

Sur quelques conséquences de l'hypothèse de Riemann et autres poèmes

1. Introduction

Dans cet article, je souhaite examiner quelques-unes des façons dont la soi-disant hypothèse de Riemann influence les questions relatives à la distribution des nombres premiers.

Dans son mémoire de 1859, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (pour une traduction anglaise, voir [1]), B. Riemann a montré que la clé pour étudier la distribution des nombres premiers résidait dans l'étude de la fonction zêta.

Celle-ci est définie pour $\sigma > 1$ par la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad [\sigma = \Re(s)] \quad (1)$$

Elle admet un prolongement analytique à tout le plan complexe avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. On sait que $\zeta(s)$ s'annule aux points $s = -2, -4, -6, \dots$, les zéros triviaux. On définit la bande critique comme l'ensemble des $s = \sigma + it$ tels que $0 < \sigma < 1$. La fonction $\zeta(s)$ possède une infinité de zéros dans cette bande, symétriques par rapport à l'axe réel.

L'importance de $\zeta(s)$ a été illustrée par Hadamard et de La Vallée Poussin en 1896 lorsqu'ils ont démontré le Théorème des Nombres Premiers (TNP).

Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$. Alors le théorème des nombres premiers énonce que

$$\pi(x) \sim x / \log x.$$

Et en fait, une meilleure approximation de $\pi(x)$ est donnée par

$$\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Ce résultat avait été conjecturé par Gauss à partir de preuves numériques dès 1793. Mais la preuve d'Hadamard et de La Vallée Poussin a montré que le théorème des nombres premiers est impliqué par (et implique en fait) que $\zeta(s)$ n'a pas de zéros sur la ligne $\Re(s) = 1$. Il est facile de voir par intégration par parties que

$$\text{li}(x) \sim x / \log x.$$

Ainsi, le théorème des nombres premiers énonce

$$\pi(x) = \text{li}(x) + o(x / \log x).$$

Si nous exigeons que $\zeta(s)$ n'ait pas de zéros sur $\Re(s) = 1$ et aucun non plus dans une région à gauche de cette ligne, nous constatons que nous pouvons améliorer le terme d'erreur $o(x/\log x)$. Pourtant, les meilleures régions sans zéros que nous ayons trouvées sont de la forme $\{s = \sigma + it : \sigma > 1 - \eta(t)\}$, où $\eta(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Il n'a pas été démontré qu'il existe un $\delta > 0$ tel qu'il n'y ait pas de zéros $\rho = \beta + it$ avec $\beta > 1 - \delta$.

Pourtant, la remarquable conjecture de Riemann, qui est la seule dans son mémoire qui n'ait pas encore été prouvée, est la suivante...

Hypothèse de Riemann : tous les zéros de la fonction ζ de Riemann se trouvent sur la ligne $\Re(s) = 1/2$, à l'exception des zéros triviaux.

C'est-à-dire que nous devrions être autorisés à prendre $\delta = 1/2$ ci-dessus.

L'implication pour le théorème des nombres premiers est que

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O(\sqrt{x} \log x)$$

Mais bien que l'hypothèse de Riemann dise tout ce qu'il y a à dire sur les parties réelles des zéros non triviaux, elle laisse des questions sans réponse sur la distribution de leurs parties imaginaires.

Il existe cependant une conjecture supplémentaire, due à Montgomery, qui, avec l'hypothèse de Riemann, donne plus d'informations sur la distribution verticale. Malheureusement, celle-ci est trop technique pour être énoncée ici.

Cependant, avec une forme de cette conjecture et l'hypothèse de Riemann, Heath-Brown a montré

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O(\sqrt{x} \log x)$$

Ainsi, même si l'hypothèse de Riemann était prouvée, il resterait d'autres questions sur la distribution des nombres premiers.

2. Généralisation

Soit q un entier positif donné, différent de 1.

Une fonction χ (d'une variable entière) est appelée un caractère (mod q) si elle possède les trois propriétés suivantes :

- (i) $\chi(n) = 0$ si et seulement si $(n, q) > 1$
- (ii) $\chi(n + q) = \chi(n)$
- (iii) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$

(où (n, q) désigne le plus grand commun diviseur). Le caractère est appelé caractère principal.

On peut montrer que le nombre de caractères est égal à $\phi(q)$, le nombre d'entiers $0 < m < q$ avec $(m, q) = 1$.

En utilisant ceux-ci, nous définissons les séries L de Dirichlet,

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Celles-ci partagent de nombreuses propriétés avec la fonction ζ . Elles admettent toutes un prolongement analytique au plan complexe. Mais les $L(s, \chi)$ avec $\chi \neq \chi_0$ n'ont pas de pôles, tandis que $L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s})$ a un pôle en $s = 1$. Elles ont aussi une infinité de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ avec $0 < \beta < 1$, c'est-à-dire qu'elles ont la même bande critique. Pourtant, les questions correspondantes sur leur distribution sont beaucoup plus difficiles. Nous pouvons néanmoins formuler une conjecture similaire à celle de Riemann,

Hypothèse de Riemann généralisée : pour toutes les fonctions L , pour tous les modules q , les zéros qui se trouvent dans la bande critique se trouvent en fait sur la ligne $\sigma = 1/2$.

Les séries L de Dirichlet sont fondamentales pour les questions sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Considérons la suite arithmétique $a, a + q, a + 2q, \dots$ où $(a, q) = 1$. Définissons $\pi(x; a, q)$ comme le nombre de nombres premiers $p \leq x$ qui se trouvent dans cette suite. Semblable à la fonction ci-dessus, nous pouvons montrer qu'aucun des $L(s, \chi)$, χ défini mod q , n'a de zéros sur $\Re(s) = 1$. Ceci implique que

$$\pi(x, a, q) \sim \text{li}(x)/\phi(q).$$

Nous voyons que le membre de droite de ceci $\rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Ainsi, nous obtenons le Théorème de Dirichlet, selon lequel il y a une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique $a, a + q, a + 2q, \dots$ où $(a, q) = 1$.

