1}{2}$	cardioïde	quadripôle électrique
5	1	cercle	octopôle électrique
7	2	lemniscate	forces de van der Waal

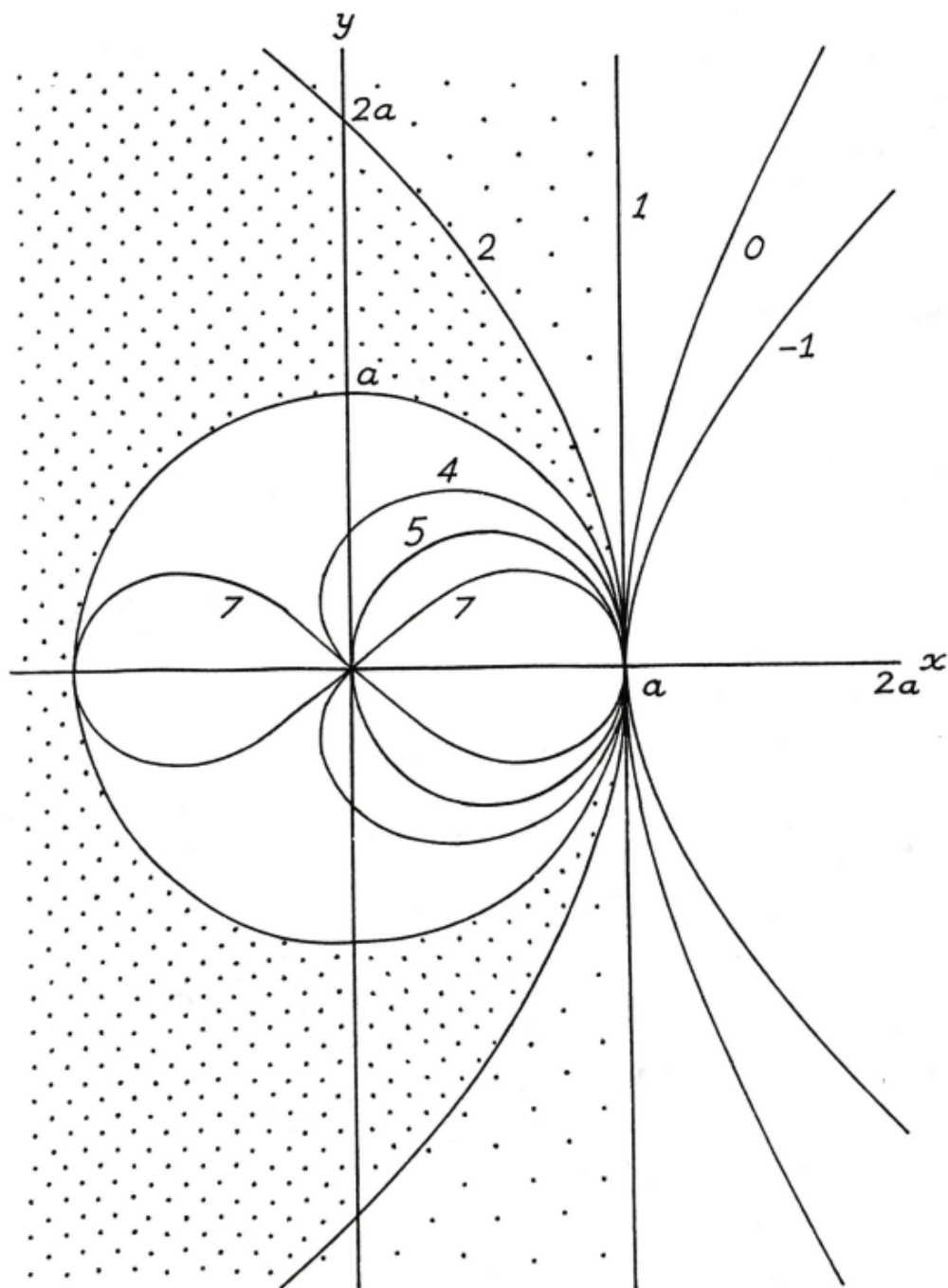


Fig1

Ici e est l'excentricité de la conique. Les zones pointillées de la Figure 1 montrent le domaine des trajectoires de force en carré inverse. La zone légèrement pointillée est l'endroit où se trouvent les trajectoires hyperboliques ($e > 1$). La zone densément pointillée, en revanche, est le domaine des orbites elliptiques ($e < 1$). C'est ici que les orbites planétaires stables peuvent être trouvées. Cela inclut le cercle ($e = 0$) mais exclut la parabole ($e = 1$).

Par conséquent, dans la plupart des cas, la formation d'un système solaire tel que nous le connais-

sons n'est pas réalisable. La vie semble possible seulement dans le cas du carré inverse. Et il n'est pas étonnant que mère nature ait choisi que la loi de force varie comme le carré inverse de la distance.

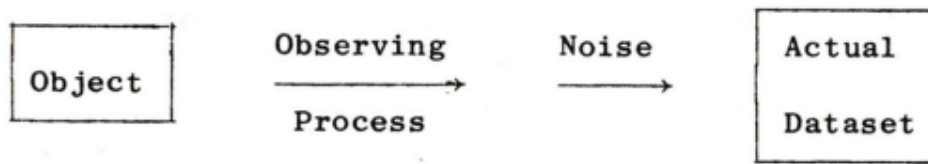
1. Références

1. W. D. MacMillan, *Statics and Dynamics of a Particle*, McGraw-Hill, New York (1927).
2. H. Lamb, *Dynamics*, Cambridge (1961).
3. M. Born, *Atomic Physics*, Blackie and Son, London (1969).
4. A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge (1963).

Traitement d'image par maximum d'entropie par J. Skilling

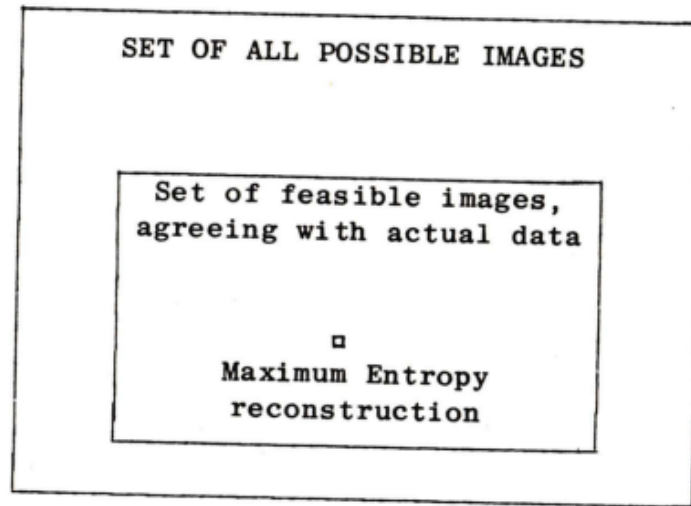
Résumé : la technique du maximum d'entropie extrait exactement la quantité d'information sur une image qui est obtainable de façon fiable à partir de données expérimentales ou observationnelles données. Elle donne, en ce sens, une image reconstruite optimale.

