

Pavages unidimensionnels

Michael Greene et Robin Michaels

1. Introduction

L'idée de paver le plan $\mathbb{R}^2$ est familière ; il y a de nombreuses façons de le faire en répétant simplement un carreau. Il peut sembler que la portée des pavages de la droite soit quelque peu limitée, mais en fait, avec des définitions appropriées, ce n'est pas le cas. Initialement, nous examinons le cas le plus simple des pavages unidimensionnels.

2. Pavages finis d'un intervalle

Définition. Un carreau unidimensionnel T est un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{Z}$. Sans perte de généralité, nous prendrons le plus petit entier de T égal à 0. Un pavage partiel est un ensemble non vide de translatés disjoints d'un carreau. La région pavée est l'union de ces translations. Un pavage d'un intervalle est un pavage partiel où la région pavée est un intervalle de $\mathbb{Z}$. Nous utilisons la notation $[n]$ pour désigner l'intervalle de $\mathbb{Z}$ de longueur n , commençant à 0. Par exemple :

Le carreau $\{0, 3, 6\}$ est $\bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet$ et $\{5, 6, 8, 9, 11, 12, 101, 104, 107\}$ est une région pavée par un pavage partiel avec ce carreau, comme montré :

$\bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet$
 $\bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet$

Aussi $\{0, 3, 6\}$ pave l'intervalle $\{0, 1, 2, \dots, 8\} = [9]$

$\bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet$	0, 3, 6
$\bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet$	1, 4, 7
$\bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet$	2, 5, 8

L'intervalle solide étant pavé ici est de longueur 9, donc nous parlons du pavage comme ayant une longueur 9 (ou même, étant un pavage de $[9]$).

Nous pouvons considérer un carreau comme un nombre binaire. Si T est un carreau alors $\tau = \sum_{a \in T} 2^a$ est le numéro du carreau. Ceci peut être considéré comme écrivant un 1 à chaque $a \in T$ et des 0 entre, puis en lisant le nombre de droite à gauche. Ainsi l'exemple ci-dessus a pour numéro $1001001_2 = 1 + 8 + 64 = 73$. Nous abuserons un peu de la notation et ne nous soucierons pas trop de distinguer entre un carreau T et le nombre binaire τ représentant T .

Notez qu'ici nous ne considérons que des carreaux finis, pavant des intervalles finis de $\mathbb{Z}$, purement par translation. Les carreaux infinis, les pavages de tout $\mathbb{Z}$, et les pavages où les réflexions sont

permises, sont tous dignes d'intérêt et seront considérés plus tard.

L'interprétation d'un carreau comme un nombre binaire n'est pas simplement un dispositif de représentation - elle est aussi utile pour prouver des résultats sur les carreaux, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1. *Pour tout entier n supérieur à 1, il y a un nombre pair de pavages de $[n]$.*

Preuve. Supposons que T soit un carreau, pavant $[n]$. Pour translater T de m places, nous le multiplions par 2^m . Ainsi, si le pavage de $[n]$ par T implique de translater T de $m_1, m_2, m_3, \dots, m_r$, alors nous pouvons écrire

$$T(2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_r}) = 2^n - 1,$$

puisque $[n]$ a pour représentation binaire $2^n - 1$. Soit $S = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_r}$ de sorte que $TS = 2^n - 1$.

Alors S est aussi un carreau pour $[n]$, puisqu'il peut remplir l'intervalle avec des translations données par les positions des 1 dans T . Nous appelons S un co-carreau de T (et T un co-carreau de S). Dans l'exemple ci-dessus, $T = 1001001_2$ et a pour co-carreau $S = 111_2$ avec $ST = 2^9 - 1$.

Il ne peut pas y avoir de "retenues" dans la multiplication $TS = 2^n - 1$ puisque cela correspondrait à des carreaux se chevauchant dans le pavage. Si $T = S$ alors $T^2 = 2^n - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ pour $n \geq 2$, ce qui est impossible.

Ainsi, nous avons une bijection de l'ensemble des pavages de $[n]$ vers lui-même, donnée par carreau $\rightarrow$ co-carreau, et celle-ci n'a pas de point fixe, donc nous avons un nombre pair de carreaux. Ceci implique qu'un carreau a au plus un co-carreau par rapport à $[n]$.

Au cours de la preuve de ce résultat, le concept de co-carreau a été introduit. Nous écrivons $\text{co}_n(T)$ pour le co-carreau de T par rapport à un pavage de $[n]$. Là où aucune ambiguïté n'existe nous écrivons $\text{co}(T)$. Nous pouvons rapidement déduire un autre résultat.

Définition. $\#T$ = le nombre de 1 dans la représentation binaire de $T = |T|$

Théorème 2. $x = \text{co}_n(y)$ si et seulement si $xy = 2^n - 1$ et $\#x \cdot \#y = n$

Preuve. ($\Rightarrow$) Nous avons déjà montré que $xy = 2^n - 1$. Puisque $[n]$ contient n chiffres 1, et que le carreau x contient $\#x$ uns, exactement $n/\#x$ copies du carreau doivent être utilisées. Donc $\#y = n/\#x$.

($\Leftarrow$) À condition qu'il n'y ait pas de "retenues" dans la multiplication $xy = 2^n - 1$, alors $x = \text{co}_n(y)$. Maintenant, s'il n'y a pas de "retenues", alors $\#x \cdot \#y = \#xy$. De plus, il est facile de vérifier que toute "retenue" se produisant dans la multiplication doit diminuer $\#xy$ par rapport à cette valeur. Donc $\#xy = \#x \cdot \#y$ si et seulement si aucune "retenue" ne se produit, donc si $\#x \cdot \#y = n$, nos conditions sont satisfaites.

Si le lecteur a tenté de trouver des pavages, il trouvera invariablement que tous les carreaux qu'il rencontre qui mènent à des pavages sont symétriques (c'est-à-dire palindromiques), par exemple :

$$\begin{array}{rcl} 11000011_2 & \times & 10101_2 = 11111111111_2 \\ 111_2 & \times & 10001_2 = 111111_2 \\ 1_2 & \times & 1111_2 = 1111_2 \end{array}$$

Théorème 3. *Tous les carreaux menant à des pavages d'intervalles sont symétriques.*

Preuve. Si T a pour représentation binaire $a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$ alors nous définissons le polynôme de T

$$P_T(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{r-1} x^{r-1} + a_r x^r.$$

Alors par les résultats ci-dessus, si $S = \text{co}_n(T)$ nous avons :

$$P_T(x)P_S(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Maintenant, les racines de $x^n - 1$ dans $\mathbb{C}$ sont toutes de module 1, et donc sont de la forme $e^{i\theta}$, donc toutes les racines de $P_T(x)$ sont aussi de cette forme. Puisque $P_T(x)$ a des coefficients réels ses racines apparaissent en paires conjuguées complexes. Ainsi si $P_T(e^{i\theta}) = 0$, alors $P_T(e^{-i\theta}) = 0$.

Puisque toutes les racines de $P_T(x)$ apparaissent en paires conjuguées complexes, nous avons que

$$P_T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P_T\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

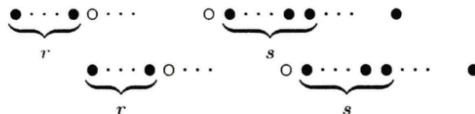
Mais ceci implique que $P_T(x)$ est un polynôme palindromique ; $a_0 = a_r$, $a_{r-1} = a_1$, etc. donc T est un carreau symétrique.

On peut dire encore davantage de choses sur les pavages finis. Demandons-nous combien il y a de pavages distincts de $[n]$. On note ce nombre de pavages distincts $f(n)$. Alors la Proposition 1 donne que $2|f(n)$ pour $n > 1$. Afin de résoudre ce problème, nous devons regarder d'un peu plus près la structure des carreaux acceptables.

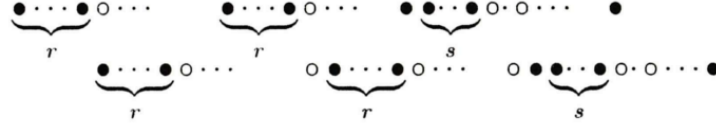
Lemme 4 (lemme des blocs). *Supposons que T pave un intervalle. Alors*

- i) *tous les blocs de 1 dans T ont la même longueur, et*
- ii) *tous les blocs de 0 sont un multiple de cette longueur.*

Preuve. Nous pensons à placer les carreaux depuis la gauche, c'est-à-dire en commençant avec l'intervalle vide et en posant un carreau chaque fois pour couvrir le 0 restant le plus à gauche. Disons que T commence par r 1. Si T n'a qu'un seul bloc de 1, nous avons terminé. Sinon, les deux premiers carreaux descendent à r d'écart, donc aucun bloc de 1 n'est plus long que r . Si $s > r$ les carreaux se chevauchent :



Si un bloc de 1 a une longueur inférieure à r , prenons le plus à gauche de ceux-ci ; alors rien ne peut remplir l'espace entre les copies de ce bloc des deux premiers carreaux. Si $s < r$ la position marquée ne peut jamais être couverte :



Ceci prouve la partie (i). Donc tous les blocs de 0 dans T sont complètement remplis par des blocs de longueur r , donc nous avons terminé.