Comme précédemment, nous pouvons estimer l'erreur dans (2) et voir comment elle se rapporte aux régions sans zéros des fonctions L . Malheureusement, notre connaissance de ces régions n'est nulle part aussi bonne que pour $\zeta(s)$. Cela conduit à des expressions compliquées pour le terme d'erreur, pourtant avec l'hypothèse de Riemann généralisée nous obtenons

$$\pi(x, a, q) = \text{li}(x)/\phi(q) + O(\sqrt{x} \log x) \quad \text{pour } q < x.$$

Mais si nous nous intéressons à $x \leq \sqrt{q}$, étant donné que $\phi(q) \geq q/\log \log q$ pour q grand, nous voyons que le terme d'erreur est plus grand que le terme principal dans ce cas. Ainsi, même une hypothèse aussi forte que l'hypothèse de Riemann généralisée ne répondra pas à toutes nos questions dans ce domaine.

3. Différence entre les nombres premiers

Ci-dessus, nous avons vu comment l'hypothèse de Riemann et l'hypothèse de Riemann généralisée influençaient les questions globales sur les nombres premiers, c'est-à-dire leur distribution dans les entiers naturels. Ici, nous nous intéressons aux questions locales, principalement la distance entre nombres premiers consécutifs.

Soit p_n le n -ième nombre premier et $d_n = p_{n+1} - p_n$.

La Conjecture des Nombres Premiers Jumeaux énonce que $d_n = 2$ pour une infinité de n . Mais nous nous intéressons à l'ordre de grandeur de d_n .

Cramér a montré que sous l'hypothèse de Riemann,

$$d_n = O(\sqrt{p_n} \log p_n).$$

Et, avec une forme de la conjecture de Montgomery, $d_n = O(\sqrt{p_n \log p_n})$.

Le meilleur résultat inconditionnel à ce jour est

$$d_n = O((p_n)^{1/2+1/2}).$$

Ce problème est intimement lié à celui de savoir jusqu'à quel tout petit $\eta > 0$ on peut descendre avec η qui soit tel que l'intervalle $[x, x + x^\eta]$ contienne un nombre premier pour tout x suffisamment grand, c'est-à-dire $x > x_0$, disons.

Le résultat de Cramér ci-dessus montre que sous l'hypothèse de Riemann, nous avons un nombre premier dans l'intervalle $[x, x + cx^{1/2} \log x]$, pour tout x , où C est une grande constante absolue.

Mais ce problème a un certain nombre d'approximations non disponibles pour la première interprétation.

Premièrement, au lieu de chercher un nombre premier dans l'intervalle, nous pourrions chercher un nombre ayant au plus deux facteurs premiers, noté P_2 . Dans ce cas, nous pouvons prendre $\eta = 0.455$.

Deuxièmement, au lieu de la condition "pour tout $x > x_0$ ", nous considérons le résultat pour "presque tous" les intervalles, c'est-à-dire que la mesure de Lebesgue de l'ensemble des $x \in [x_1, 2x_1]$ tels que l'intervalle $[x, x + x^\eta]$ ne contienne pas de nombre premier est $o(x_1)$ lorsque $x_1 \rightarrow \infty$.

Dans ce cas, Selberg a montré sous l'hypothèse de Riemann que "presque tous" les intervalles $[x, x + f(x)(\log x)^2]$ contiennent un nombre premier si $f(x) \rightarrow \infty$. Le meilleur résultat inconditionnel, dû à Harman, est $\eta = 1/10 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Nous pouvons combiner ces deux approximations pour prouver que, si $\varepsilon > 0$ est donné, alors "presque tous" les intervalles de la forme $[x, x + (\log x)^{7+\varepsilon}]$ contiennent un nombre P_2 .

Revenant aux questions sur d_n , nous définissons $E = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n}$.

Le théorème des nombres premiers implique $E < 1$.

Hardy et Littlewood, utilisant leur méthode du cercle et l'hypothèse de Riemann généralisée, ont montré que $E < 2/3$.

Si la Conjecture des Nombres Premiers Jumeaux était vraie, alors évidemment $E = 0$. Ceci n'a pas été atteint sous l'hypothèse de Riemann seule, pourtant Heath-Brown a montré $E = 0$ en utilisant une forme de la conjecture de Montgomery ainsi que l'hypothèse de Riemann. Le meilleur résultat inconditionnel, dû à Bombieri et Davenport, est que $E < (2 + \sqrt{3})/8 = 0.46650\dots$

Ainsi, même si les résultats inconditionnels seront supplantés si l'hypothèse de Riemann est prouvée, les techniques et les idées développées pour attaquer ces problèmes ont eu, et continueront d'avoir, des applications importantes à d'autres problèmes.

4. Preuves

Ce qui rend l'hypothèse de Riemann attrayante, outre ses implications dans de nombreux autres problèmes, c'est sa difficulté intrinsèque. Les preuves telles qu'elles se présentent actuellement sont très faibles et circonstanciées. Il semble impossible de trouver quel mécanisme force l'infinité de zéros dans la bande critique à se trouver sur la ligne $\sigma = 1/2$.

Littlewood est même allé jusqu'à écrire, en 1962 : "Dans l'esprit de cette anthologie d'idées à moitié cuites, je devrais aussi consigner mon sentiment qu'il n'y a aucune raison imaginable pour que l'hypothèse de Riemann soit vraie."

Face à une telle opinion, nous ne pouvons offrir que des résultats tels que celui de G.H. Hardy qui a montré, en 1914, qu'il y a une infinité de zéros sur $\sigma = 1/2$. Ceci a été amélioré par Selberg en 1942 : "Le nombre de zéros sur la ligne de $1/2$ à $1/2 + iT$ est au moins $KT \log T$ pour une constante positive K , et pour tout T suffisamment grand."

On sait que le nombre $N(T)$ de zéros $\rho = \beta + it$ dans la bande critique avec $0 < t < T$ satisfait $N(T) \sim (T/2\pi) \log T$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

Ainsi, le résultat de Selberg montre qu'une proportion positive des zéros dans la bande critique se trouve sur $\Re(s) = 1/2$. En 1974, N. Levinson a montré que cette proportion est supérieure à $1/3$.

Un calcul extensif de Rosser qui a montré que les trois premiers millions et demi de zéros (ordonnés par taille d'ordonnée) se trouvent sur la ligne $\sigma = 1/2$ a depuis été supplanté par un calcul encore plus extensif, montrant que c'est vrai pour les deux cents millions un premiers.

Tout cela peut être, pour certains, une preuve suffisante de l'hypothèse de Riemann, selon la vieille blague sur l'ingénieur prouvant que tous les nombres impairs sont premiers. Pourtant, pour les mathématiciens, la recherche de la preuve, ou de la réfutation, de la conjecture continue.