Habituellement, les données que l'on a d'un objet sont incomplètes et bruitées. Par exemple, une photographie floue ne parvient pas à reproduire une structure variant rapidement à l'intérieur d'un objet, et souffre également du bruit dans le processus d'enregistrement photographique. De même, en interférométrie, on ne mesure que certaines des composantes de Fourier de l'image, avec une précision finie.



De nombreuses techniques conventionnelles de reconstruction d'image tentent d'utiliser un filtre inverse, pour annuler directement le flou ou autre dégradation imposée par le processus d'observation. Invariablement, les filtres inverses sont des amplificateurs de bruit, souvent à un degré alarmant, et ce comportement doit être contrôlé explicitement.

Le maximum d'entropie adopte une approche plus profonde. D'abord, l'ensemble de toutes les images possibles est considéré : c'est un ensemble multidimensionnel avec un degré de liberté pour chaque pixel de l'image. (Un pixel est un "élément d'image". Une photographie peut être divisée en, disons, 256×256 éléments ; le degré de liberté est l'intensité de l'image dans ce pixel.) À chacune de ces images correspond un ensemble de données (simulé) que le système d'observation aurait produit (sans bruit) de cette image. Normalement, la plupart de ces ensembles de données simulés sont totalement incompatibles avec l'ensemble de données réel, mais certains seront en accord avec lui dans les limites des erreurs expérimentales. Ces derniers ensembles de données définissent les images réalisables. Habituellement, cet ensemble d'images réalisables est encore inadmissiblement grand.

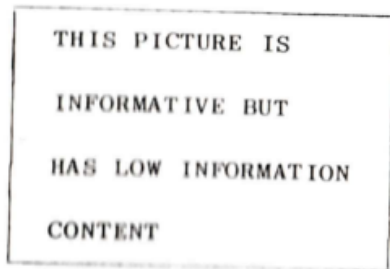


Le maximum d'entropie offre un critère général pour sélectionner une image réalisable particulière. Pour l'utiliser, on définit l'entropie de l'image comme :

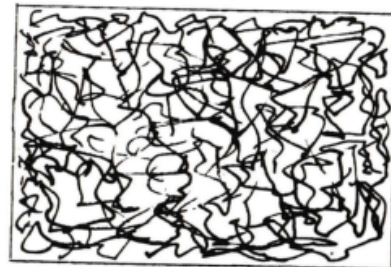
$$S = -\sum p_i \log p_i$$

($p_i = f_i/f$ = proportion du flux total dans le pixel i)

qui est juste (moins) le contenu en information. On sélectionne ensuite cette image réalisable particulière qui a l'entropie maximale (c'est-à-dire le contenu en information minimal). Notez qu'un contenu en information élevé n'implique pas qu'une image soit hautement informative :



Low information content



High information content

1) Il doit y avoir des preuves dans les données pour toutes les structures qui apparaissent dans l'image reconstruite, puisqu'aucune image moins structurée ne peut s'adapter aux données. Cela rend la reconstruction uniquement sûre.

2) Les intensités f dans les pixels de l'image sont automatiquement positives.

- 3) Le bruit est lissé à la fois dans les régions brillantes et faibles de l'image.
- 4) Avec de bonnes données, la quantité optimale fiable de super-résolution est atteinte.
- 5) Les artefacts de reconstruction tels que les lobes secondaires et les figures de diffraction sont supprimés.
- 6) Les valeurs aberrantes dans les données (peut-être dues à une erreur expérimentale) peuvent facilement être repérées et traitées de manière appropriée.
- 7) Ayant un contenu en information minimal, la reconstruction par maximum d'entropie est uniquement facile à comprendre, c'est-à-dire informative.

Il s'est également avéré possible d'utiliser la contrainte de positivité inhérente au maximum d'entropie pour recalibrer l'équipement d'observation après coup, et ainsi de "bootstrapper" tout le processus de reconstruction.

Un algorithme efficace et robuste pour le maximum d'entropie a été développé, et est disponible commercialement. Il consiste en environ 2000 lignes de Fortran standard, divisées en environ 70 sous-routines pour faciliter le transfert vers de petits ordinateurs, plus toutes les routines de convolution ou autres nécessaires pour simuler un système d'observation particulier. Puisque l'entropie est une fonction non linéaire, l'algorithme est nécessairement itératif, et 10 à 20 itérations sont normalement nécessaires. Cela signifie que le calcul du maximum d'entropie tourne 50 à 100 fois plus lentement que de simples filtres linéaires. L'algorithme a été installé sur diverses machines, avec des temps pour les déconvolutions optiques montrés ci-dessous.

Temps de calcul du maximum d'entropie (Temps écoulés pour 20 itérations)

Programmé sur	Temps réel	Normalisé à 512×512	Déconvolution
IBM 3033	256×256	8 min*	32 min*
PDP 11/60	512×512	60 h	60 h
PDP 11/34	512×512	50 h+	80 h
PDP 11/34 + AP120B	512×512	2 h	2 h
NORD 50/10 (combinaison)	1024×1024	20 h+	8 h
VAX 11/70	512×512	4 h+	5 h

* Temps CPU uniquement

+ Données de transformée de Fourier, pas de déconvolution.

L'algorithme a été appliqué à une grande variété de problèmes académiques et commerciaux. Les Figures 1 et 2 ci-dessous montrent des exemples de déconvolutions optiques à partir de données floues.

La Figure 2 montre comment le maximum d'entropie donne automatiquement un compromis optimal entre résolution et suppression du bruit : une résolution supplémentaire ne sera obtenue que si le rapport signal/bruit est suffisamment grand. Le logiciel est disponible pour les déconvolutions optiques à des résolutions allant jusqu'à 512×512 pixels. De telles déconvolutions ont également été appliquées à l'astronomie gamma, X et optique.

Des reconstructions similaires ont été appliquées en tomographie par émission de radionucléides. Là encore, le maximum d'entropie donne des résultats optimaux, même dans les cas difficiles d'angles de vue limités ou épars.

D'autres applications réussies ont été en interférométrie (à la fois à très longue base et à synthèse d'ouverture conventionnelle) à des résolutions allant jusqu'à 1024×1024 pixels.

[Là suivent des illustrations de quelques exemples.](#)

1. Construction de la photographie d'une plaque d'immatriculation de voiture (à gauche) Original flou (à droite) Reconstruction par maximum d'entropie

- (a) Photographie test de Susie.
- (b) Image dégradée hors mise au point ; faible rapport signal/bruit.
- (c) Reconstruction à partir de (b) ; elle est plus lisse que l'originale.
- (d) Image dégradée ; rapport signal/bruit élevé.
- (e) Reconstruction à partir de (d) ; elle est plus nette que l'originale.

Reconstruction par maximum d'entropie à partir de données de tomographie à rayons X prises avec un scanner cérébral EMI.

Exemple d'utilisation du maximum d'entropie en tomographie d'émission de plasma. Reconstruction simulée de 5 mégawatts de faisceau d'injection neutre pour le Joint European Torus, observé dans l'émission $H\alpha$ par 12 scanners transversaux.