Nous sommes maintenant en position de prouver :

Théorème 5. $f(1) = 1$ et $f(n) = g(n)$ pour $n > 1$ où

$$g(m) = \begin{cases} 2, & m = 1 \\ \sum_{k \neq m} g(k), & m > 1. \end{cases}$$

Preuve. Nous commençons par une nouvelle définition :

Un carreau isolé est un carreau dans lequel tous les blocs de uns sont de longueur 1. On peut voir que le co-carreau d'un carreau isolé est non isolé (à condition que le pavage soit de longueur > 1), car sinon le produit du co-carreau et du carreau commencerait par $10 \dots$ et ce n'est clairement pas un intervalle.

Aussi, le co-carreau d'un carreau non isolé doit être isolé, puisque sinon des chevauchements en résulteraient. Donc, si $g_*(n)$ est le nombre de carreaux isolés, qui pavent $[n]$ et $g^*(n)$ le nombre de carreaux non isolés qui pavent $[n]$, alors nous avons $g(n) = g^*(n) + g_*(n)$, où $f(n) = g(n)$ pour $n > 1$, mais $g(1) = 2$. (Nous définissons $g^*(1) = g_*(1) = 1$).

Nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires ici : dilater un carreau par un facteur r implique de remplacer chaque 1 dans le carreau par r chiffres 1 et chaque 0 par r chiffres 0. Contracter un carreau par un facteur r implique de remplacer chaque 1 par un 1 et $r - 1$ chiffres 0, et chaque 0 par r chiffres 0. Par exemple

$$10101_2 = T$$

$$110011_2 = S$$

$$\downarrow \text{expansion de facteur 3}$$

$$\downarrow \text{Dilution de facteur 2}$$

$$111000111000111_2 = \text{Exp}_3(T)$$

$$101000001010_2 = \text{Dil}_2(S)$$

Par le lemme des blocs, tout pavage non isolé de n avec des blocs de longueur r , est la r -expansion d'un pavage isolé de $\frac{n}{r}$; inversement, toute r -expansion d'un pavage isolé de $\frac{n}{r}$ est un pavage de n .

Ainsi, puisque $r|n$, $r \neq 1$ nous avons

$$g^*(n) = \sum_{\substack{r|n \\ r>1}} g_*(n/r) = \sum_{\substack{k|n \\ k \neq n}} g_*(k).$$

Mais, pour $n > 1$, les carreaux isolés et non isolés sont en bijection, de sorte que

$$g(n) = 2g^*(n) = 2g_*(n).$$

Ainsi

$$g(n) = \sum_{\substack{k|n \\ k \neq n}} g(k) \text{ comme requis, pour } n > 1. \quad \square$$

Ce théorème n'est pas très utile pour calculer les valeurs de $f(n)$, mais une formule légèrement meilleure pour $g(n)$ peut être rapidement dérivée.

Corollaire 6. *Pour $n > 1$, $g(n) = 2 \sum_{k|n} \mu(k)g(n/k)$ où $\mu(1) = 1$, $\mu(m) = 0$ si m n'est pas sans facteur carré, sinon $\mu(m) = (-1)^s$ où m a s facteurs premiers.*

Preuve. En appliquant la formule d'inversion de Möbius, qui énonce que

$$H(x) = \sum_{y|x} h(y) \Rightarrow h(y) = \sum_{x|y} \mu(x) H(y/x)$$

à $2g(n) = \sum_{k|n} g(k)$, on obtient le résultat.

Dans le processus de preuve du Théorème 3, nous avons introduit les concepts de dilution et d'expansion. En fait, ce sont des concepts duaux, puisque dilater un carreau correspond à contracter son co-carreau, et vice versa. Ainsi, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{carreaux de } [n] & \xrightarrow{\text{con}_r} & \text{carreaux de } [n] \\ \downarrow \text{dil}_r & & \downarrow \text{exp}_r \\ \text{carreaux de } [rn] & \xrightarrow{\text{con}_{nr}} & \text{carreaux de } [rn] \end{array}$$

$$\exp_r(\mathrm{co}_n(T)) = \mathrm{co}_{nr}(\mathrm{dil}_r(T))$$

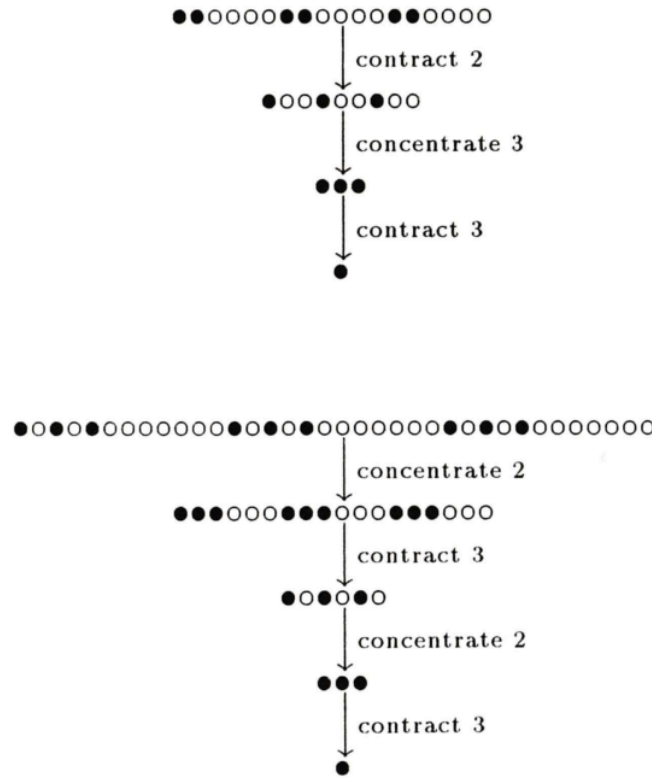
Par exemple :

[illegible]

Notez que $\# \text{dil}_r(T) = \#T$ et $\# \text{exp}_r(T) = r\#T$.

Maintenant, nous savons que tout carreau non isolé est l'expansion d'un carreau isolé plus petit, d'après le lemme des blocs. Puisqu'un carreau isolé a un co-carreau non isolé qui est l'expansion d'un carreau plus petit, nous savons par la dualité de l'expansion et de la dilution, qu'un carreau isolé est donc la dilution d'un carreau non isolé.

Ainsi, par dilution inverse répétée (concentration) et expansion inverse (contraction), tout carreau peut finalement être réduit au carreau unité. Par exemple :



Ces nombres, les facteurs de contraction et de concentration apparaissant dans la réduction d'un carreau, définissent uniquement le carreau. La suite, écrite en ordre inverse, est appelée la signature du carreau, donc les exemples ci-dessus ont pour signatures $[3, 3, 2]$ et $[2, 2, 3, 3]$ respectivement.¹

En inversant ce processus, toute suite d'entiers (tous supérieurs à 1) est la signature d'un carreau unique. Par exemple, la suite $[4, 2, 3, 2]$ génère le carreau suivant :



S'il y a un nombre pair de nombres dans la suite, alors l'opération finale est une dilution donc le carreau est isolé, tandis que sinon, une expansion est finale, donc le carreau est non isolé.

1. Note du traducteur : la signature est ici donnée dans l'ordre des opérations de réduction.

Aussi $\#T$ est égal au produit des entiers en position impaire dans la signature, puisque ce sont les expansions qui augmentent $\#T$. De plus, la longueur du plus court intervalle pavé par T est le produit de tous les entiers de la signature. Nous laissons ceci à prouver par le lecteur. Comme exemple récapitulatif, $f(12) = 16$, et les carreaux sont :

1	11	10101010101	[2]	[6, 2]
2	111	1001001001	[3]	[4, 3]
3	1111	100010001	[4]	[3, 4]
4	111111	1000001	[6]	[2, 6]
5	11111111111111	1	[12]	[1]
6	1100110011	101	[3, 2]	[2, 2]
7	111000111	1001	[2, 2, 3]	[2, 3]
8	11000011	10101	[2, 3, 2]	[3, 2]

Le lecteur pourra considérer les effets de la dilution et de l'expansion sur les représentations polynomiales d'un carreau.

3. Pavages de dimension supérieure

Dans $\mathbb{Z}^n$, l'argument du lemme des blocs s'étend pour donner le

Théorème 7. *Si T pave un pavé dans $\mathbb{Z}^n$ par translation alors T est le produit cartésien de carreaux unidimensionnels.*

Preuve. Écrivons $[k]$ pour $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Supposons que T pave $A = [a_1] \times [a_2] \times \dots \times [a_n]$ et aucun pavé plus petit. Écrivons T_0 pour le carreau “dans le coin”, c'est-à-dire la copie de T qui contient $(0, 0, \dots, 0)$, et définissons T_0^* de façon similaire, où T^* est le co-carreau de T .

Si $A = \{(0, 0, \dots, 0)\}$, nous avons terminé ; sinon, nous pouvons supposer que $a_1 > 1$. Regardons l'arête

$$E_1 := [a_1] \times \{0\} \times \dots \times \{0\}.$$

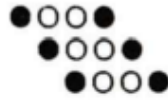
La seule partie de T qui rencontre E_1 est l'arête correspondante du carreau, c'est-à-dire l'arête $T_0 \cap E_1$, donc cette arête doit être un carreau unidimensionnel, disons avec une longueur de bloc r . Supposons que E soit une arête quelconque parallèle à E_1 , et T' un carreau quelconque du pavage. Nous affirmons que tout bloc de 1 dans $T' \cap E$ a pour longueur r , et tout bloc de 0 a pour longueur un multiple de r (y compris ceux aux extrémités) - si ce n'est pas le cas, posons $T' = T_0$ et choisissons un E “le plus proche” de E_1 , disons avec la n -ième coordonnée minimale, puis la $(n-1)$ -ième coordonnée minimale, etc. jusqu'à la 2ème coordonnée minimale, tel que l'affirmation échoue pour $T' \cap E$, et argumentons comme dans le lemme des blocs. Par conséquent, si $r > 1$ nous pouvons contracter T dans la 1-direction et obtenir un carreau qui pave $[a_1/r] \times [a_2] \times \dots \times [a_n]$, donc nous avons terminé par induction sur le volume de A (puisque l'expansion d'un produit cartésien est un produit cartésien).