Références

- [1] H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974.

Mini-poèmes

Les contraintes que doit respecter un *mini-poème* ici sont très simples : c'est un poème, normalement biographique, de quatre vers, rimant en AABB. [Les mini-poèmes ayant été traduits, la contrainte de rime n'est plus respectée, sauf pour les deux derniers mini-poèmes, avis aux amateurs.](#) Il n'y a aucune restriction de sujet, et les mathématiciens semblent aussi bons que n'importe qui d'autre à cet exercice d'invention de mini-poèmes. De l'un des plus grands mathématiciens contemporains, il est écrit :

Alexander Grothendieck
Prouva un théorème en une semaine.
Puis il écrivit un livre.
Je ne sais pas combien de temps cela prit.

et

Alexander Grothen
dieck dit "Les échecs, c'est pourri.
Ce qui garde l'esprit en vie
C'est SGA5".

En effet, beaucoup de Français se prêtent à un tel traitement :

Quand on dit à Borel
Que ses théorèmes étaient formidables,
Il dit "Je pense
Qu'ils puent."

"Och aye, hoots, mon !"
S'exclama Alain Connes
En découvrant une foliation
À la gare d'Édimbourg.

André Weil
Écrivit un livre en un diable
Mais Hermann Weyl
Prit tout un temps.

Jean Dieudonné
Fut rempli de consternation
Quand ses éditeurs menacèrent de geler
Le nombre de volumes de son Traité d'analyse.

René Thom
Dit "Je dois acheter une gomme :
Mes erreurs analytiques
Sont catastrophiques"

Comme le montre ce qui précède, il n'y a aucune raison pour qu'un *clerihew* soit en anglais.

Carl Friedrich Gauss
N'allait jamais volontiers hors de chez lui :
Pendant quinze ans il ne parla qu'à son chat
Jusqu'à ce qu'il trouve la loi de réciprocité quadratique.

"Il faut cultiver le jardin"
Dit Élie Cartan.
"Les algèbres de Lie
M'ennuient"

Ce qui nous ramène en France, où

J.-P. Serre
Se mit des pailles dans les cheveux,
Prit un bain de bière
Et devint complètement GAGA.

En faisant cela, il n'était pas seul : beaucoup de mathématiciens deviennent fous.

Saunders MacLane
Devint complètement fou
Et consulta un oracle
Sur des questions catégoriques.

Alan Baker
Fut un jour Quaker
Mais devint complètement mental
Et devint transcendantal.

Plusieurs *clerihews* sont assez proches de chez nous :

Sir Michael Atiyah
Allait venir ici,
Mais les membres de Trinity
Ne ressentirent aucune affinité.

Martin Taylor
Et l'Oncle Bela
Sont payés pour leur savoir
Par Trinity College.

Thompson et Feit
Essayèrent un problème un soir
Et devinrent assez volubiles
Quand ils découvrirent qu'il était soluble.

Cayley
Gaïement
Opine :
"Sur une surface cubique il y a vingt-sept droites"

Paul Dirac
Dit “Remets cet électron en place !
Ou il n’y aura nulle part pour moi
Où me baigner dans la mer d’énergie zéro”

John Edensor Littlewood
Entretenait une maîtresse à Cricklewood.
Sa “nièce” était en fait sa fille :
On sent plutôt qu’il n’aurait pas dû.

Bryan Birch
Fut laissé en plan
Quand Peter Swinnerton-Dyer
Passa à des choses plus élevées.

Le plus souvent, ce ne sont que des balivernes.

La suite de Mayer-Vietoris
Apparaît avec une fréquence remarquable
Mais, malgré tout,
Elle n’est pas spectrale.

Leonhard Euler
Était un travailleur acharné
Pour introduire le castor
Au lac de Genève.

J.H.C. Whitehead
Eut sa vie ultérieure gâchée
Par la fin de son espoir
D’être élu Pape.

Le Monstre qui fut trouvé par Fischer
Était une créature très carnivore,
Tandis que celui déterrée par Griess
Vivait entièrement de riz.

Hermann Weyl
Avait un nom qui pouvait irriter :
Le pseudonyme de quelqu’un d’autre
Était Kröncker.

Georg Cantor
Aimait se livrer à une plaisanterie légère :
Mais causa plutôt une commotion
En la faisant par induction transfinie.

Bernhard Riemann
Se voyait comme un homme viril :
Son haltérophilie n’aurait pas pu être plus nette,
Mais il aurait dû passer plus de temps sur les zéros de zêta.

Les deux découvertes suivantes furent faites indépendamment :

Weierstrass et Bolzano
Jouaient avec du Meccano
Quand ils remarquèrent le fait
Qu'il était séquentiellement compact.

L'abbé Bolzano
Aimait jouer avec du Meccano.
C'est ce passe-temps, sent-on,
Qui le conduisit à prouver la connexité des réels.

Zorn
Était libre quand il naquit
Mais maintenant, à cause de son cerveau,
Partout il est en chaînes.

Artin et Rees
Prouvèrent un théorème chacun
Mais Roch et Riemann
En prouvèrent un entre eux.

La consistance du fromage
Fut découverte avec facilité
Quand Kurt Gödel
Laissa le lait cailler.

Haar
Travaillait derrière un bar.
Dans ses loisirs
Il découvrit une meuzire¹.

Baire, euh
Avait très peu de cheveux :
Au-dessus de son visage à moustaches
Se trouvait un espace de Banach.

Cela suffit amplement.

Contributeurs : Robert Wilson, John Greenlees, Jeremy Rickard, Richard Pinch, Miranda Mowbray, Peter Hall et Gregory Sankaran. Qui a écrit quoi est laissé en exercice au lecteur. Ainsi que les problèmes non résolus consistant à encapsuler Carathéodory, Archimède, Quillen, Ramanujan (prononcez RamAnujan, s'il vous plaît), Pythagore (de préférence en grec) et Kolmogorov (de préférence en russe) en vers. (Et merci à Bill Rose pour la relecture de l'allemand.)

1. mesure.

L'ignorance de Bourbaki

A. R. D. Mathias

Si l'on regarde l'Histoire des mathématiques, on voit des périodes de créativité foisonnante, où de nouvelles idées se développent dans un esprit compétitif et donc très hâtif ; et des périodes où l'on trouve que les idées récemment en vogue sont inexactes, incohérentes, peut-être inconsistantes ; dans ces périodes, il y a une pulsion à consolider les acquis.