Topos

1. Espaces et faisceaux. Soit X un espace topologique, c'est-à-dire un ensemble muni d'une structure qui nous donne une notion qui se comporte bien de continuité pour les fonctions définies sur X . En considérant (disons) les fonctions réelles continues sur X , nous pouvons souhaiter considérer non seulement les fonctions "globales" définies sur tout X , mais aussi les fonctions partielles définies sur un sous-ensemble ouvert - par exemple si X lui-même est la droite réelle, nous pouvons souhaiter considérer $1/x$ (défini sur $\mathbb{R} - \{0\}$) et $\log x$ (défini sur les réels positifs) ainsi que des fonctions globales comme x^2 et $\exp x$. La collection de toutes ces fonctions partielles, avec les "applications de restriction" qui réduisent une fonction donnée à un sous-ensemble ouvert de son domaine, ont été la motivation de la définition d'un *faisceau* sur l'espace X ; réciproquement, il existe un théorème de représentation (le théorème fondamental de la théorie des faisceaux) qui dit que tout faisceau sur X peut être considéré comme une algèbre de fonctions continues partiellement définies sur X (à valeurs dans un espace qui dépend du faisceau particulier considéré).

La notion de faisceau a été introduite vers 1945 par le topologue français Jean Leray, comme un outil pour unifier diverses idées alors en développement en topologie algébrique; par la suite, elle s'est révélée extrêmement utile en géométrie et en théorie des fonctions complexes également. (Pour une histoire détaillée de la théorie des faisceaux, avec de copieuses références, voir [2].) De notre point de vue, l'importance des faisceaux est qu'ils ont fourni la matrice à partir de laquelle la notion de topos est née.

Considérons la totalité de tous les faisceaux sur un espace donné X , avec toutes les applications entre eux. Cela forme une catégorie, dans laquelle est codée une grande partie de l'information topologique sur X ; bien que l'on perde certaines informations (on ne peut pas, par exemple, distinguer un espace à un point d'un espace indiscret de plus d'un point), il en reste assez pour développer les concepts et théorèmes les plus importants de la topologie purement en termes de ces catégories, plutôt que des espaces originaux. Ce point de vue a été popularisé pour la première fois par Alexander Grothendieck vers 1960; son motif était que le travail actuel en géométrie algébrique nécessitait l'étude d'objets qui étaient clairement de type faisceau, mais dont le "domaine de définition" était quelque chose de plus général qu'un espace. En concentrant l'attention sur la catégorie des faisceaux, ces nouveaux "espaces généralisés" pouvaient être accommodés dans la même axiomatisation que les espaces traditionnels, et le nom "topos" a été choisi comme une rétro-formation délibérée pour souligner le fait qu'une catégorie de faisceaux généralisés était considérée comme quelque chose de plus fondamental qu'un espace topologique.

Depuis les années 1960, beaucoup de travail a été fait sur le développement de la topologie en termes de topos plutôt que d'espaces; ce qui est peut-être surprenant, c'est que ce développement a payé des dividendes même dans la topologie traditionnelle, sous la forme de versions améliorées de vieux théorèmes (voir [3] pour un survol récent).

2. Théorèmes d'indépendance. Il y a une autre façon d'envisager les catégories de faisceaux, qui n'a jamais été qu'implicite dans le travail de Grothendieck, mais qui est devenue d'une importance primordiale dans la refondation de la théorie des topos réalisée par Bill Lawvere et Myles Tierney en 1969. Les faisceaux sont très semblables à des ensembles abstraits, en ce sens que nous pouvons effectuer sur eux un grand nombre des constructions standard de la théorie des ensembles, sans

sortir de la catégorie des faisceaux sur un espace de base fixé X . Ainsi, correspondant à la construction de l'ensemble des parties en théorie des ensembles, on peut construire “le faisceau de tous les sous-faisceaux” d'un faisceau donné (alors que, par exemple, la totalité de tous les sous-groupes d'un groupe donné ne forme pas naturellement un groupe). On peut donc considérer le topos des faisceaux sur X comme un univers d’“ensembles généralisés” qui ont intégré en eux la possibilité de variation sur le domaine donné X . (À titre d'exemple, le faisceau des fonctions réelles continues partielles, avec lequel nous avons commencé, s'avère n'être rien de plus que l’“ensemble des nombres réels”, construit par la méthode des coupures de Dedekind, au sein de cette “théorie des ensembles variant sur X ”.)

De ce point de vue, la théorie des topos devient une arme puissante dans la recherche de preuves d'indépendance en théorie des ensembles. Si nous souhaitons montrer qu'une assertion (l'axiome du choix, par exemple, ou l'hypothèse du continu) ne peut pas être prouvée à partir des axiomes usuels de la théorie des ensembles, nous pouvons essayer de construire un modèle pour les axiomes usuels dans lequel l'assertion donnée est fausse. Mais les modèles de la théorie des ensembles sont très difficiles à construire, en raison de la nature “rigide” des axiomes ; les premières preuves d'indépendance de ce type (par Paul Cohen en 1963) ont été un tour de force intellectuel, et bien que les techniques aient été grandement simplifiées et étendues depuis, elles ne sont toujours pas faciles. En revanche, de nouveaux exemples de topos sont très faciles à construire, en raison des puissantes techniques topologiques et catégoriques disponibles, et ils peuvent être utilisés pour donner des preuves d'indépendance qui sont beaucoup plus perspicaces que leurs homologues ensemblistes. (Un bon exemple est la preuve de Freyd [4] de l'indépendance de l'axiome du choix.)

3. Modèles génériques. Supposons que nous ayons une théorie mathématique (comme la théorie des groupes, ou des ensembles partiellement ordonnés, ou des corps) dont les axiomes ont été exprimés dans un langage formel approprié. Nous supposons que les axiomes sont “géométriques”, ce qui est un terme technique pour un certain type de condition sur leur complexité logique ; en fait, la grande majorité des théories habituellement étudiées par les mathématiciens peuvent être axiomatisées géométriquement. En général, une telle théorie aura beaucoup de modèles différents dans l'univers des ensembles ; et, en utilisant la structure interne de type ensembliste des topos, nous pouvons aussi étudier ses modèles dans n'importe quel topos.

Ce qui nous concerne ici est l'idée, qui a commencé à émerger dans le travail d'André Joyal et Gonzalo Reyes vers 1973, que la théorie elle-même peut être identifiée à un certain topos (parfois appelé le *topos classifiant* de la théorie) qui contient un modèle de la théorie qui est générique en ce sens que tout autre modèle (dans n'importe quel topos) est une “image continue” de celui-ci. Si nous considérons les topos comme des espaces généralisés, alors le topos classifiant est l’“espace de tous les modèles” de la théorie ; du point de vue alternatif qu'un topos est un univers d'ensembles, ce que nous avons fait est de prendre notre univers original et d'y “adjoindre librement” un modèle de la théorie (de la même manière qu'on adjoint librement un indéterminé t à un anneau R pour former l'anneau de polynômes $R[t]$).