Si $r = 1$, regardons $T_0^* \cap E_1$. Ceci doit être non isolé, donc en appliquant le raisonnement ci-dessus à T^* nous pouvons contracter T^* dans la 1-direction. T^* pave A , donc le volume du plus petit pavé

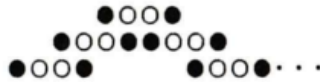
pavé par T^* est au plus le volume de A , et le co-carreau d'un produit cartésien est aussi un produit cartésien (par induction sur la dimension), donc nous avons terminé. $\square$

4. Pavages de $\mathbb{Z}$

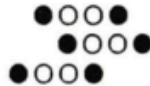
Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des pavages finis d'intervalles finis. Maintenant, les pavages de tout $\mathbb{Z}$ sont considérés. Clairement, si un carreau fini doit paver $\mathbb{Z}$, alors il ne peut pas avoir de co-carreau fini. Nous pouvons légèrement modifier notre définition du co-carreau dans un pavage pour traiter ceci (la méthode de représentation binaire est évidemment flawed ici). Le co-carreau est une suite de 0 et de 1 arrangés de sorte qu'il y ait un 1 précisément au-dessus de l'extrémité gauche de chaque carreau dans le pavage. Notez que ceci correspond à la définition odd dans le cas fini. Par exemple



Ce pavage de $\mathbb{Z}$ est généré en répétant un pavage fini. Cependant, tous les pavages de $\mathbb{Z}$ ne sont pas de cette forme. Par exemple :



Notez que la façon dont un carreau particulier peut paver $\mathbb{Z}$ n'est pas unique, contrairement au cas fini. $\bullet \circ \circ \bullet$ peut aussi paver $\mathbb{Z}$ comme montré, avec un co-carreau différent :

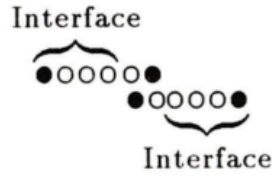


Tous les pavages de $\mathbb{Z}$ que nous avons vus jusqu'à présent sont périodiques. Nous allons maintenant prouver que c'est toujours le cas.

Théorème 8. *Tous les pavages finis de $\mathbb{Z}$ sont périodiques.*

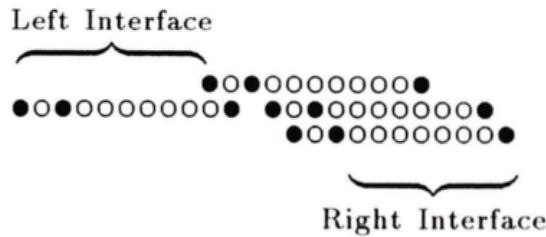
Preuve. Le pavage partiel induit par une région de $\mathbb{Z}$ et un pavage est le plus petit pavage partiel couvrant la région. Nous considérons la suite de pavages partiels induits par des intervalles croissants de $\mathbb{Z}$, de sorte que les carreaux soient adjoints à l'extrémité droite du bloc un par un. Dans un tel pavage, les régions aux extrémités d'un bloc solide qui ne sont pas solidement pavées sont appelées les interfaces.

Par exemple



Maintenant, étant donné un carreau et une interface, avec un pavage partiel induit par un intervalle de longueur supérieure à celle du carreau, il n'y a qu'un seul endroit où le carreau suivant peut aller, puisque le 0 le plus à gauche d'une interface à droite ne peut être bouché que par un carreau commençant là. De même pour l'interface à gauche. Il est clair de ceci que les deux interfaces ne sont pas plus longues que le carreau.

Un autre exemple, utilisant le carreau $\bullet \circ \bullet \circ \circ \circ \circ \circ \circ \bullet$

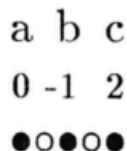


À partir d'une telle suite de pavages partiels, nous obtenons une suite d'interfaces à droite. Cependant, si le carreau est de longueur n , il y a au plus 2^n interfaces possibles, donc le motif doit éventuellement se répéter. Ceci, cependant, n'exclut pas la possibilité d'une séquence de départ non périodique initiale. En commençant bien à l'intérieur de la section du pavage maintenant connue pour être périodique, nous pouvons maintenant travailler vers la gauche par la même méthode, en utilisant l'interface à gauche, et donc le même argument doit s'appliquer. Ainsi le pavage entier doit être périodique.

Ceci montre que la tâche de paver $\mathbb{Z}$ peut être réduite à celle de paver C_n où C_n est le cercle de circonférence n .

Maintenant, tout pavage de $[n]$ donne clairement aussi un pavage de $\mathbb{Z}$, et une méthode de construction de pavages de $\mathbb{Z}$ à partir de tels pavages est montrée. Un exemple démontrera le principe général : $\bullet \circ \bullet \circ \bullet$ pave [6]

Maintenant, un entier est assigné à chaque $\bullet$ du carreau :



et ensuite ce $\bullet$ est décalé de ce nombre multiplié par la longueur du pavage :

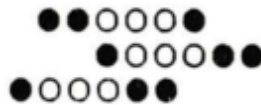


Le lecteur pourra vérifier que ceci pave $\mathbb{Z}$.

Définitions. Un carreau est premier s'il n'est pas la dilution d'un carreau. Un pavage est irréductible s'il n'y a pas de pavage partiel dedans avec une interface vide. Il est conjecturé que tous les pavages premiers de $\mathbb{Z}$ sont de cette forme, mais ceci n'a pas été prouvé. La production canonique d'un pavage de $\mathbb{Z}$ à partir d'un pavage de $[n]$ conduit à un pavage réductible, mais les méthodes ci-dessus permettent de produire des pavages irréductibles.

5. Pavages avec réflexions

Maintenant considérons la structure supplémentaire obtenue en permettant l'utilisation de réflexions du carreau. Dans cette situation, les résultats prouvés précédemment sont tous faux. Par exemple, une nouvelle structure est ajoutée ; des pavages asymétriques existent. Voici le plus petit tel pavage connu de [9].

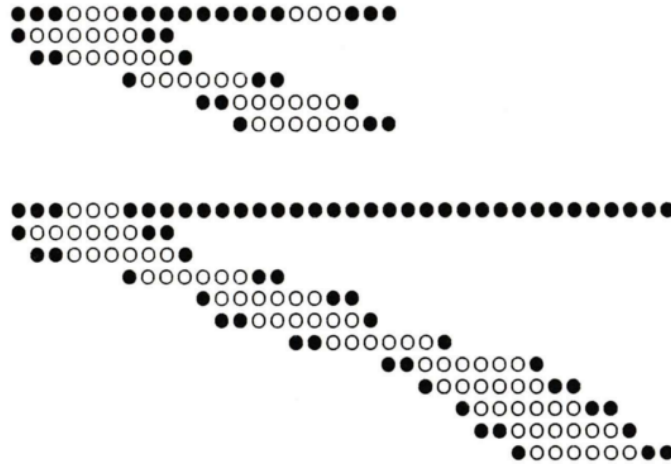


Dans ce cas le rapport des carreaux gauchers aux droitiers est de 2 : 1. Il est faiblement conjecturé qu'aucun rapport plus extrême n'est possible pour un pavage asymétrique d'un intervalle fini. Ceci est connu comme la conjecture 2 : 1, et est faiblement crue par les auteurs, mais peu de preuves ont été trouvées dans un sens ou dans l'autre.

La dualité carreau-co-carreau trouvée dans le cas symétrique ne s'applique plus, et les pavages asymétriques sont bien plus difficiles à manipuler. Il est fortement suspecté qu'un pavage d'une région symétrique avec un rapport de 3 : 1 est possible, mais l'exemple a été perdu.

La divergence d'un pavage asymétrique est la différence entre le nombre de carreaux gauchers et droitiers. Nous montrons maintenant que des pavages premiers existent avec une divergence arbitrairement grande.

Preuve. Nous utilisons le carreau premier $T = \bullet\bullet\circ\circ\circ\circ\circ\bullet$. Celui-ci peut être utilisé pour paver les régions $A = \bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\bullet$ et $B = \bullet\bullet\circ\circ\circ\bullet$ avec ($\overline{B}$, le revers de B) comme suit :



Number of Children	Frequency
0	8
1	9
2	10
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	1

$$\overline{B}AAA\dots$$

6. Carreaux infinis avec co-carreaux infinis

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i (-2)^i, \quad \epsilon_i \in \{0, 1\} \quad \forall i.$$
$$T = \{n : \epsilon_i(n) = 0 \ \forall i \text{ pair}\},$$

$$T^* = \{n : \epsilon_i(n) = 0 \ \forall i \text{ impair}\}.$$

Alors tout n est exprimable uniquement comme $t + t^*$ où $t \in T$ et $t^* \in T^*$, donc T pave $\mathbb{Z}$ avec le co-carreau T^* .