J'ai dit "l'Histoire des mathématiques" : mais les mathématiques sont un organisme sociologique complexe, et leur croissance a lieu dans différentes branches et différents pays, voire différentes universités, de différentes manières et à des vitesses différentes. Parfois, des groupes nationaux sentent que les mathématiques de leur pays sont en mauvais état : on en trouve une expression dans l'introduction des éditions (depuis la seconde édition) de *Pure Mathematics* de Hardy, où il remarque qu'il a été écrit avec un enthousiasme destiné à combattre la qualité des mathématiques britanniques du début du siècle, qui n'avaient pas tenu compte du développement des mathématiques en France au XIXe siècle : Legendre, Laplace, Lagrange, Fourier, Cauchy, Dirichlet - qui épousa la sœur de Mendelssohn - Hadamard, Poincaré - une liste très impressionnante de savants de la plus haute distinction.

Après la Première Guerre mondiale, le sentiment en France était très différent, et les jeunes mathématiciens français de l'époque commencèrent à considérer que le flambeau de la recherche mathématique était passé à l'Allemagne - où il y avait en effet de nombreux grands mathématiciens s'appuyant sur les travaux passés de Riemann, Frobenius, Dedekind, Kummer, Kronecker, Minkowski et autres, tels que Klein, Hilbert, Weyl, Artin, Noether, Landau, Hausdorff - et que les mathématiques françaises étaient entrées en déclin.

Ainsi, en 1935, un groupe de jeunes mathématiciens français (listés par Hovally dans une interview [*Mathematical Intelligencer* 7 (2) p. 18] comme H. Cartan, C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné, Sz. Mandelbrojt, R. de Possel et A. Weil) résolut de restaurer la discipline dans leur sujet en écrivant une série de manuels, sous le pseudonyme collectif de Nicolas Bourbaki, visant à donner des exposés définitifs avec une pleine rigueur française de ce qu'ils considéraient comme les domaines les plus importants des mathématiques pures. La question de la rigueur mathématique était tout à fait d'actualité, une plus grande maîtrise que d'habitude ayant eu lieu au début du XXe siècle avec la découverte par Russell d'une faille majeure dans la théorie des classes proposée par Frege.

Frege voulait former pour toute propriété $\Phi(y)$ la classe $\{y \mid \Phi(y)\}$ de tous les objets y ayant la propriété Φ , et en même temps compter toutes ces classes comme des objets auxquels de tels tests d'appartenance pouvaient être appliqués. Si nous écrivons " $a \in b$ " pour " a est un membre de b " et " $a \notin b$ " pour " a n'est pas un membre de b ", nous pouvons exprimer le grand principe de Frege comme suit : si nous notons $\{y \mid \Phi(y)\}$ par C , alors pour tout objet a , $a \in C$ si et seulement si $\Phi(a)$. Russell, développant une idée de Cantor, remarqua que si $\Phi(y)$ est prise comme la propriété $y \notin y$, de ne pas être un membre de soi-même, alors une contradiction en résulte. Car soit B la classe de ces objets qui ne sont pas membres d'eux-mêmes ; en symboles, $B = \{y \mid y \notin y\}$: alors pour tout y , $y \in B$ si et seulement si $y \notin y$; et donc pour le cas particulier où $y = B$, $B \in B$ si et seulement si $B \notin B$.

En réponse à cela, certains voulaient abandonner les domaines les plus spéculatifs des mathématiques, qui faisaient usage de l'infini, particulièrement les théories de Cantor sur les cardinaux et les ordinaux. Kronecker, Poincaré, Brouwer, Hermann Weyl doivent être mentionnés ici.

Mais d'autres - notamment Hilbert - voulaient résister à cette amputation générale, et un programme fut proposé visant à formaliser les mathématiques - le langage, les axiomes, les modes de raisonnement, etc. - et à prouver, par des moyens dont la solidité ne pouvait être mise en doute, que le système résultant était exempt de contradiction, c'est-à-dire consistant.

J'ai dit "formaliser les mathématiques", mais c'est vague : combien de mathématiques pouvons-nous ou devons-nous inclure ? Hilbert certainement souhaiterait garder le travail de Cantor sur les ordinaux dans sa formalisation des mathématiques, car c'est Cantor qui a fait exister Hilbert : Hilbert accéda à la célébrité avec son Théorème de la Base qui, en terminologie moderne, affirme que si tout idéal dans l'anneau commutatif R est engendré par un nombre fini d'éléments, il en est de même de l'anneau $R[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes en les indéterminées $X_1, \dots, X_n$ à coefficients dans R ; et des études récentes ont montré que la preuve de ce théorème non seulement repose sur ω^ω , mais est en un sens exact équivalente à la bonne fondation de ω^ω . Ainsi, quand Hilbert parlait du paradis de Cantor, ce n'était pas un hommage gratuit : il reconnaissait la création d'un cadre conceptuel d'induction transfinie dans lequel la géométrie algébrique pouvait avancer.

Les propres idées de Russell pour éviter les paradoxes conduisirent à sa théorie ramifiée des types ; celle-ci était lourde, et un système plus simple fut proposé par Zermelo dans la première décennie du siècle. Fraenkel et Skolem, dans la troisième décennie, proposèrent l'axiome de remplacement comme renforcement du système de Zermelo ; le système résultant est connu sous le nom de Zermelo-Fraenkel. Avec l'addition de l'axiome du choix, articulé pour la première fois par Zermelo et d'une grande importance en analyse fonctionnelle et en algèbre supérieure, et avec l'axiome de fondation, proposé par von Neumann, ZFC² s'est avéré être un système très utile.

Il y a deux éléments dans le programme de Hilbert que je souhaite souligner : le côté créatif, proposant un système dans lequel travailler ; le côté critique, testant l'adéquation et la consistance du système proposé. Naturellement, le groupe Bourbaki, ou *les bourbakistes*, conscient de la possibilité de contradiction en mathématiques, était déterminé à ce que ses manuels soient exempts de tels problèmes, et en effet un premier volume de leur série, *La Théorie des Ensembles*, fut consacré à l'établissement des fondements nécessaires à leurs volumes ultérieurs. L'autre jour, j'ai eu l'idée de le lire. J'ai été choqué au plus haut point : il semblait être l'œuvre de quelqu'un qui avait lu *Grundzüge der Mathematik* de Hilbert et Ackermann, et *Leçons sur les nombres transfinis* de Sierpiński, tous deux publiés en 1928, et rien depuis.