Les énoncés faits à propos du modèle générique d'une théorie (et exprimés dans le fragment géométrique du langage formel) seront vrais précisément s'ils sont vrais dans tous les modèles de la théorie ; cela conduit à une formulation particulièrement simple du théorème de complétude de la

théorie classique des modèles. Mais nous pouvons aussi étudier les propriétés non géométriques du modèle générique, qui s'avèrent fréquemment plus intéressantes qu'on pourrait le penser ; le premier exemple en a été donné en 1975 par Anders Kock, lorsqu'il a utilisé des propriétés de l'anneau local générique pour développer une "géométrie projective universelle", une idée qui a finalement conduit à une approche "synthétique" radicalement simplifiée des fondements de la géométrie différentielle, récemment exposée dans [5]. Nous pouvons également construire des modèles génériques de théories qui n'ont aucun modèle dans notre univers original d'ensembles ; un exemple intéressant (dû à Joyal) est la théorie d'un recouvrement de l'intervalle unité $[0, 1]$ par des intervalles ouverts de mesure totale ≤ 1 , dont le topos classifiant donne un théorème d'indépendance qui affirme que le théorème de Heine-Borel n'a pas de preuve constructive.

4. Topos libres. Comme déjà indiqué, la construction de topos classifiants peut être vue comme l'adjonction libre de modèles de théories données à un univers d'ensembles donné. Mais la théorie des topos nous permet aussi de construire un univers d'ensembles qui est libre en un sens absolu, ou libre sous réserve de certains axiomes supplémentaires (c'est-à-dire des restrictions sur la logique interne). Les calculs dans de tels topos libres nous renseignent sur la théorie de la démonstration de la logique d'ordre supérieur ; c'est-à-dire que les assertions qui sont vraies dans les topos libres sont exactement celles qui sont prouvables dans un système formel approprié. La structure interne de ces topos libres est très compliquée ; mais il existe des techniques catégoriques (développées à l'origine, dans un contexte géométrique, par Michael Artin, et adaptées au contexte présent par Peter Freyd) qui nous permettent de donner des preuves "externes" simples des propriétés logiques internes, et donc des théorèmes de la théorie de la démonstration d'ordre supérieur. Voir [6] pour un compte rendu général de cette ligne de recherche.

5. Réalisabilité récursive. Une fonction récursive (des nombres naturels vers les nombres naturels, disons) est une fonction dont les valeurs pourraient être générées par un programme fini pour un ordinateur "idéalisé". Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de tels programmes, il est facile de voir que toutes les fonctions ne sont pas récursives. La théorie des fonctions récursives a sa propre logique (non classique), qui a été mise en évidence pour la première fois par Stephen Kleene ; l'idée de base est qu'une assertion (disons) de la forme "pour tout x , il existe y tel que $\phi(x, y)$ " est "récursivement réalisable" si sa vérité est attestée par une fonction récursive, c'est-à-dire s'il existe une fonction récursive f telle que $\phi(x, f(x))$ soit vraie pour tout x . Sans surprise, cette logique apparaît naturellement en informatique théorique ; et récemment Martin Hyland [7] a montré qu'elle est exactement la logique interne d'un certain topos, appelé le topos effectif. En fait, la construction de Hyland donne naissance à toute une classe d'exemples similaires de topos, qui pourraient bien s'avérer importants dans d'autres domaines également ; à ce jour, le travail sur ceux-ci en est encore à un stade très précoce, mais il y a quelques indications importantes de ce qui pourrait être possible dans [8].

Pour conclure, quelques suggestions de lectures complémentaires. [9] est un compte rendu raisonnablement élémentaire (lisible par un bon étudiant de troisième année) des définitions et théorèmes de base de la théorie des topos - mais l'éventail des exemples qu'il discute est relativement restreint. Pour des informations plus détaillées, la seule référence complète est [10] ; mais il faut être averti que ce livre est écrit pour le spécialiste, et n'est pas destiné à être une lecture facile.

Références

- [1] P.T. Johnstone, “Little Arrows”, *Eureka* 39 (1978), 23-28.
- [2] J.W. Gray, “Fragments of the history of sheaf theory”, *Springer Lecture Notes* 753 (1979), 1-79.
- [3] P.T. Johnstone, “The point of pointless topology”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 7 (1982), à paraître.
- [4] P.J. Freyd, “The axiom of choice”, *J. Pure and Applied Algebra* 19 (1980), 103-125.
- [5] A.J. Kock, “Synthetic Differential Geometry”, *L.M.S. Lecture Notes Series* no. 51 (1981).
- [6] J. Lambek and P.J. Scott, “Intuitionist type theory and the free topos”, *J. Pure and Applied Algebra* 19 (1980), 215-257.
- [7] J.M.E. Hyland, “The effective topos”, *Proceedings of the Brouwer Centenary Conference*, à paraître.
- [8] A.M. Pitts, “The theory of triposes”, thèse de doctorat de Cambridge (1982).
- [9] G.C. Wraith, “Lectures on elementary topoi”, *Springer Lecture Notes* 445 (1975), 114-206.
- [10] P.T. Johnstone, “Topos Theory”, *L.M.S. Mathematical Monographs* no. 10, Academic Press 1977.

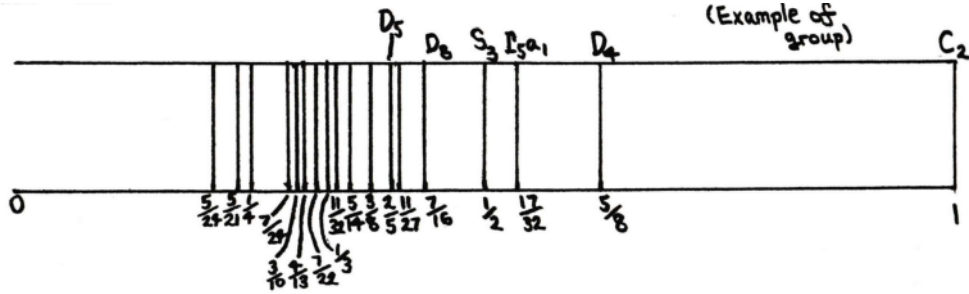
Groupes presque commutatifs

N. Boston

À quel point un groupe non abélien l'est-il ? Pour répondre à cette question, nous pourrions calculer la proportion des $\frac{1}{2}n(n+1)$ paires non ordonnées d'éléments d'un groupe G d'ordre n qui consistent en éléments qui commutent, c'est-à-dire $|\{\{x, y\} : x, y \in G, xy = yx\}| / \frac{1}{2}n(n+1)$. Comme le lecteur peut le vérifier, cela donne en fait $(h+1)/(n+1)$, où h est le nombre de classes de conjugaison de G .

Pour nos besoins, il sera commode de poser $a(G) = h/n$. En particulier, l'ensemble $S \subset [0, 1]$ de toutes ces valeurs est stable par multiplication, car si H et K ont respectivement h et k classes de conjugaison, alors $H \times K$ a hk , donc $a(H \times K) = a(H).a(K)$.

Le diagramme ci-dessous indique les éléments de S obtenus à partir de groupes d'ordre ≤ 32 :



Donc, que pouvons-nous dire de S et en particulier de ses éléments irréductibles (c'est-à-dire $x \in S$ tel que si $x = ab, a, b \in S$, alors soit $a = 1$ soit $b = 1$) ? Eh bien, il n'y a pas de factorisation unique, puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} \frac{2}{5}$: tous appartenant à S d'après le diagramme ci-dessus et tous irréductibles d'après le théorème suivant (qui montre que le plus grand élément réductible est $\left(\frac{5}{8}\right)^2$:

Théorème 1. Le plus grand élément de S inférieur à 1 est $\frac{5}{8}$.