Remarque. Cet exemple a des carreaux semi-infinis avec des co-carreaux semi-infinis.

La preuve que tous les pavages de $\mathbb{Z}$ sont périodiques peut être modifiée pour montrer que tout carreau qui pave $\mathbb{Z}$ avec réflexion peut être amené à le faire de manière périodique. Nous laissons ceci au lecteur.

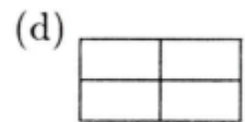
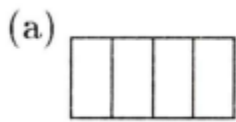
7. Remerciements

Depuis le début de cette investigation sur les carreaux, nous avons reçu une aide précieuse de nombreuses personnes. Nous sommes redevables à Imre Leader pour le Théorème 3, Michael Fryers pour l'exemple final, et à Kevin Buzzard, Adam Chalcraft, Richard Tucker et d'autres pour une aide précieuse.

8. Tatamis

Au Japon, une pièce Tatami est une pièce rectangulaire, $m \times n$, dont le sol est couvert par des tatamis non chevauchants, qui sont des rectangles 2×1 .

Il semble y avoir une règle non écrite qu'il n'est pas permis que quatre tatamis se rencontrent en un point. Ainsi, parmi les façons possibles suivantes de couvrir le sol d'une pièce, (a), (b) et (c) sont autorisées, tandis que (d) ne l'est pas.



Toutes les pièces $m \times n$ (avec mn pair) peuvent-elles être couvertes de tatamis sans violer cette règle? Si non, quelle est la plus petite pièce qui ne peut pas être ainsi couverte?

Ordres partiels et topologies sur les ensembles finis

Demetres Christofides et George Raptis

Un ensemble quasi-ordonné $(X, \prec)$ est un ensemble X , muni d'une relation binaire $\prec$ qui est réflexive et transitive. La relation $\sim$ sur X définie par $x \sim y$ si $x \prec y$ et $y \prec x$ est une relation d'équivalence sur X . Nous pouvons définir une relation $\leq$ sur $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$ par $[x] \leq [y]$ si $x \prec y$. C'est un quasi-ordre bien défini qui est aussi antisymétrique. Un ensemble quasi-ordonné X avec une relation $\leq$ qui est aussi antisymétrique est appelé un ensemble partiellement ordonné (poset). Pour $x, y \in X$ nous écrivons $x < y$ signifiant $x \leq y$ et $x \neq y$. Nous disons que $x, y \in X$ sont incomparables si ni $x \leq y$ ni $y \leq x$.

Le nombre de quasi-ordres sur un ensemble de n éléments est noté Q_n . Le nombre d'ordres partiels sur un ensemble de n éléments est noté P_n . Il n'y a pas de formules explicites pour P_n et Q_n et le problème de trouver de telles formules est ouvert et possiblement très difficile (voir le tableau ci-dessous).

n	P_n	Q_n
1	1	1
2	3	4
3	19	29
4	219	355
5	4231	6942
6	130023	209527

Nous allons maintenant mentionner quelques-uns des résultats existants concernant ces suites.

Il est facile de voir qu'il y a exactement $3^{\binom{n}{2}}$ relations réflexives et antisymétriques sur un ensemble X de n éléments. (Pour chaque paire de $x, y \in X$ distincts, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$, soit x et y sont incomparables.) En particulier,

$$P_n \leq 3^{\binom{n}{2}}.$$

En partitionnant X en k sous-ensembles non vides $X_1, \dots, X_k$ et en ordonnant partiellement l'ensemble de ces sous-ensembles, nous obtenons un quasi-ordre sur X . Clairement nous pouvons obtenir chaque quasi-ordre sur X uniquement de cette façon. Si nous notons $S(n, k)$ le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en k sous-ensembles non vides (ceci est connu comme le nombre de Stirling de seconde espèce), nous obtenons que

$$Q_n = \sum_{k=1}^n S(n, k) P_k.$$

Il est aussi connu que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1$. Pour ceci, le lecteur peut consulter [3].

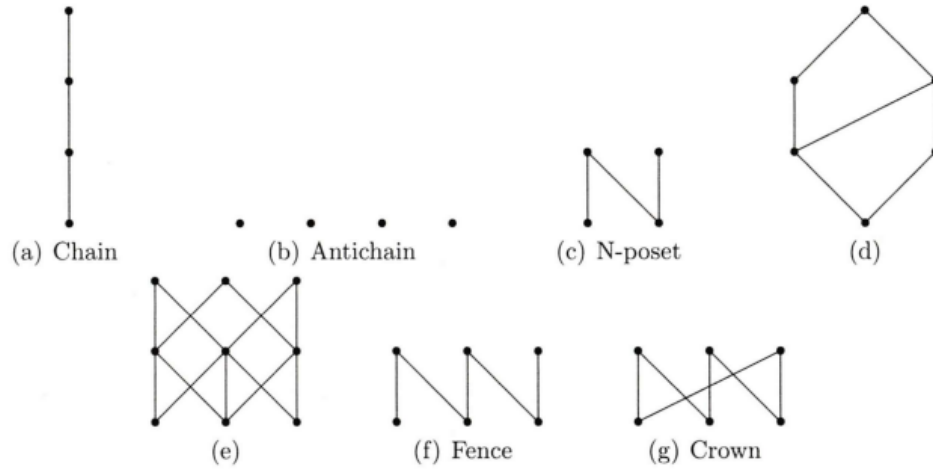
Soit $(X, \leq)$ un poset fini. Nous disons qu'un élément $x \in X$ couvre $y \in X$ si $y < x$ et il n'existe pas $z \in X$ avec $y < z$ et $z < x$. Nous pouvons représenter X avec un diagramme, en représentant chaque élément $x \in X$ par un point distinct, de sorte que

- (i) Chaque fois que $x < y$, le point représentant y est plus haut que le point représentant x . (Imaginez ceci sur le plan).

- (ii) Chaque fois que y couvre x , les points représentant les deux éléments sont joints par un segment de droite.

Nous pouvons voir le diagramme de Hasse d'un poset comme un graphe orienté. (Il y a une arête orientée de x à y si y couvre x .) Clairement, un tel graphe orienté ne peut avoir ni cycle orienté (par transitivité de $\leq$) ni cycle avec toutes les arêtes sauf une orientées cycliquement (par construction). Il s'avère que ces deux conditions sont aussi suffisantes pour qu'un graphe orienté représente un poset. (En interprétant chaque arête orientée $\overrightarrow{xy}$ comme " y couvre x ".) En particulier, un tel graphe orienté ne peut avoir de triangles. Tout graphe biparti sur n sommets, avec les arêtes orientées d'un ensemble de partition vers l'autre, satisfait les conditions ci-dessus. En ne considérant que ceux avec $\lfloor n/2 \rfloor$ sommets dans un ensemble de partition, et $\lceil n/2 \rceil$ dans l'autre, nous déduisons qu'il y a au moins $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ tels graphes orientés, et donc

$$P_n \geq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$



Ce diagramme est appelé le diagramme de Hasse du poset X . (Voir Figures (a)-(g).)

En fait, Kleitman et Rothschild dans [5] ont prouvé qu'il existe une constante C telle que

$$\log_2 P_n \leq \frac{n^2}{4} + Cn^{3/2} \log_2 n$$

pour tout n . Par conséquent ils ont déduit que

$$\log_2 P_n \sim \frac{n^2}{4}.$$

Maintenant nous allons voir comment le problème d'énumérer les ordres partiels sur un ensemble X de n éléments se révèle équivalent au problème d'énumérer les topologies sur X avec une certaine propriété. Nous donnons d'abord quelques définitions :

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit être un espace T_0 si, pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe un ouvert U contenant exactement l'un d'eux.

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit être un espace T_1 si, pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est fermé.

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit être un espace A si toute intersection d'ouverts est ouverte. En particulier toute topologie sur un ensemble fini est une A -topologie.

Lemme 1. *Soit X un espace topologique.*

- (i) *Si X est T_1 , alors X est aussi T_0 .*
- (ii) *Si X est un espace A , alors la seule T_1 -topologie sur X est la topologie discrète.*
- (iii) *Si X est un T_0 -espace fini, alors il existe un $x \in X$ tel que $\{x\}$ est fermé.*

Preuve

- (i) Découle de l'observation que $X - \{x\}$ est ouvert.
- (ii) Puisqu'une union arbitraire d'ensembles fermés est fermée.
- (iii) Par induction.