Ceux d'entre vous qui connaissent la publication du théorème d'incomplétude de Gödel en 1931 verront la signification de ces dates.

Perplexe à la fois par l'attitude de Bourbaki envers les fondements et par son attitude envers la théorie des ensembles, j'ai commencé à sonder l'arrière-plan et j'ai découvert que les bourbakistes avaient publié plusieurs articles dans les années trente et quarante exposant la position du groupe

2. abréviation pour axiomatique de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix

sur les questions des fondements des mathématiques.

Henri Cartan et Jean Dieudonné écrivirent des essais sous leur propre nom sur les fondements des mathématiques. Après la Seconde Guerre mondiale, Nicolas Bourbaki lui-même s'adressa à l'*Association for Symbolic Logic in America*, et son exposé fut imprimé dans le *Journal of Symbolic Logic*. En outre, il écrivit un essai sur *L'Architecture des Mathématiques*, qui fut traduit en anglais et parut dans l'*American Mathematical Monthly*.

Il y a une uniformité dans ces essais : du côté créatif, la théorie des ensembles qu'ils proposent est celle de Zermelo - non, permettez-moi d'insister, Zermelo-Fraenkel - et ils la déclarent adéquate pour toutes les mathématiques ; et du côté critique, ils montrent tous l'influence du programme formaliste de Hilbert. Ce qu'ils ne mentionnent pas, c'est Gödel.

Or ceci est très remarquable. Permettez-moi de commenter le théorème d'incomplétude de Gödel.

Il y eut une réunion à Königsberg en septembre 1930, au cours de laquelle la citoyenneté d'honneur fut conférée à Hilbert, qui avait pris sa retraite de sa chaire à Göttingen le 23 janvier de cette année. Le célèbre et puissant discours, *Naturerkennen und Logik*, qu'il prononça à cette heureuse occasion est informé par son credo qu'il n'y a pas de problèmes insolubles et se termine par son cri de guerre résolu :

“Wir müssen wissen ; wir werden wissen.”
- nous devons savoir, nous saurons.

Avec l'ironie délicate de l'histoire, Gödel avait, la veille même, avec von Neumann mais pas Hilbert dans l'auditoire, annoncé sa preuve d'incomplétude, avec ses applications à tout système tel que l'arithmétique de Peano ou Zermelo-Fraenkel. Or ceci était alarmant : Hilbert avait présenté une réponse très positive aux paradoxes, et des disciples tels que Herbrand avaient, dans l'esprit hilbertien, établi des cas du problème de la décision. Gödel montra qu'il y avait de sérieuses limitations à la proposition de Hilbert. Il montra qu'aucun système satisfaisant à certaines conditions minimales, comme le fait qu'il devrait exister un algorithme disant de toute phrase si elle est l'un des axiomes ou non - clairement une exigence souhaitable - aucun système de ce genre ne capture toutes les mathématiques, et que les preuves de consistance ne peuvent être données que dans des systèmes plus susceptibles d'être inconsistants que celui en discussion.

Quel effet Gödel eut-il sur la communauté mathématique au sens large ?

La chose étrange est qu'il fut largement ignoré.

Nous le voyons le plus emphatiquement dans les écrits des bourbakistes.

Ainsi, Henri Cartan, dans un texte publié en 1943, *Sur le fondement logique des mathématiques*, présente le système de Zermelo, incluant l'axiome du choix ; bien qu'il dise prendre en compte certaines modifications introduites par Fraenkel, il n'inclut pas la principale, l'axiome de remplacement ; il commente que le système de Zermelo est peu pratique, manquant de définitions appropriées de couple ordonné, etc., et il révèle son ignorance des distinctions que Gödel avait soulignées en disant “vrai” là où il veut dire “démonstrable”, “faux” là où il veut dire “réfutable” et “douteux”

(douteuse) là où il veut dire “indécidé”.

Il parle de théories contradictoires, et dit que le problème de décider si une théorie donnée est contradictoire conduit au *Entscheidungsproblem*, qui consiste à trouver une méthode générale pour décider si une relation donnée (= formule) est une identité logique (c’est-à-dire un théorème). Ce problème, dit-il, n’a été résolu que dans des cas particuliers. En général, on ne sait pas comment le faire. Il dit alors : “Mais ces problèmes, si importants soient-ils, sont en dehors de notre sujet.”

Il mentionne la thèse de Herbrand, les *Leçons sur les nombres transfinis* de Sierpiński ; adopte un point de vue qu’il attribue à Dieudonné, mentionnant que ces idées, bien que publiées en 1939, “remontent à 1938” et fait cette déclaration :

une théorie mathématique n’est pas autre chose qu’une théorie logique, déterminée par un système d’axiomes... les êtres de la théorie sont définis ipso facto par le système d’axiomes, qui engendre en quelque sorte le matériel auquel vont pouvoir s’appliquer les propositions vraies ; définir ces êtres, les nommer, leur appliquer les propositions et relations, c’est en cela que consiste la partie proprement mathématique de la théorie logique.

Il mentionne Cantor, Kronecker, Zermelo, Brouwer, le paradoxe de Skolem, Poincaré et Lebesgue, mais pas Gödel !

Des attitudes similaires se retrouvent dans le texte de 1939, cité par Cartan, de Jean Dieudonné : *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*. Il décrit les réalisations de Cantor, que Hilbert avait trouvées si utiles, comme des “résultats si choquants pour le bon sens” ! Il considère la crise des fondements des mathématiques du début du siècle comme ayant été résolue par la doctrine formaliste de Hilbert selon laquelle la correction d’un morceau de mathématiques est une question de savoir s’il suit certaines règles, et non une question d’interprétation ; il commente que “le principal mérite de la méthode formaliste sera d’avoir dissipé définitivement les obscurités qui pesaient encore sur la pensée mathématique” ; et dit qu’“Il reste naturellement à montrer que la conception de Hilbert est réalisable”. Il ne fait aucune mention de Gödel.