Preuve. Soit G non abélien de centre $Z(G)$. Alors h est maximisé en ayant $Z(G)$ aussi grand que possible avec les classes de conjugaison restantes de $G/Z(G)$; cependant, $G/Z(G)$ ne peut pas être cyclique, car s'il l'était, alors G aurait un ensemble de générateurs dont chaque paire commuterait, donc serait abélien. Ainsi $|Z(G)|$ est au plus $\frac{n}{4}$, laissant $\frac{3n}{8}$ classes de conjugaison dans le cas optimal. Cela fait $h = \frac{5n}{8}$, atteint par exemple pour D_4 ou le groupe des quaternions d'ordre 8.

Le calcul d'autres éléments de S semble devenir de plus en plus compliqué. À titre d'indication des méthodes disponibles pour le lecteur intéressé, j'offre la contribution suivante à la théorie :

Théorème 2. Les éléments de S supérieurs à $\frac{1}{2}$ sont précisément

$$(2^{2n} + 1)/2^{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Preuve. D'après le théorème 1, nous pouvons restreindre notre attention à $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$.

On peut vérifier que le groupe G_n engendré par $x_1, \dots, x_{2n}, y$ soumis à $x_i^2 = y \neq 1$, $y^2 = 1$, $x_i x_j = y x_j x_i$ ($i \neq j$), a pour ordre 2^{2n+1} et pour nombre de classes $2^{2n} + 1$, donc $\lambda_n = (2^{2n} + 1)/2^{2n+1} \in S$.

Soit maintenant G un groupe d'ordre n avec un centre d'ordre m , a_i les caractères irréductibles de degré i , et avec $\lambda_s n - k$ classes de conjugaison ($k \geq 1$). Nous supposons (1) $0 < k \leq n(\lambda_s - \lambda_{s+1})$, de sorte qu'il suffit de montrer $k = n(\lambda_s - \lambda_{s+1})$.

D'après la théorie des caractères,

$$a_1 + 4a_2 + 9a_3 + \dots + r^2 a_r = n \quad (\text{supposer } a_r \neq 0), \quad (2)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r = \lambda_s n - k, \quad (3)$$

$$\frac{n}{m} \geq r^2. \quad (4)$$

En comptant les classes de conjugaison, $m + 2(\lambda_s n - k - m) \leq n$, d'où $k \geq \left(\lambda_s - \frac{1}{2}\right)n - \frac{m}{2}$ (5), donc par (1) $\left(\lambda_s - \frac{1}{2}\right)n - \frac{m}{2} \leq n(\lambda_s - \lambda_{s+1})$, $\frac{n}{m} \leq \frac{1}{2} / \left(\lambda_{s+1} - \frac{1}{2}\right) = 2^{2s+2}$ (6), donc par (4) $r \leq 2^{s+1}$.

Ensuite je montre $a_1 = \frac{n}{2}$ et j'en déduis que nous pouvons supposer que G est un 2-groupe.

En éliminant a_2 entre (2) et (3),

$$3a_1 = (4\lambda_s - 1)n - 4k + 5a_3 + \dots + (r^2 - 4)a_r \quad (5)$$

$$\geq (4\lambda_s - 1)n - 4n(\lambda_s - \lambda_{s+1}) = (4\lambda_{s+1} - 1)n, \quad (6)$$

$$\text{donc } a_1 \geq \frac{(2^{2s+1} + 1)n}{3 \cdot 2^{2s+1}} > \frac{n}{3}.$$

Mais $a_1 (= [G : G'])$ divise n , donc $= \frac{n}{2}$.

Maintenant, aucune classe de conjugaison ne peut avoir une taille supérieure à $|G'| = 2$, car si $g, x \in G$, alors $gxg^{-1} \in G'x$. Donc $[G : C_G(x)] = 1$ ou 2 , donc $x^2 \in Z(G) \forall x \in G$.

En particulier, tout élément d'ordre impair est dans $Z(G)$, donc $G/Z(G)$ est un 2-groupe donc nilpotent. Ainsi G est nilpotent, donc isomorphe à un produit direct de ses sous-groupes de Sylow, disons $P_1 \times \dots \times P_t$. Maintenant $a(G)$ irréductible implique $a(G) = a(P_i)$ pour un certain i , donc nous pouvons supposer que G est un p -groupe et $|G'| = 2$ assure $p = 2$.

Je souhaite montrer $r = 2^{s+1}$. Supposons le contraire.

Alors en posant $b_i = a_{2i}$, en notant $b_o = \frac{n}{2}$, (2) et (3) deviennent :

$$4b_1 + 16b_2 + \dots + 2^{2s}b_s = \frac{n}{2} \quad (7)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_s = (\lambda_s - \frac{1}{2})n - k \quad (\text{où } b_s \text{ pourrait être } 0). \quad (8)$$

En éliminant b_s ,

$$0 \leq (2^{2s} - 4)b_1 + \dots + (2^{2s} - 2^{2s-2})b_{s-1} = (2^{2s}\lambda_s - 2^{2s-1} - \frac{1}{2})n - 2^{2s}k = -2^{2s}k < 0.$$

Contradiction, donc $r = 2^{s+1}$, d'où par (4) et (6) $\frac{n}{m} = 2^{2s+2}$, et par (5) et (1) $k = n(\lambda_s - \lambda_{s+1})$, comme souhaité.

Ce théorème (à l'origine la conjecture de Bristow après l'interprétation par un ami des données pour les groupes d'ordre au plus 32) devrait, je pense, s'étendre pour donner les éléments de S juste en dessous de $\frac{1}{2}$ comme $(2^{2n-1} - 1)/2^{2n}$, $n = \dots, 4, 3, 2$, possiblement suivi par $\frac{11}{27}$ et $\frac{2}{5}$. Ensuite, nous nous aventurons dans des eaux décidément troubles.

Je laisse le lecteur avec quelques questions ouvertes.

- (i) S est-il dense quelque part, ou existe-t-il un nombre intéressant $\alpha > 0$, maximal sujet à $[0, \alpha]$ contenu dans l'adhérence de S ?
- (ii) Quels sont les points d'accumulation de S ? Par exemple, d^{-2} , $d = 2, 3, \dots$ sont, en prenant par le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques une infinité de premiers $q \equiv 1 \pmod{d}$ et en considérant le produit semi-direct $C_q \rtimes C_d$. En fait, des suites de p -groupes existent avec un point d'accumulation p^{-1} , donc les points d'accumulation sont simplement 0 ainsi que S_n^{-1} , pour $n = 2, 3, 4, \dots$, ou y en a-t-il d'autres ?

Je serais intéressé d'entendre parler des investigations de quiconque.

L'algorithme d'Euclide, depuis Euclide

par P. M. Cohn

On a dit que toutes les bonnes idées ont déjà été énoncées un jour¹. Cela peut ne pas être vrai en mathématiques, où des progrès spectaculaires ont été faits dans l'époque contemporaine, mais le fait est que toutes les bonnes idées sont anciennes, au sens où presque toute nouvelle idée a ses ancêtres quelque part parmi les idées très anciennes. Ici, je vais retracer l'histoire d'un algorithme à travers les âges : l'algorithme d'Euclide.