Théorème 2. *Soit X un ensemble fini avec n éléments. Alors*

- (i) *il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des quasi-ordres sur X et l'ensemble des topologies sur X , et*
- (ii) *il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des ordres partiels sur X et l'ensemble des T_0 -topologies sur X .*

Preuve

- (i) Étant donné un quasi-ordre $\prec$ sur X , nous définissons une topologie sur X qui a pour base d'ouverts les ensembles de la forme $U_x = \{y \in X : y \prec x\}$ pour $x \in X$. Ceci est bien une base puisque $U_x \cap U_y = \bigcup \{U_z : z \prec x \text{ et } z \prec y\}$. Réciproquement, étant donné une topologie $\mathcal{T}$ sur X nous pouvons définir un quasi-ordre $\prec$ sur X par $x \prec y$ si et seulement si $V_x \subset V_y$ où $V_x = \bigcap \{U \in \mathcal{T} : x \in U\}$. Il est clair que $\prec$ est un quasi-ordre sur X , et le lecteur peut vérifier que ces applications sont des inverses mutuelles.
- (ii) En utilisant la correspondance ci-dessus, il suffit de montrer qu'un ordre partiel correspond à un T_0 -espace et vice-versa. Étant donné un ordre partiel $\leq$ sur X , et des $x, y \in X$ distincts, alors soit x et y sont incomparables, auquel cas $x \in U_x$ mais $y \notin U_x$, soit ils sont comparables, disons (sans perte de généralité) $x \leq y$, auquel cas $x \in U_x$ mais $y \notin U_x$. Réciproquement, étant donné une T_0 -topologie sur X , et deux éléments $x, y \in X$ avec $x \prec y$ et $y \prec x$, alors y appartient à tout ouvert contenant x et x appartient à tout ouvert contenant y . Donc $x = y$, donc $\prec$ est un ordre partiel. $\square$

Remarques

(1) La preuve ci-dessus n'est pas valable pour les ensembles infinis parce que les deux applications en (i) pourraient ne plus être inverses l'une de l'autre, puisque V_x n'est pas ouvert en général.

(2) Pour un ensemble infini X , la correspondance ci-dessus tient si nous ne considérons que les A -topologies sur X . La preuve est essentiellement la même que ci-dessus et est donc laissée au lecteur.

(3) En lien avec ce théorème, le Lemme 1 dit que le seul poset (fini ou infini) correspondant à une T_1 -topologie est l'antichaîne et que tout poset fini a un élément maximal.

(4) Dans [9] il est montré que sur un ensemble X de n éléments, aucune topologie autre que la discrète n'a plus de $\frac{3}{4}2^n$ ouverts. Ce résultat est le meilleur possible, c'est-à-dire que pour $n \geq 2$ il y a une topologie sur X avec exactement $\frac{3}{4}2^n$ ouverts. Dans [10], Stanley a prouvé un résultat plus fort.

Étant donné une relation R sur un ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, nous pouvons définir une matrice $n \times n$ $(0, 1)$ $A = (a_{ij})$ par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i R x_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci donne une correspondance biunivoque entre les relations sur X et les matrices $n \times n$ $(0, 1)$, puisque R est un sous-ensemble de $X \times X$. Dans le cas où R est un quasi-ordre, la matrice correspondante A satisfait :

- (i) $a_{ii} = 1$ pour tout i , et
- (ii) si $a_{ij} = a_{jk} = 1$, alors $a_{ik} = 1$. Réciproquement, nous laissons le lecteur vérifier que ces conditions sur A déterminent uniquement un quasi-ordre sur X . Dans le cas où R est un ordre partiel, alors A doit aussi satisfaire :
- (iii) pour tous i, j , $a_{ij} = a_{ji} = 1$ si et seulement si $i = j$.

Donc, par le Théorème 2, il y a une correspondance biunivoque entre les espaces topologiques finis T_0 sur X , et les matrices $(0, 1)$ satisfaisant les conditions (i), (ii) (et la condition (iii)) ci-dessus. Cette correspondance peut être décrite en termes de la topologie directement par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \in \overline{\{x_i\}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 3. *Une matrice $(0, 1)$ $n \times n$ A correspond à un espace topologique (un quasi-ordre) sur un ensemble X de n éléments, si et seulement si elle a des 1 sur la diagonale principale et satisfait $A^2 = A$ sous les opérations booléennes².*

Preuve Une telle matrice A satisfait clairement (i). Si $a_{ij} = a_{jk} = 1$ pour certains i, j, k , alors $a_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{jk} = 1$, donc A satisfait aussi (ii). Réciproquement si une matrice A satisfait (i) et (ii),

alors nous devons montrer que $a_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{jk}$.

Si $a_{ik} = 0$, alors nous ne pouvons pas avoir $a_{ij} = a_{jk} = 1$ pour aucun j (par la condition (ii)).

2. Les opérations booléennes sont ici l'addition et la multiplication booléennes, c'est-à-dire $1 + 1 = 1$.

Si $a_{ik} = 1$, alors $a_{ii}a_{ik} = 1$, donc $\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{jk} = 1$. □

Une application f entre deux posets X, X' est dite préservant l'ordre si, pour tous $x, y \in X$, $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$, où $\leq$ désigne l'ordre partiel dans X et X' . Un poset X est dit avoir la propriété du point fixe si toute application préservant l'ordre $f : X \rightarrow X$ a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in X$ avec $f(x) = x$. Le poset montré en Figure (e) a cette propriété. Le problème de caractériser les posets ayant la propriété du point fixe est ouvert. Ceci a été résolu positivement (théorème de Knaster-Tarski) dans le cas des posets complets³. (Voir Figure (d) pour le diagramme de Hasse d'un poset complet.)

Dans le cas des treillis⁴, le problème ci-dessus a été complètement résolu. Tarski dans [11] a prouvé que tout treillis complet⁵ a la propriété du point fixe et Davis dans [2] a prouvé que tout treillis avec la propriété du point fixe est complet.

Il est maintenant raisonnable de demander quelle est la relation entre les applications qui préservent la structure d'ordre et les applications qui préservent la structure topologique correspondante. Nous terminerons notre introduction aux posets en complétant la correspondance entre les ordres partiels et les espaces topologiques T_0 avec le lemme suivant :

Lemme 4. *Une application f d'un poset X dans X préserve l'ordre si et seulement si elle est continue par rapport à la topologie correspondante sur X (comme donnée dans la preuve du Théorème 2).*

Preuve Si f préserve l'ordre, alors $f^{-1}(U_x) = \bigcup \{U_z : z \leq f(x)\}$ est ouvert. Donc f est continue. Réciproquement, si f est continue et $x, y \in X$ avec $x \leq y$, alors $U_x \subset U_y$. Puisque f est continue, $f^{-1}(U_{f(y)})$ est un ouvert contenant y , donc il contient aussi U_y et donc il contient aussi U_x . Il s'ensuit que $f(x) \in U_{f(y)}$, c'est-à-dire $f(x) \leq f(y)$. Donc f préserve l'ordre.

8.1. Références

- [1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 1967.
- [2] A. C. Davis, *A characterization of complete lattices*, Pacific Journal of Math. 5 (1955), 311-319.
- [3] M. Ern , *Struktur- und Anzahlformeln für Topologien auf endlichen Mengen*, Manuscripta Math. 11 (1974), 221-259.
- [4] J. Klařka, *Transitivity and partial order*, Math. Bohemica 122 (1997), 75-82.
- [5] D. Kleitman and B. Rothschild, *The number of finite topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 276-282.
- [6] V. Krishnamurthy, *On the number of topologies on a finite set*, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 154-157.
- [7] B. S. W. Schr der, *Ordered Sets : an introduction*, Birkhäuser, 2003.

3. Un poset complet est un poset dans lequel tout sous-ensemble a une borne supérieure et une borne inférieure.

4. Un treillis est un poset dans lequel toute paire d'éléments a une borne supérieure et une borne inférieure.

5. Un treillis complet est un treillis dans lequel tout sous-ensemble a une borne supérieure et une borne inférieure.

- [8] H. Sharp Jr., *Quasi-orderings and topologies on finite sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1344-1349.
- [9] H. Sharp Jr., *Cardinality of Finite Topologies*, Journal of Combinatorial Theory 5 (1968), 82-86.
- [10] R. P. Stanley, *On the number of open sets of finite topologies*, Journal of Combinatorial Theory 10 (1971), 74-79.
- [11] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific Journal of Math. 5 (1955), 285-309.

Arcs qui se coupent

8.2. Introduction

Le théorème classique des cordes qui se coupent est bien connu : si AB et PQ sont des cordes d'un cercle qui se coupent en O , alors $AO \cdot OB = PO \cdot OQ$. Dans cet article, nous prouvons un analogue naturel de ce résultat : que le rapport $PO \cdot OQ / AO \cdot OB$ est borné supérieurement et inférieurement sur les courbes convexes C^2 de courbure bornée. La question a été postulée par Alan Beardon, qui a prouvé un résultat connexe : étant donné la même configuration, mais sans conditions de courbure ou de régularité sur la courbe, et avec les longueurs des deux cordes bornées inférieurement, alors le rapport est borné supérieurement et inférieurement [1].

Le résultat est le suivant :

Théorème 1. *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de tous les domaines ouverts convexes dont la frontière est une courbe admissible avec courbure bornée supérieurement et inférieurement par des nombres positifs K et k respectivement, et soit D un membre de $\mathcal{D}$. Soient AB et PQ des cordes de D qui se coupent en O dans D . Alors*

$$\frac{k}{K} \leq \frac{PO \cdot OQ}{AO \cdot OB} \leq \frac{K}{k}.$$

Pour K et k donnés, cette borne est la meilleure possible. De plus, les inégalités sont strictes sauf si D est un disque (où $K = k$).

Une courbe admissible est toute courbe pour laquelle notre version étendue du théorème de roulement de Blaschke (Théorème 3) est valable. En particulier, elle inclut la classe des courbes qui sont C^2 sauf éventuellement en un nombre fini de points, où elle est C^1 et où, de plus, la courbure en tous les points C^2 , et les limites de la courbure lorsque les points C^1 sont approchés de chaque côté, sont bornées supérieurement et inférieurement.