Nicolas Bourbaki, dans *The Foundations of Mathematics for the Working Mathematician, Journal of Symbolic Logic*, Volume XIV, 1948, pp. 1–14, présente à nouveau la théorie des ensembles de Zermelo plus l’axiome du choix, et conclut :

“Sur ces fondations, j’affirme que je peux construire tout le corps des mathématiques d’aujourd’hui ; et s’il y a quelque chose d’original dans ma procédure, cela réside uniquement dans le fait que, au lieu de me contenter d’une telle affirmation, je procède à sa démonstration de la même manière que Diogène prouva l’existence du mouvement ; et ma preuve deviendra de plus en plus complète à mesure que mon traité grandira.”

Comme on peut s’y attendre d’après cette déclaration, il n’y a aucune mention, même pas une allusion, à l’existence du travail de Gödel dans cet article.

Dans l’autre essai de Bourbaki, *L’architecture des mathématiques*, il n’y a encore aucune mention de Gödel mais cette fois il y a une allusion à des “difficultés”.

Les questions que je veux maintenant aborder sont : pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas mentionné Gödel ? et pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas remarqué que son système de théorie des ensembles de Zermelo avec axiome du choix était inadéquat pour les mathématiques existantes ?

Je pense que ces questions sont importantes parce que le groupe Bourbaki a eu une grande influence ; je ne conteste pas la valeur positive de ses livres ni l'ampleur de l'accomplissement de leur écriture ; mais je suggère que son attitude envers la logique et la théorie des ensembles, qui a été transmise aux jeunes générations de mathématiciens, est nuisible parce qu'elle exclut la conscience de perceptions de la nature des mathématiques qui sont vivifiantes ; et je vais presque jusqu'à suggérer que si, comme certains le disent, Bourbaki est maintenant mort, il a été tué par la stérilité de ses propres attitudes.

Laissez-moi maintenant suggérer des réponses hautement spéculatives à mes questions.

Premièrement, pourquoi les bourbakistes n'ont-ils pas adapté leurs attitudes pour tenir compte de la contribution suprêmement importante de Gödel aux questions des fondements des mathématiques ?

Regardons quelques-uns des commentaires des bourbakistes sur ces questions.

Bourbaki distingue soigneusement entre le formalisme logique, contre lequel il se positionne, et la méthode axiomatique, qu'il approuve :

Ce que la méthode axiomatique se fixe comme but essentiel, c'est exactement ce que le formalisme logique par lui-même ne peut fournir, à savoir l'intelligibilité profonde des mathématiques. (extrait de *L'architecture des mathématiques*)

Ainsi, par méthode axiomatique, il entend non pas un grand schéma déductif pour toutes les mathématiques, mais simplement la discipline mentale consistant à élaguer les domaines jusqu'à leurs squelettes, pour rendre les similitudes claires et la théorie portable.

L'unité que [la méthode axiomatique] donne aux mathématiques n'est pas l'armure de la logique formelle, qui est l'unité d'un squelette sans vie (*L'architecture des mathématiques*)

Beaucoup de mathématiciens n'ont pas voulu voir dans l'axiomatique autre chose qu'un futile cheveu logique coupé en quatre, incapable de faire fructifier quelque théorie que ce soit.

Rien n'est plus éloigné de la méthode axiomatique qu'une conception statique de la science. Nous ne voulons pas amener le lecteur à penser que nous prétendons avoir tracé un état définitif de la science.

Il est tout à fait possible que le développement futur des mathématiques accroisse le nombre de structures fondamentales, révélant la fécondité de nouveaux axiomes ou de nouvelles combinaisons d'axiomes.

André Weil exprime le point de vue bourbakiste de la logique comme grammaire des mathématiques plus diplomatiquement [œuvres collectées, 1947a discours sur *L'Avenir des mathématiques* à un congrès sur *Les Grands Courants de la pensée mathématique*] :

Mais, si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes.

Ceci révèle bien sûr une croyance qu'il n'y a pas de grands problèmes en logique. Il suggère cependant, sans mentionner Gödel, une conscience que le dernier mot sur la logique n'a peut-être pas été dit :

Il se peut sans doute qu'un jour nos successeurs désirent introduire en théorie des ensembles des modes de raisonnement que nous ne nous permettons pas.

Ce point de vue vital, qui rappelle le dernier paragraphe cité de Bourbaki ci-dessus, doit être contrasté par l'ossification ultérieure exprimée par Dieudonné dans son *Panorama of Mathematics* que "la théorie des ensembles est bien travaillée".

Quelques extraits supplémentaires du manifeste de Bourbaki :

Le principe organisateur sera le concept de hiérarchie des structures, allant du simple au complexe, du général au particulier.

la théorie des groupes,... la théorie des ensembles ordonnés, (y compris les bons ordres),... la théorie des structures topologiques...

Tout cela est assez simple. Mais maintenant vient une véritable bourde :

Les premiers traitements axiomatiques (arithmétique de Dedekind-Peano, géométrie de Hilbert-Euclide) traitaient de théories univalentes, c'est-à-dire de théories entièrement déterminées par leur système complet d'axiomes, contrairement à la théorie des groupes.

La position est que la géométrie telle qu'axiomatisée par Hilbert est complètement déterminée, de sorte qu'un énoncé de géométrie plane démontrable par l'usage de la géométrie solide aura une preuve en géométrie plane ; mais Gödel nous dit que l'arithmétique, telle qu'axiomatisée par Peano ou n'importe qui d'autre, n'est pas complètement déterminée de la sorte.

Ma lecture de tous ces extraits est que Bourbaki avait saisi la valeur positive du travail de Hilbert et de son école, et accueilli l'idée de la réduction de la question de la correction des mathématiques à un ensemble de règles, mais a néanmoins persisté à penser la logique et la théorie des ensembles comme des choses que l'on règle dans le volume un et que l'on oublie ensuite, même après que le travail de Gödel ait montré que le programme de Hilbert ne pourrait jamais être achevé. Pour cette raison, les théorèmes d'incomplétude de Gödel étaient non pertinents pour leur vision des mathématiques : comme beaucoup d'autres scientifiques, ils étaient empêchés par leurs préconceptions de voir la signification de faits qui leur étaient connus.

Les livres ultérieurs de Bourbaki changent de terrain : mais voient toujours la théorie des ensembles comme quelque chose à faire dans le volume un et ensuite oublié. Ainsi, il apparaît que cette exposition majeure des mathématiques est écrite par des gens dont la compréhension du travail concernant les fondements des mathématiques est celle de 1929.