1. Considérons les nombres naturels :

Les deux opérations que l'on peut effectuer sur eux, l'addition et la multiplication, montrent un comportement très différent. En utilisant $+$, nous pouvons obtenir tous les entiers positifs en partant de 1 : $2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1, \dots$, nous disons que $\mathbb{N}$ est engendré par 1, en utilisant $+$. Pour la multiplication, nous avons besoin d'un ensemble générateur infini, consistant en tous les nombres premiers : $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$. Tout nombre a est uniquement exprimable sous la forme

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots, \quad (1)$$

où les α_i sont des entiers non négatifs et tous sauf un nombre fini d'entre eux sont 0. Ce résultat est souvent appelé le théorème fondamental de l'arithmétique. De nos jours, on l'énonce généralement pour l'anneau $\mathbb{Z}$ de tous les entiers (obtenu à partir de $\mathbb{N}$ en ajoutant 0 et les entiers négatifs). Ainsi nous pouvons dire que dans $\mathbb{Z}$ tout élément non nul est soit une unité (c'est-à-dire inversible) soit un produit d'éléments non factorisables, qui sont uniques à l'ordre près dans lequel ils apparaissent et à un facteur unité près, un fait exprimé plus brièvement en disant : $\mathbb{Z}$ est un domaine de factorisation unique, ou plus brièvement encore, un UFD.

Dans un UFD, il est facile de décrire le plus grand commun diviseur (pgcd) et le plus petit commun multiple (ppcm) de deux nombres. Au lieu de (1), nous pouvons écrire plus brièvement, si $a = \pi_{p_1}^{\alpha_i}$ est un nombre et si $b = \pi_{p_1}^{\beta_i}$ est un autre nombre, alors

$$\text{pgcd} : (a, b) = \pi_{p_1}^{\delta_i}, \quad \text{où } \delta_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\} \quad (2)$$

$$\text{ppcm} : [a, b] = \pi_{p_1}^{\mu_i}, \quad \text{où } \mu_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}. \quad (3)$$

nous connaissons l'un de (2), (3), l'autre est obtenu par la formule : $(a, b)[a, b] = ab$, mais cela n'aide en rien à trouver le pgcd et le ppcm eux-mêmes, à moins que toutes les factorisations (1) ne soient connues.

Pour trouver le pgcd de deux nombres a, b sans les factoriser, Euclide [2] utilise la division avec reste : si $b > 0$, alors il existe des nombres q, r tels que

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (4)$$

Basé sur une conférence à la société Adams, le 19 octobre 1982.

1. "Tout ce qui est intelligent a déjà été pensé ; il suffit d'essayer de le repenser". Goethe : *Proverbes en prose*.

Nous répétons maintenant le processus avec a, b remplacés par b, r et obtenons une série de restes décroissants, dont le dernier est le pgcd désiré. Si nous numérotions les quotients et les restes comme $q_1, q_2, \dots$, et $r_1, r_2, \dots$, nous pouvons écrire la chaîne d'équations constituant l'algorithme

d'Euclide sous forme matricielle comme suit. Écrivons $P(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $P(x)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$ et maintenant $(a, b) = (b, r_1)P(q_1)$, $(b, r_1) = (r_1, r_2)P(q_2), \dots, (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0)P(q_{n+1})$. Donc en écrivant $C = P(q_{n+1}) \dots P(q_1)$, la matrice C a un inverse, parce que chaque P en a un, et nous avons

$$(a, b) = (r_n, 0)C, \quad (r_n, 0) = (a, b)C^{-1}.$$

2. Il n'est pas difficile d'obtenir des formules explicites pour a, b à partir de l'algorithme d'Euclide. Nous définissons des polynômes p_n en n variables récursivement par $p_0 = 1$, $p_1(t_1) = t_1$, et pour $n \geq 2$

$$p_n(t_1, \dots, t_n) = p_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})t_n + p_{n-2}(t_1, \dots, t_{n-2}).$$

Cette définition montre incidemment que $p_n(1, 1, \dots, 1)$ est le n -ième nombre de Fibonacci, cf. [3]. Les premiers p sont $1, t_1, t_1t_2 + 1, t_1t_2t_3 + t_3 + t_1, t_1t_2t_3t_4 + t_3t_4 + t_1t_4 + t_1t_2 + 1$. En général, p_n est formé par la "règle du saut de mouton" : écrivez $t_1t_2 \dots t_n$ et ajoutez-y tous les produits obtenus en omettant une ou plusieurs paires $t_i t_{i+1}$. Alternativement, p_n peut être décrit comme la partie polynomiale de la fonction rationnelle

$$(t_1 + t_2^{-1})(t_2 + t_3^{-1}) \dots (t_{n-1} + t_n^{-1})t_n.$$

Les p_n apparaissent comme numérateurs et dénominateurs de fractions continues [3], et sont donc appelés polynômes continuants, et ils peuvent aussi être décrits comme des déterminants (continuants), mais notre intérêt pour eux ici provient du fait que (par une induction facile),

$$p(t_1) \dots p(t_n) = \begin{Bmatrix} p(t_1, \dots, t_n) & p(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ p(t_2, \dots, t_n) & p(t_2, \dots, t_{n-1}) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Puisque $p(x)$ a pour déterminant -1 , l'inverse de (5) découle de la formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (6)$$

Si nous appliquons maintenant (5) à l'algorithme d'Euclide, nous trouvons que pour tous nombres a, b de pgcd d , nous avons

$$a = dp(qn + 1, \dots, q_1), b = dp(qn + 1, \dots, q_2) \quad (7)$$

et

$$au - bv = d, \quad \text{avec} \quad u = (-1)^{n-1}p(q_2, \dots, q_n), v = (-1)^{n-1}p(q_1, \dots, q_n) \quad (8)$$

3. On peut poser des questions similaires sur l'anneau des polynômes $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. La réponse fait maintenant partie de la plupart des cours de deuxième année, mais elle n'a pas toujours été si facile. Pedro Nuñez [5] (inventeur de l'échelle de Vernier) écrit en 1567 qu'il a essayé de trouver le pgcd de deux polynômes, mais sans succès ; il ne dépasse pas quelques généralités. Pourtant,

seulement 18 ans plus tard, Simon Stevin [6] le pose comme un problème et dit : la réponse est obtenue en appliquant l'algorithme d'Euclide, comme pour les entiers. Bien sûr, ce n'est pas tout à fait vrai, nous devons utiliser le degré du polynôme à la place de $|a|$. Mais pourquoi Nuñez a-t-il trouvé cela si difficile ? Mon hypothèse est qu'il utilisait des coefficients entiers ; alors l'algorithme d'Euclide ne s'applique pas et en fait le problème est assez difficile. Stevin (qui, entre autres choses, a introduit la notation décimale) était plus susceptible d'utiliser des coefficients rationnels et donc de rendre le problème plus traitable.