Nous ne prouverons que la borne supérieure ; la borne inférieure suit par symétrie. Nous penserons généralement en termes de rayons de cercles plutôt que de courbures et définissons

$$R = \frac{1}{k}, \quad r = \frac{1}{K};$$

donc $0 < k \leq K$ et $0 < r \leq R$.

Pour prouver le résultat, nous notons d'abord le principe général suivant qui apparaît à plusieurs endroits sous différentes versions durant la preuve : étant donné un domaine D avec les cordes AB et PQ fixées, si nous avons un domaine $E \supset D$, avec AB aussi une corde de E et étendant PQ pour rencontrer ∂E en P' et Q' , alors

$$\frac{P'O \cdot OQ'}{AO \cdot OB} \geq \frac{PO \cdot OQ}{AO \cdot OB}.$$

En particulier, ceci signifie que pourvu que nous puissions trouver un E convenable pour tout choix de D et d'une paire de cordes PQ, AB , et que nous connaissions le théorème pour E , nous pouvons le dériver pour D . Dans la section 2, nous définirons une famille $\mathcal{E}$ et montrerons qu'elle contient

toujours un E approprié. Puis dans la section 3 nous prouvons ce dont nous avons besoin du résultat pour $\mathcal{E}$, ce qui nous donne la partie principale du Théorème 1.

Nous montrons ensuite dans la section 4 que notre résultat est le meilleur possible, et enfin dans la section 5 que si la courbure n'est pas bornée dans l'une ou l'autre direction, alors aucune telle borne n'existe.

8.3. Courbure

La courbure $k(s)$ d'une courbe C^2 est définie par

$$k(s) = \frac{d\theta}{ds},$$

où s est la longueur d'arc, et θ est l'angle que fait la tangente à la courbe en ce point avec une droite fixe. La courbe doit être C^2 pour que ceci (en particulier $d\theta$) soit défini.

Nous aurons besoin du résultat suivant : l'argument est tiré de [2], partie du Théorème 2-14 et de la discussion qui précède.

Soient f et g deux courbes qui sont tangentes en un point. Nous pouvons supposer que c'est l'origine et le point 0 des deux courbes, et que la tangente est l'axe des x . Parce que la fonction θ est continue pour une courbe C^2 , il existe un intervalle le long de l'axe des x pour lequel les deux courbes peuvent être considérées comme des fonctions $F(x)$ et $G(x)$: l'intervalle étant celui sur lequel $|\theta_f|, |\theta_g| < \pi/2$. Nous définissons f comme étant au-dessus de g si $F(x) \geq G(x)$ avec égalité seulement en 0. Nous avons maintenant ce qui suit :

Lemme 2. *Soient f et g comme ci-dessus. Si $k_f(0) > k_g(0)$, alors f est au-dessus de g en 0.*

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant, qui est une version du théorème de roulement de Blaschke donnée dans [3] :

Théorème 3. *Soient C et $\tilde{C}$ deux courbes convexes fermées C^2 qui sont tangentes l'une à l'autre en un point avec la même normale unitaire en ce point et pour $P \in C$ et $\tilde{P} \in \tilde{C}$, $k(P) \leq k(\tilde{P})$ si les tangentes unitaires en P et $\tilde{P}$ sont égales. Alors $\tilde{C}$ est entièrement contenue dans l'ensemble convexe fermé borné par C .*

La preuve fonctionne également pour des courbes qui ne sont C^1 qu'en un ensemble fini de points : le seul changement que nous devons faire est que lorsqu'un des points C^1 est considéré, les parties de la courbe de part et d'autre de celui-ci doivent être considérées comme des courbes C^2 séparées, mais toutes deux avec les propriétés de courbure correctes.

Nous n'aurons besoin du résultat que dans les cas suivants :

Lemme 4.

- (i) *Soit D une courbe lisse convexe avec courbure bornée inférieurement par k . Alors D est à l'intérieur de tout cercle de rayon $1/k$ tangent à D en un point.*

- (ii) Soit D une courbe lisse convexe avec courbure bornée supérieurement par K . Alors D est à l'extérieur de tout cercle de rayon $1/K$ tangent à D .

8.4. Construction de E

Pour $R \geq r > 0$ et $0 \leq \beta \leq \pi/2$, nous définissons $E(R, r, \beta)$ comme suit (voir Figure 1). Soient

$$x_0 = (R - r) \sin \beta, \quad y_0 = (R - r) \cos \beta.$$

Définissons Γ_2 et Γ_4 comme les cercles de rayon r centrés en $(x_0, 0)$ et $(-x_0, 0)$, Γ_1 et Γ_3 comme les cercles de rayon R centrés en $(0, -y_0)$ et $(0, y_0)$, et C_i comme le centre de Γ_i . Alors un calcul facile montre que Γ_1 et Γ_2 sont mutuellement tangents en un point $I_1 = (R \sin \beta, r \cos \beta)$. (Notez qu'un tel point doit être sur la droite étendue $C_1 C_2$.) Il en va de même par symétrie pour les cercles restants, et donc nous pouvons définir $E(R, r, \beta)$ comme le domaine borné par les arcs extérieurs des quatre cercles. Nous définissons $\mathcal{E}$ comme l'ensemble de tous ces $E(R, r, \beta)$.

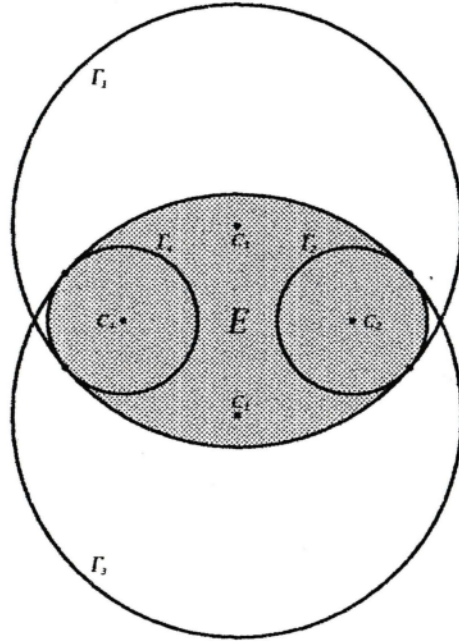


Figure 1

Maintenant, commençons avec un domaine D et deux cordes AB et PQ se rencontrant en O dans D . Définissons γ_1 , centré en C_1 , comme le cercle de rayon R tangent à D en A , et γ_3 , centré en C_3 , celui de rayon R tangent en B . Par la partie (i) du Lemme 3, γ_1 et γ_3 contiennent tous deux D . Définissons L comme leur intersection, une région en forme de lentille. Si γ_1 et γ_3 coïncident, alors L est un cercle, et donc nous avons immédiatement que $PO \cdot OQ / AO \cdot OB \leq 1$, et nous écarterons ce cas de toute discussion ultérieure. Sinon, orientons l'image de telle sorte que les centres de γ_1 et γ_3 soient sur l'axe des y , équidistants de l'origine.

Notez que pour un β approprié, γ_1 et γ_3 sont les mêmes que les Γ_1 et Γ_3 dans la construction de $E(R, r, \beta)$, et c'est ce domaine (que nous appellerons simplement E) que nous essaierons d'ajuster à l'intérieur de D . Nous définissons E' comme le sous-ensemble de L qui se trouve sur ou à l'intérieur

d'un cercle de rayon r dont l'intérieur est à l'intérieur de L . Nous savons que D est contenu dans E' , puisque par la seconde partie du Lemme 3, nous avons un cercle à l'intérieur de D touchant chaque point de la frontière, et par convexité l'intérieur de D est aussi dans E' . Donc si nous pouvons montrer que $E' \subset E$, nous avons terminé. La preuve, bien qu'élémentaire, est quelque peu désordonnée, et est omise. $\square$

En fait $E' = E$: ce fait est évident si l'on dessine un diagramme.

8.5. Preuve du théorème pour $\mathcal{E}$

Nous fixerons un $E(R, r, \beta)$ particulier et l'appellerons simplement E . Nous notons immédiatement ce qui suit : E est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Nous n'avons besoin de prouver le théorème pour E que dans le cas où A et B se trouvent sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$: puisque ceci est forcé par la construction que nous avons utilisée dans la section 2. Nous aurons toujours O dans le quadrant $\Gamma_1\Gamma_2$, et A sur Γ_1 .

Nous pouvons immédiatement traiter le cas où A et B sont tous deux sur Γ_1 , puisqu'alors l'un de P ou Q (nous pouvons supposer le premier), est aussi sur Γ_1 . Étendons OQ pour rencontrer Γ_1 en R . Le théorème des cordes qui se coupent pour Γ_1 dit que

$$OP \cdot OQ / OA \cdot OB \leq OP \cdot OR / OA \cdot OB = 1,$$

ce qui nous donne le résultat que nous voulons ici. Donc nous supposerons que B est sur Γ_3 .

Nous fixons maintenant O et considérons quels choix des autres points maximisent le rapport que nous pouvons obtenir : d'abord AB puis PQ .

Lemme 5. *Pour un O fixé, avec A sur $\partial E \cap \Gamma_1$ et B sur $\partial E \cap \Gamma_3$ tels que O soit sur AB , $AO \cdot OB$ est minimal lorsque AB est parallèle à l'axe des y .*

Preuve. (Voir Figure 2) Soient A, B un choix arbitraire satisfaisant les conditions, et R, S les points équivalents sur la verticale passant par O . Nous requérons $OR \cdot OS \leq OA \cdot OB$.