Les mathématiciens sont, encore aujourd'hui, très mal à l'aise dans leur attitude envers la logique. Cela peut avoir quelque chose à voir avec la Seconde Guerre mondiale : Hitler a écrasé la Pologne, qui était entre les guerres le centre de la recherche en logique ; ceux qui se sont échappés ont commencé des écoles de logique aux États-Unis et en Israël qui ont prospéré, laissant l'Europe derrière.

Ainsi, alors que quelqu'un en quatre ans à Cambridge pourrait entendre cinquante conférences sur des sujets logiques, à Harvard ou Princeton il pourrait en entendre environ deux cent cinquante, et à Berkeley, où la logique est prise au sérieux, il pourrait en entendre environ quatre cents.

Je souhaite vous suggérer qu'il n'y a pas de fondements des mathématiques au sens où Bourbaki le croyait ; qu'il n'y a pas de moyens de fonder les mathématiques dans la logique ou les classes ou quoi que ce soit, de sorte qu'une fois qu'une base a été ainsi donnée dans certaines idées primitives, aucune réflexion supplémentaire n'est nécessaire. Je souhaite plutôt suggérer que bien qu'il y ait en effet des questions des fondements des mathématiques, elles ne peuvent être confinées au chapitre un du "Grand traité" ; au contraire, elles imprègnent les mathématiques.

La seconde question que j'ai posée ci-dessus était "pourquoi le groupe Bourbaki n'a-t-il pas utilisé l'insuffisance de la théorie des ensembles de Zermelo comme fondement pour les mathématiques ?"

Je suggère comme réponse qu'ils étaient uniquement intéressés par les domaines des mathématiques pour lesquels Zermelo est adéquat, et que ce domaine peut être facilement décrit comme la géométrie par opposition à l'arithmétique.

Leibniz a écrit qu'il y a deux labyrinthes célèbres dans lesquels notre raison s'égare souvent. L'un est le problème de la liberté et de la nécessité, et l'autre concerne la continuité et l'infini. Sans tenir compte de ce second danger, je souhaite maintenant explorer ce que je crois être le dualisme sous-jacent des mathématiques, à savoir la tension entre les deux intuitions primitives, l'arithmétique et la géométrie. Permettez-moi de commencer par une devinette :

Pouvez-vous décrire un escalier en spirale sans bouger les mains ?

Cette question est difficile, peut-être, parce que les mots sont temporels, arithmétiques ; les spirales sont spatiales.

La question de la relation de la géométrie à l'arithmétique est très arithmétique, et a été discutée par les Éléates.

Bourbaki est conscient de ce problème, et dans *L'Architecture des mathématiques*, écrit :

En effet, tout à fait en dehors des mathématiques appliquées, il a toujours existé un dualisme entre les origines de la géométrie et de l'arithmétique (certainement dans leurs aspects élémentaires), puisque cette dernière était au départ une science de la grandeur discrète, tandis que la première a toujours été une science de l'étendue continue ; ces deux aspects ont apporté deux points de vue qui se sont opposés depuis la découverte des irrationnels. En effet, c'est exactement cette découverte qui a défait la première tentative d'unifier la science, à savoir l'arithmétisation des Pythagoriciens ("tout est nombre").

Si nous remontons d'un siècle, nous trouvons Augustus de Morgan écrivant :

Le raisonnement géométrique et le processus arithmétique ont chacun son office ; les mélanger dans l'instruction élémentaire est préjudiciable pour l'acquisition correcte des deux.

J.J. Sylvester, dans *A probationary Lecture on Geometry* prononcée le 4 décembre 1854, (Œuvres collected, Volume II page 5. Cambridge 1900, republié Chelsea New York 1973) a dit :

Il y a trois idées directrices, trois pour ainsi dire, sphères de pensée, qui imprègnent tout le corps de la science mathématique, à l'une ou l'autre desquelles, ou à deux ou à toutes combinées, toute vérité mathématique admet d'être référée; ce sont les trois notions cardinales, de nombre, espace et ordre.

L'arithmétique a pour objet les propriétés du nombre dans l'abstrait.

En algèbre, vue comme science des opérations, l'ordre est l'idée prédominante.

Le métier de la géométrie est l'évolution des propriétés et relations de l'espace, ou des corps vus comme existant dans l'espace....

C'est le domaine du métaphysicien que d'enquêter sur la nature de l'espace tel qu'il existe en soi, ou par rapport à l'esprit humain. Le métier moins ambitieux mais plus satisfaisant du géomètre est de traiter l'espace comme une réalité objective...

Sans la découverte des sections coniques, attribuée à Platon, la loi de la gravitation universelle n'aurait peut-être jamais été élucidée jusqu'à cette heure.

Platon pouvait assez peu imaginer lui-même qu'il écrivait la grammaire de la langue dans laquelle il serait démontré dans les âges suivants que les pages de l'univers sont écrites.

Celui qui voudrait savoir ce qu'est la géométrie doit s'aventurer hardiment dans ses profondeurs et apprendre à penser et à sentir comme un géomètre.

Platon et son école pensaient qu'il y avait cinq branches des mathématiques; Boèce en pensait quatre; Sylvester réduit à trois: je réduis encore davantage en pensant l'ordre³ comme superstructure des deux autres.

Considérons la thèse qu'il y a deux intuitions, l'intuition arithmétique et l'intuition géométrique.

Les deux intuitions ne sont pas disjointes: le langage de chacune est suffisamment riche pour permettre des traductions de l'autre: dans la théorie des ensembles on peut faire une maquette de la droite réelle en construisant d'abord les rationnels puis (disons) les coupures de Dedekind; et on peut marquer des points également espacés comme points intégraux le long d'une ligne; mais quand de telles traductions sont faites, des paradoxes résultent, les traductions étant des traductions de propriétés formelles, non des traductions des intuitions sous-jacentes.

Ainsi les Pythagoriciens voulaient croire que tout est nombre, mais furent consternés par la démonstration que la diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté. Ici, une simple construction géométrique engendra un paradoxe arithmétique.

Stifel (1487–1567) demanda ce que sont les irrationnels: la géométrie suggère qu'ils sont acceptables, mais comme longueurs, non comme nombres. Il écrivit: "un irrationnel n'est pas un nombre réel parce qu'il se trouve sous quelque nuage d'infinité." Il ne croyait pas en $2\pi r$.