4. Guidé par ces exemples, on peut définir un domaine euclidien comme un domaine intègre R avec une fonction à valeurs entières v sur R telle que

E.1. $v(a) \geq 0$ avec égalité pour $a = 0$

E.2. $v(ab) \geq v(a)$ pour tous $a, b \in R, b \neq 0$

E.3. pour tous $a, b \in R$ si $b \neq 0$ et $v(a) \geq v(b)$ il existe $c \in R$ tel que $v(a - bc) < v(a)$

Ce n'est pas tout à fait la forme habituelle de l'algorithme de division, mais il est facile de voir qu'elle est équivalente à cette dernière.

Exemples :

(i) $Z, v(a) = |a|$,

(ii) $k[x], v(a) = \deg a$,

(iii) $Z[i]$ ou plus généralement les entiers dans $\mathbf{g}$ (v), $v(a) = |a|$, pour $d = -1, -2, -3, -7, -11$, et $2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 55, 73$ (cf. [7], p. 95).

5. Par une méthode plus élaborée (utilisant le lemme de Gauss), on peut montrer que l'anneau de polynômes en plusieurs variables $k[x_1, \dots, x_n]$ sur tout corps k de coefficients est un UFD, mais pour $n > 1$, l'algorithme d'Euclide semble s'être perdu. Cela peut bien être lié au fait que, alors que $k\langle x \rangle$ est un domaine d'idéaux principaux (que je ne vais pas définir car il ne joue ici qu'un rôle tangentiel), l'anneau $k[x_1, \dots, x_n]$ pour $n > 1$ n'est pas principal. Quelques efforts pour trouver un algorithme d'Euclide ou un substitut ont été faits (cf. par exemple [4]), mais sans grand succès. Néanmoins, il existe un analogue s'appliquant aux anneaux de polynômes qui nous permet de prouver presque tout ce que l'algorithme habituel fait (pour autant que ce soit vrai). Il s'applique aux polynômes en un nombre quelconque de variables sur tout corps k , mais à la condition que les variables ne commutent pas. Cet anneau de polynômes en variables non commutatives est appelé l'algèbre associative libre sur $x_1, \dots, x_n$ sur k , notée $k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Pour trouver cet algorithme général, prenons deux variables x, y pour simplifier. Étant donné deux éléments de $k\langle x, y \rangle$, disons $f = x^2y + yx + 1$ et $g = xyx + yxy$, en général ni l'un ni l'autre ne peut être divisé par l'autre, mais pour une très bonne raison : f et g n'ont aucun multiple à droite commun du tout, à part zéro. C'est une nouvelle caractéristique qui n'apparaissait pas dans le cas commutatif, où deux éléments non nuls quelconques f, g ont le multiple commun $fg = gf$. Si nous restreignons maintenant l'attention aux paires ayant un multiple à droite commun non nul, l'algorithme d'Euclide est restauré, par exemple si $f = xyz + z + x, g = xy + 1$, alors $f = gz + x, g = xy + 1, x = 1.x$.

Ce dont nous avons besoin est une sorte d'algorithme à n termes qui s'applique chaque fois qu'une condition de multiple à droite appropriée est satisfaite. C'est l'algorithme faible. Étant donné

$a_1, \dots, a_m$, s'il existe $b_1, \dots, b_m$ tels que $v(\sum_i b_i) < \max\{v(a_1 b_1), \dots, v(a_m b_m)\}$ et si les a sont numérotés de sorte que $v(a_1) \leq v(a_2) \leq \dots \leq v(a_m)$, alors il existe j dans l'intervalle $1 \leq j \leq m$ et $c_1, \dots, c_{j-1} \in R$ tels que $v(a_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_i c_i) < v(a_j)$, $v(a_i c_i) \leq v(a_j)$ ($i = 1, \dots, j-1$). Ceci est satisfait par l'algèbre libre $k\langle x \rangle$ dans tout ensemble X de variables non commutatives, en prenant v comme le degré habituel. Cela permet de prouver une propriété de factorisation unique. Par exemple,

$$xyx + x = (xy + 1)x = x(yx + 1). \quad (9)$$

Deux factorisations complètes quelconques d'un élément donné ont le même nombre de facteurs et les facteurs des deux côtés peuvent être appariés de sorte que les facteurs correspondants diffèrent non seulement par un facteur unité, mais sont "similaires" (dans (9), $xy + 1$ est similaire à $yx + 1$, cf. [1], Ch.3). De plus, pour deux éléments quelconques a, b qui ont un multiple à droite commun non nul, nous avons un plus grand facteur commun à gauche d , qui peut encore s'écrire comme une combinaison linéaire de a et b , comme dans (8). En fait, exactement les mêmes formules (7), (8) s'appliquent, où les q sont les quotients obtenus à partir de l'algorithme faible (cf. [1], Ch.2). Ici les p sont définis comme précédemment, et (5) tient toujours. La formule (6) pour la matrice inverse ne peut plus être utilisée, mais l'inverse existe et est facile à écrire, en gardant à l'esprit que $P(x)$ a un inverse.

Bien sûr, $k\langle x \rangle$ n'est pas un domaine d'idéaux principaux, mais on peut montrer que c'est un "anneau d'idéaux libre" (fir en abrégé, pour *free ideal ring*), c'est-à-dire un anneau dans lequel tout idéal à gauche ou à droite est libre, en tant que module sur l'anneau, avec un rang bien défini. On peut développer une théorie des firs qui, à bien des égards, est parallèle à la théorie des domaines d'idéaux principaux, et l'on trouve que de nombreux anneaux importants sont des firs. Mieux encore, certains ont un algorithme faible; ceci permet de reprendre la plupart des formules du n° 2, mais malgré leur forme très explicite, de nombreuses questions peuvent être posées sur ces anneaux qui sont encore sans réponse ([1] contient 86 problèmes non résolus, dont 71 sont encore ouverts).

Références

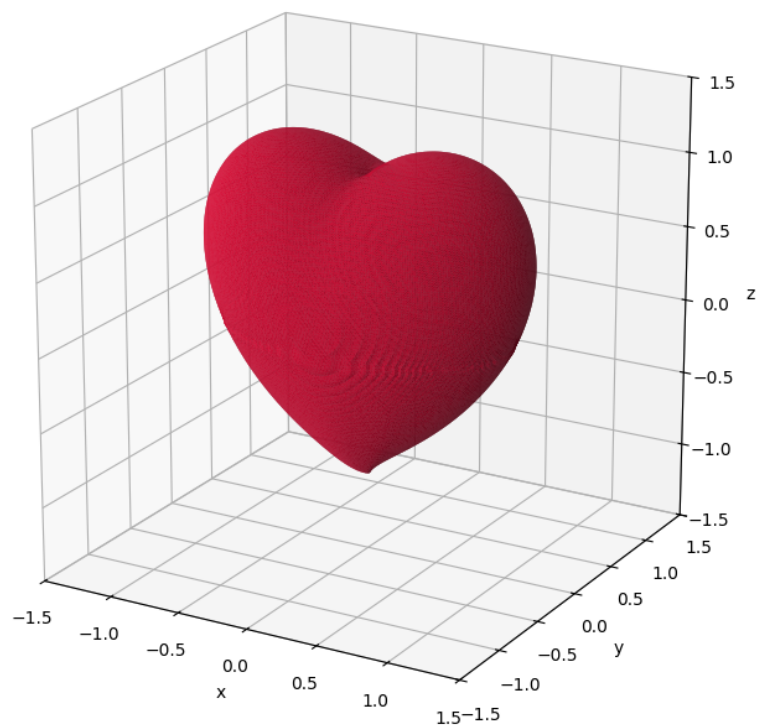
1. P.M. Cohn, *Free rings and their relations*, LMS Monographs No. 2 (Academic Press, London 1971)
2. Euclid, *Elements*, -300
3. G.H. Hardy + E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, (Clarendon Press, Oxford 1938)
4. H. Levi, *A characterization of polynomial rings by means of order relations*, Amer. J. Math. 65 (1943) 221-234
5. P. Nuñez, *Libro de Algebra* (Antwerp 1567)
6. S. Stevin, *Arithmétique* 1585 (vol. II of collected works, 1958)
7. I.N. Stewart + D.O. Tall, *Algebraic number theory*, (Chapman + Hall, London 1979)