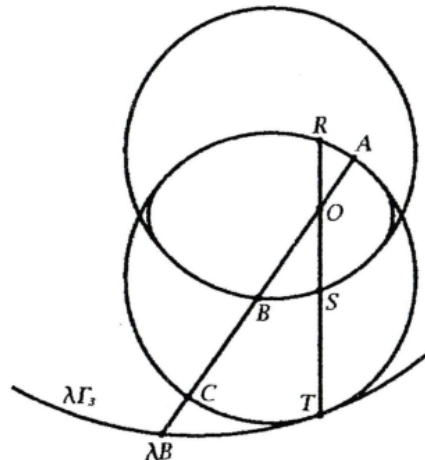


Figure 2

Étendons OB pour rencontrer Γ_1 à nouveau en C ; T est le point équivalent sur OS . Par le théorème des cordes qui se coupent appliqué à Γ_1 , $OA \cdot OC = OR \cdot OT$, donc notre résultat désiré est équivalent à $OT/OS \geq OC/OB$. Soit $\lambda = OT/OS$, et dilaton Γ_3 par un facteur λ centré en O . Puisque OT est parallèle à la droite joignant les centres des deux cercles et qu'ils ont le même rayon, les angles qu'il fait avec les tangentes en S et T sont les mêmes, et donc $\Lambda\Gamma_3$ est tangent à Γ_1 en T . Considérons l'action de cette dilatation sur B : il devient un point sur $\Lambda\Gamma_3$ qui est à l'extérieur de Γ_1 sauf en T (deux cercles tangents de tailles différentes), et donc $\lambda OB > OC$, ce qui nous donne l'inégalité que nous voulons.

Lemme 6. *Pour un O fixé, avec P et Q sur ∂E tels que O soit sur PQ , $OP \cdot OQ$ est maximal lorsque PQ est parallèle à l'axe des x .*

Preuve. (Voir Figure 3) Soit PQ arbitraire satisfaisant les conditions, et RS les points équivalents sur la droite passant par O parallèle à l'axe. Si nous pouvons trouver un cercle pour lequel RS est une corde, et qui contient E , alors nous avons terminé, puisque nous étendons OP en P' et OQ en Q' sur ce cercle, et alors $OP \cdot OQ < OP' \cdot OQ' = OR \cdot OS$ par le théorème des cordes qui se coupent qui lui est appliqué.

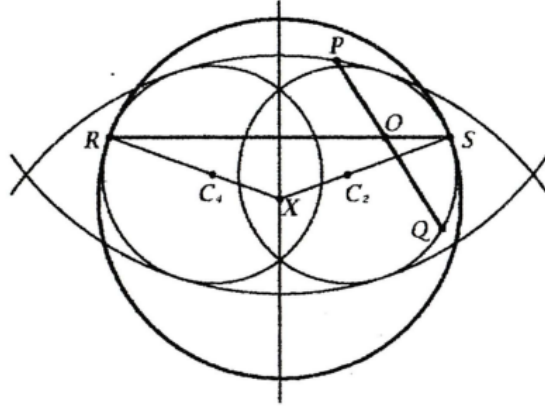


Figure 3

Si R et S sont sur Γ_1 , alors prenons simplement Γ_1 comme cercle. Sinon, considérons les diamètres de Γ_2 et Γ_4 en R et S . Leur point d'intersection X (en les étendant si nécessaire) est sur l'axe des y par symétrie. Traçons le cercle centré là, et passant par R , et appelons-le C . Il passe aussi par S (encore par symétrie). Pour montrer qu'il contient E , nous comparons la distance à R avec la distance à d'autres points de ∂E . Nous utilisons le fait que pour un cercle arbitraire C et un point X , la distance de X aux points de C a un minimum et un maximum, atteints aux deux extrémités du diamètre de C qui passe par X , le minimum étant le point du même côté que le centre, et le maximum étant le point du côté opposé.

Pour un point W sur Γ_2 , nous obtenons immédiatement que $XW \leq XR$. Si W se trouve sur Γ_1 , alors nous savons que l'intersection avec l'axe des y est soit un minimum soit un maximum : puisque X est au-dessus de C_1 (car I_1C_1 et RX se croisent en C_2) nous savons que c'est un minimum, donc nous avons $XW \leq XI_1 \leq XR$, comme requis. Donc ce cercle contient E comme requis.

Ayant établi que les seuls cas que nous devons considérer sont ceux avec AB vertical et PQ horizontal, nous pouvons maintenant calculer explicitement le rapport $PO \cdot OQ / AO \cdot OB$. L'argument se divise en deux cas. Le premier est celui où P et Q sont tous deux sur Γ_1 . Nous notons d'abord que pour les mêmes raisons qu'au Lemme 5, $OP \cdot OQ / OA \cdot OB = OC / OB$. P et Q ont tous deux des coordonnées $y \geq r \cos \beta$ (ils sont au-dessus de I_1, I_4), donc la même condition s'applique à O , et celle de B est $\leq -r \cos \beta$, donnant $OB = (2r + \mu) \cos \beta$, avec $\mu \geq 0$. $BC = 2(R - r) \cos \beta$ (puisque BC est parallèle à la ligne des centres). En mettant tout ensemble nous obtenons $OC / OB = (2R + \mu) / (2r + \mu) < R / r$ comme requis.

L'autre cas a P et Q sur Γ_2 et Γ_4 . Soient A et P des points génériques sur Γ_1 et Γ_2 respectivement et avec les hypothèses que nous avons sur AB et PQ étant parallèles aux axes, nous avons que A et B sont $(\pm R \sin \alpha, R \cos \alpha - (R - r) \cos \beta)$ et P et Q sont $(r \sin \gamma + (R - r) \sin \beta, \pm r \cos \gamma)$ avec $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Donc nous avons

$$\frac{PO \cdot OQ}{AO \cdot OB} = \frac{(r \sin \gamma + (R - r) \sin \beta + R \sin \alpha)(r \sin \gamma + (R - r) \sin \beta - R \sin \alpha)}{(R \cos \alpha - (R - r) \cos \beta - r \cos \gamma)(R \cos \alpha - (R - r) \cos \beta + r \cos \gamma)}.$$

Nous voulons que ceci soit inférieur à R/r , ce qui est équivalent à $R \cdot AO \cdot OB - r \cdot PO \cdot OQ \geq 0$. En divisant les deux membres par r^3 , en écrivant λ pour R/r , et en exprimant les termes comme des différences de carrés nous obtenons

$$R \cdot AO \cdot OB - r \cdot PO \cdot OQ = \lambda((\lambda \cos \alpha - (\lambda - 1) \cos^2 \beta) - \cos^2 \gamma) - (\sin \gamma + (\lambda - 1) \sin^2 \beta) + \lambda^2 \sin^2 \alpha$$

Ceci peut être simplifié en

$$(\lambda - 1)(\lambda^2(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \beta - \sin \gamma)^2) \quad (*)$$

qui est positif comme requis.

Ayant maintenant prouvé le résultat (ou du moins la partie dont nous avons besoin) pour $\mathcal{E}$, nous pouvons le dériver pour $\mathcal{D}$ pour les raisons données précédemment. La preuve de la partie principale du Théorème 1 est maintenant complète.

8.6. Optimalité

Nous pouvons maintenant montrer que le résultat est le meilleur possible, et que l'égalité n'a lieu que lorsque D est un disque. Ce dernier point est plus facile : si $PO \cdot OQ / AO \cdot OB = R/r$, alors $(*) = 0$, donc soit $\lambda = 1$, ce qui implique que D est un disque, soit $\alpha = \beta = \gamma$. Cependant dans ce cas A et P coïncident, et donc O est sur la frontière de D , et donc pas dans D .

Pour montrer qu'il est le meilleur possible, nous commencerons dans $\mathcal{E}$: considérons les cas où $\alpha = \beta$. Ici (en utilisant la même simplification que précédemment), nous avons

$$\frac{PO \cdot OQ}{AO \cdot OB} = \frac{(\sin \gamma + (2\lambda - 1) \sin \beta)(\sin \gamma - \sin \beta)}{(\cos^2 \beta - \cos^2 \gamma)}.$$

Ceci se simplifie en

$$\frac{(\sin \gamma + (2\lambda - 1) \sin \beta)}{(\sin \gamma + \sin \beta)},$$

qui tend vers λ lorsque γ tend vers β .

Ayant montré que pour tout $E \in \mathcal{E}$ nous avons une suite de paires de cordes avec le rapport tendant vers λ , nous choisirons une paire donnée, et trouverons une suite de domaines E'_ϵ avec une frontière C^2 , qui approximent E de telle manière que $PO \cdot OQ / AO \cdot OB$ soit aussi approximé. Nous pouvons et allons supposer que $\beta + \epsilon < \gamma$. (Pour simplifier la notation, le ϵ sera implicite.)

Comme E est convexe, nous pouvons considérer la courbure de sa frontière, $k_E(\theta)$, comme une fonction de l'angle de la normale unitaire à l'axe positif des x : nous trouvons que dans le premier quadrant elle vaut K sur $0 \leq \theta < \beta$ et k sur $\beta < \theta \leq \pi/2$ et n'est pas définie en β . Nous pouvons déformer ceci en une fonction continue en faisant une interpolation linéaire, et donc définir $k_{E'}(\theta)$ comme $K - \epsilon(K - k)$ sur $\beta \leq \theta \leq \beta + \epsilon$ et k_E sur le reste du premier quadrant, en l'étendant à tout $[0, 2\pi]$ par symétrie. Soit E' le domaine dont la frontière a pour fonction de courbure $k_{E'}$: nous savons que la courbe est complète par symétrie, et aussi bien définie à une isométrie du plan près (Théorème 2-10 de [6]) : nous supposons qu'elle a la même orientation que E .

Nous voulons maintenant montrer que le rapport approxime celui de E . Soit A' le point sur E' équivalent à A sur E (en ce sens que les tangentes aux deux courbes en ces deux points sont parallèles), et de même pour les autres points. O' est l'intersection de $A'B'$ et $P'Q'$. Puisque AB et PQ sont purement verticaux et horizontaux, respectivement, et que les mêmes propriétés se transportent à $A'B'$ et $P'Q'$, la distance AO est juste la différence des coordonnées y entre A et P . Pour une courbe arbitraire, ceci est juste

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} \sin \theta \, ds \right| = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta}{k(\theta)} \, d\theta \right|,$$

par la définition de la courbure, où θ est l'angle de la tangente à l'axe horizontal positif.

Donc nous avons que

$$AO = \left| \int_{\beta}^{\gamma} \frac{\sin \theta}{K} \, d\theta \right|$$

(ce qui est égal à $r \cos \beta - r \cos \gamma$ puisque $r = 1/K$), et de même

$$A'O' = \left| \int_{\beta}^{\beta+\epsilon} \frac{\sin \theta}{k_L(\theta)} \, d\theta + \int_{\beta+\epsilon}^{\gamma} \frac{\sin \theta}{K} \, d\theta \right|,$$

qui tend clairement vers AO lorsque ϵ tend vers 0. $B'O' = A'O'$, et nous pouvons produire un argument similaire pour $P'O'$ et $Q'O'$, donc $P'O' \cdot O'Q' / A'O' \cdot O'B'$ tend vers $PO \cdot OQ / AO \cdot OB$ lorsque ϵ tend vers 0.

Nous avons donc une suite E'_ϵ avec $\sup PO \cdot OQ / AO \cdot OB \rightarrow \lambda$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ comme requis. Une question pertinente est de savoir s'il existe un domaine satisfaisant les conditions dont le sup est réellement égal à λ . Je conjecture que la réponse est non (sur la base de calculs d'exemples particuliers) mais j'ai peu d'idée de comment tenter une preuve.

8.7. Courbure non bornée

Nous prouvons maintenant que si notre domaine est borné, avoir une borne sur la courbure est nécessaire pour avoir une borne sur le rapport, puisque nous avons :

Théorème 7. *Soit D un domaine borné convexe simplement connexe dont la frontière est une courbe convexe C^2 avec courbure soit non bornée supérieurement soit non bornée inférieurement, alors nous pouvons trouver des cordes AB et PQ de D telles que $PO \cdot OQ / AO \cdot OB$ soit arbitrairement grand ou petit.*

Preuve. Comme précédemment, nous avons seulement besoin de considérer la limite supérieure. Considérons les deux cas :

(i) Courbure non bornée inférieurement (Figure 4)

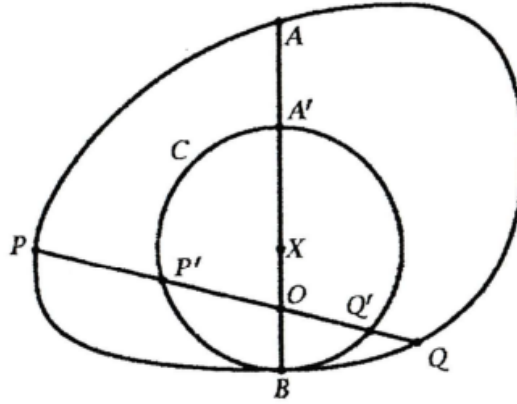


Figure 4

Choisissons un k . Nous pouvons trouver un point B où la courbure est inférieure à k . Traçons le cercle de courbure $2k$ qui est tangent à D en B : appelons-le C et son centre X . Soit A l'autre point d'intersection de BX avec ∂D . Alors il y a un intervalle de ∂D autour de B avec la propriété que tout, sauf B , est à l'extérieur de C , en appliquant le Lemme 2. Choisissons P et Q dans cet intervalle, tels que PQ coupe AB en un point O qui est plus près de B que X ne l'est. Définissons maintenant P' , Q' et A' comme les points de rencontre de OP , OQ et OA avec C . Le théorème des cordes qui se coupent pour le cercle nous donne que $P'O \cdot OQ' = A'O \cdot OB$. Par construction, $OP > OP'$ et $OQ > OQ'$. Aussi $A'O$ est au moins $1/(2k)$ (le rayon de C) puisque $A'B$ est un diamètre. Cependant, nous savons que D est borné, et donc a un diamètre fini d , ce qui donne une borne supérieure sur OA . Donc $PO \cdot OQ > P'O \cdot OQ' = A'O \cdot OB' = (A'O/AO)AO \cdot OB$ par conséquent. Nous avons donc que $PO \cdot OQ / AO \cdot OB > 2k/d$. Faisons tendre k vers 0 et nous avons le résultat.

(ii) Courbure non bornée supérieurement (Figure 5)

L'argument ici est à peu près le même. D est ouvert, et donc il y a un disque $B(X, d)$ à l'intérieur. Encore une fois, fixons une courbure k , et cette fois trouvons un point Q où la courbure est supérieure à k , et traçons le cercle de courbure $k/2$ tangent à D en Q , encore appelé C . Étendons QX pour rencontrer D à nouveau en P . Nous pouvons trouver A et B à l'intérieur de C tels que AB coupe

8.8. Références

- 27

Une lettre de Blanche Descartes

Monsieur le rédacteur du journal Euréka !

Monsieur, je voudrais soumettre à votre journal le problème qui suit.

Un problème élémentaire difficile :

Si a, b et c sont des nombres entiers positifs satisfaisant l'équation

$$a^2 + b^2 = c(1 + ab),$$

démontrer que c est un entier carré (par exemple $a = 2, b = 8, c = 4 = 2^2$).

On m'a dit que c'est un problème très difficile. Même les mathématiciens les plus habiles du monde ne sont pas parvenus à le résoudre.

Néanmoins on m'a dit... qu'il y a une méthode simple pour le résoudre, si on la connaît... Moi je ne la connais pas.

Blanche Descartes,

Cité universitaire, Paris, France

Cours que vous avez peut-être manqués

Groupes, anneaux et corps

“ X est une constante variable.”

“Vous voulez écrire les bons mots, pas rendre cela autre chose qu’évident...” “Vérifiez-moi, au premier rang ; vous êtes meilleur que moi à ce jeu.”

Analyse

“Cependant, cette notation est inutile.”

Analyse approfondie

“Je me suis métamorphosé pendant quelques secondes en mathématicien appliqué.”

“Ce théorème est remarquable principalement parce qu’il n’est pas dû à Cauchy.”

“J’espère que la phrase “la différentiation est l’intégration” aura un certain sens après cette preuve.”

Probabilités

“Euh, je ne sais pas pourquoi j’ai dit tout ça...” [à la moitié d’un cours !]

Projets informatiques

“Cependant, nous recommandons que les Macintosh ne soient utilisés que par des utilisateurs expérimentés.”

Analyse fonctionnelle

“Ce n’est pas complètement trivial. Je veux dire, c’est assez trivial, mais ce n’est pas complètement trivial.”

“La suite (e_n) est assez unique.”

Calcul et méthodes

“Voici une preuve qui marche la plupart du temps - c’est une sorte de preuve d’ingénieur.”

Anneaux, corps et modules

“Je peux vous assurer que nous ne sommes pas intéressés par vous en tant qu’individus.”

“Si vous voulez devenir un grand mathématicien, évitez de vous appeler Smith.”

“Je pourrais dire ceci en 30 secondes si je parlais assez vite.”

“C’est une preuve en une ligne à condition que la ligne soit assez longue.”

Mécanique des fluides biologiques

“M. X étudie la locomotion animale. Il a commencé avec les bipèdes, et vient de terminer les quadrupèdes. Vous pouvez considérer un quadrupède soit comme deux bipèdes collés ensemble, soit comme une petite section d’un infinitipède.”

Relativité restreinte

“Vous utilisez ces choses depuis longtemps, mais parce que c’est la même chose vous ne remarquez pas qu’elles sont différentes.” (Vecteurs contravariants et covariants)

Relativité générale

“Peut-être plus tard je retiendrai le c .”

Dynamique

“Il y a un π et un 2 - cela fait 2π .”

L’origine de l’Univers

“Le prolongement analytique vous permet d’étendre quelque chose à autre chose sans vraiment le changer, donc par exemple le New Labour est un prolongement analytique du vieux Parti conservateur.”

Dynamique atmosphère-océan

“Nous allons tous commencer à tourner aujourd’hui.”

Réseaux stochastiques

“Par le théorème fondamental des polycopiés, il existe une erreur avec probabilité un.”

Ondes sismiques

“Grand oméga est bien sûr extrêmement petit.”

Une courbe de Peano remplissant l'unité $[0, 1] \times [0, 1]$