Lettre de Paul aux Romains, verset 8
Nouvelle traduction par Mathmo
Stephen Burgess

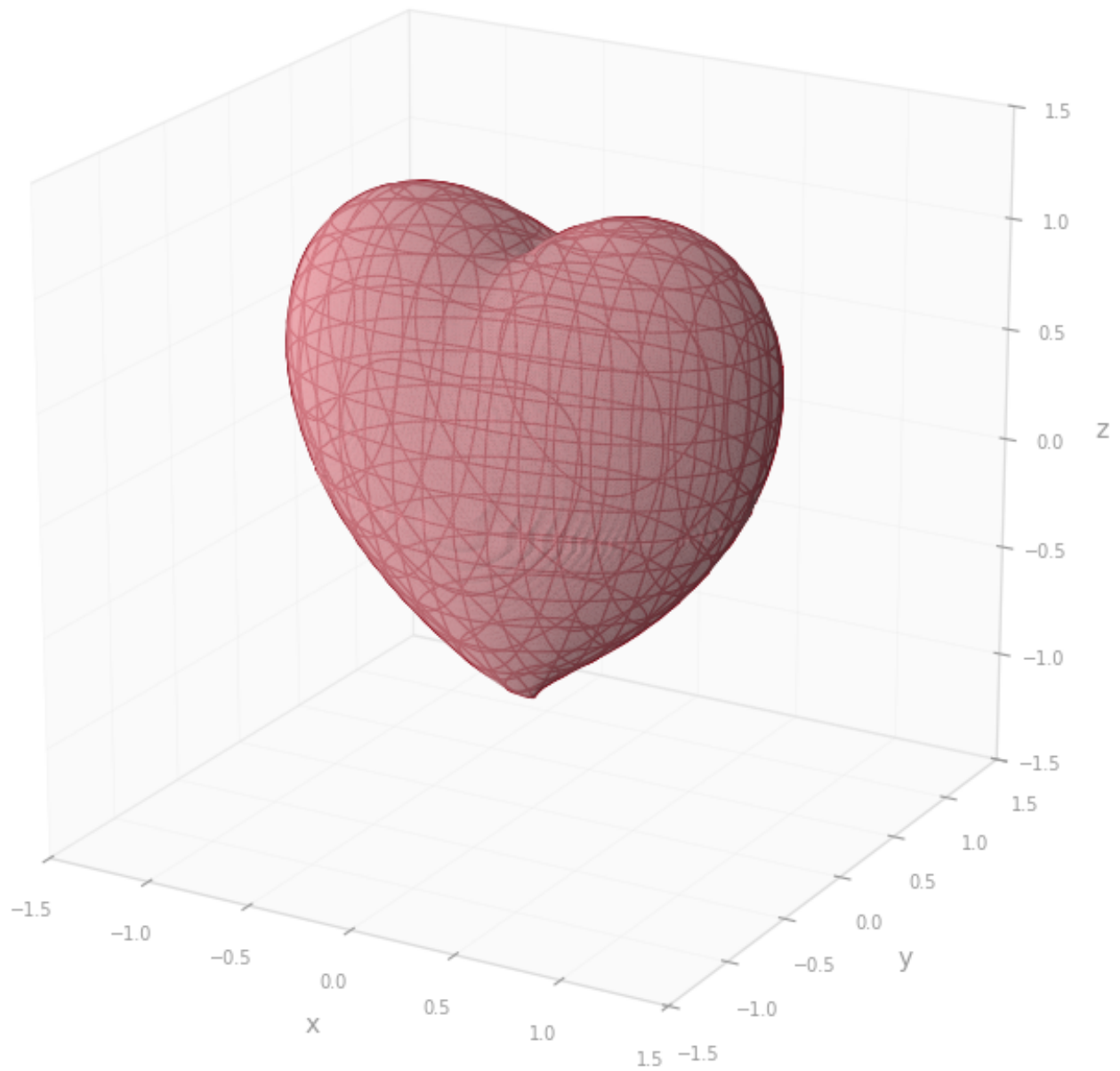
$\exists A_D : B(0, r_e) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in B(0, r_e), \|x - D\| > N, \forall N \in \mathbb{R}$,
mais étant donné $\epsilon > 0, \|A_D(x) - D\| < \epsilon$,
avec $x_J \in \overline{B}(0, r_e) \setminus B(0, r_e) \wedge x_J \longleftrightarrow D \wedge \ker(A_D) = \{x_J\}$.

Se lit : “Il existe une fonction A_D (dite fonction amour-de-Dieu) qui agit sur la boule ouverte de la Terre, qui est évaluée par des réels, et qui est telle que pour tous les êtres de la Terre, même s’ils sont très éloignés de Dieu, l’application de la fonction A_D (ou amour-de-Dieu) les amène arbitrairement près de Dieu, cette fonction ayant un point particulier noté J , qui est à l’intérieur du monde mais non à l’extérieur du monde et qui correspond à Dieu, et qui est la seule chose qui, quand on lui applique la fonction A_D (ou amour-de-Dieu), se réduit à néant.”

$$(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{9}{80}y^2z^3 - x^2z^3 = 0$$

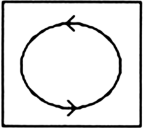
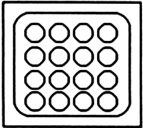
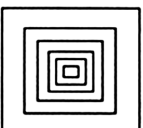
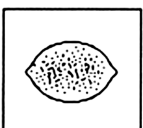
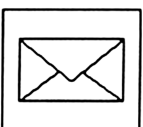
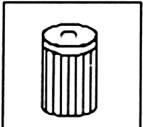


$$(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{9}{80}y^2z^3 - x^2z^3 = 0$$



Humour

Nous avons également reçu quelques icones de la part de Ms. P. Taylor et S. James, comme une aide à la prise efficace de notes :

	preuve par argument circulaire : très apprécié des lecteurs, tourner en rond encore et encore est beaucoup plus facile que d'aller quelque part.
	une icone que les algébristes utilisent de façon très intensive.
	magie : une méthode de démonstration très pratique.
	preuve par récurrence : voir la preuve par récurrence au niveau $n - 1$.
	lemme : point un peu délicat du théorème qui suit.
	note.
	poubelle : memorandum à utiliser après la conférence.

On peut s'interroger sur le nombre des icones ci-dessus qui sont inclus dans le dernier.

Ambigramme (se lit aussi tête en bas)

εχρηκα