Dans l'autre direction, il y a le paradoxe de Banach-Tarski qui montre, en utilisant l'axiome du choix, qu'une sphère peut être décomposée en un nombre fini de parties qui peuvent être réarrangées

3. l'algèbre donc.

par translations et rotations spatiales pour former deux sphères de la même taille que l'originale. La preuve de ceci est dérivée de l'argument de Schroeder-Bernstein, couplé à l'axiome du choix. Il devrait être mentionné qu'en l'absence de l'axiome du choix le théorème de Banach-Tarski pourrait échouer.

Ici, des arguments naturels dans un contexte ensembliste conduisent à des conclusions paradoxales géométriquement. Ceci est similaire en esprit au résultat de Fibonacci au XIII^e siècle que la solution d'une certaine équation cubique n'est pas l'un des irrationnels d'Euclide.

Récemment, le distingué mathématicien américain Saunders MacLane a appelé à un renouveau de la discussion de la philosophie des mathématiques et a critiqué ce qu'il appelle le grand fondement ensembliste des mathématiques en des termes tels que

- le Grand Fondement Ensembliste est une vue des mathématiques faussement unilatérale ;
- la théorie des ensembles est largement non pertinente pour la pratique de la plupart des mathématiques ;
- logicisme, formalisme et platonisme ont été trop dominés par les notions de théorie des ensembles et de rigueur déductive

Il y a aussi eu des critiques telles que celle de Thom qui dit que la théorie des ensembles semble supprimer la géométrie.

Je suggère que c'est parce que Bourbaki a fossilisé la connaissance mathématique de la logique à son niveau de 1929 que cette attaque prend maintenant forme. MacLane, en d'autres termes, attaque une position dont les logiciens se sont éloignés depuis soixante ans mais où les mathématiciens se trouvent encore.

Je serais d'accord avec le premier commentaire de MacLane et avec celui de Thom, et les relierais à mon idée que la théorie des ensembles est du côté arithmétique plutôt que géométrique des mathématiques. Je qualifierais le second commentaire de MacLane en disant que la théorie des ensembles n'est pas particulièrement pertinente pour la pratique de la géométrie, mais est très pertinente pour l'arithmétique au sens large. Bien que je sois d'accord avec une grande partie de la troisième critique de MacLane, je questionne son usage de l'expression "théorie des ensembles et rigueur déductive".

Il pense à ces deux comme allant de pair, et s'oppose à ce qu'elles se donnent comme la solution ultime pour les mathématiques.

Je voudrais séparer les deux. La logique est l'étude de notre usage du langage : la théorie des ensembles est l'étude de la bonne fondation, et non, comme MacLane le pense, l'étude du processus de formation des ensembles.

C'est la grande différence entre Zermelo-Fraenkel et Zermelo. Zermelo est un système pour soutenir la formation d'ensembles, et est adéquat pour les considérations géométriques ; Zermelo-Fraenkel est un système pour soutenir les définitions par récursion, construisant des structures dans l'inconnu, et est donc adapté au côté arithmétique des mathématiques.

Dans la théorie des ensembles de Zermelo, on ne peut pas prouver que tout bon ordre est isomorphe à un ordinal ; on ne peut pas prouver l'existence de $\omega + \omega$; on ne peut pas justifier la récursion sur les ordinaux ou sur une relation bien fondée arbitraire. Ainsi l'induction, qui est au cœur de l'arithmétique, est absente de (grandes parties de) la géométrie. D'autre part, l'intuition spatiale est absente de l'arithmétique ; donc nous avons besoin des deux.

Je suggère que la nouvelle philosophie des mathématiques pour laquelle MacLane appelle émergera d'une étude de l'interaction entre l'arithmétique et la géométrie.

Pour conclure : le Professeur M.J. Crowe a déclaré qu'il n'y a pas de solutions en mathématiques.

Ceci vaut la peine d'être médité : cela pourrait être vrai. Si c'est vrai, c'est parce que les mathématiques peuvent s'étendre pour accommoder des idées apparemment contradictoires. La préservation dogmatique par Bourbaki de concepts pré-gödeliens nuit à une telle expansion, et donc Bourbaki doit être regardé comme contre-révolutionnaire.

Bases complexes

Adam Chalcraft

Supposons que vous ayez l'une de ces vieilles balances à deux plateaux. En plaçant des objets dans les plateaux, vous pouvez dire lequel est le plus lourd, ou s'ils ont le même poids.

Supposons maintenant que vous vouliez utiliser ces balances pour peser n'importe quel nombre entier d'onces jusqu'à, disons, 40. Quel est le plus petit nombre de poids dont vous pouvez vous passer, et quelles valeurs devraient-ils avoir ? Si vous n'avez jamais vu cette question auparavant, vous aimeriez peut-être prendre le temps de trouver la réponse avant de lire la suite.

L'astuce est que vous pouvez mettre certains des poids dans le même plateau que l'objet que vous essayez de peser, de sorte que chaque poids peut agir comme positif (l'autre plateau), négatif (le même plateau), ou zéro (non utilisé). Comme il y a trois choix, nous sommes en "base trois", donc nous pouvons nous contenter de seulement quatre poids, de valeurs 1, 3, 9 et 27. Vous aimeriez peut-être vérifier ceci.

La différence entre ceci et la base trois normale est que l'ensemble des "chiffres" est $\{-1, 0, 1\}$ au lieu de $\{0, 1, 2\}$. C'est une base parfaitement bonne, et vous pouvez faire toutes les choses habituelles avec, comme la multiplication longue. En effet, elle est meilleure à certains égards, parce que vous pouvez exprimer tous les entiers avec, pas seulement les non-négatifs. Je me référerai au problème qui vient d'être présenté comme à l'Exemple 1.

Exemple 2. Au lieu de changer l'ensemble des chiffres, nous pourrions voir ce qui se passe si nous changeons la puissance. Un exemple utile est la puissance -2 , avec l'ensemble de chiffres $\{0, 1\}$. Les "places" valent maintenant 1, -2 , 4, -8 , et ainsi de suite. Les entiers sont écrits

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \dots & 1101 & 10 & 11 & 0 & 1 & 110 & 111 & 100 & 101 & 11010 & \dots \end{array}$$

Les représentations sont légèrement plus longues, mais incluent aussi les entiers négatifs. L'arithmétique est seulement légèrement plus difficile qu'en base 2 normale. En addition, par exemple, $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, et $1 + 1 = 110$, donc vous posez 0, et reportez 1 dans la colonne suivante et celle d'après.

Exemple 3. Comme dernier exemple avant la théorie, prenons la puissance $(-1 + i)$. L'ensemble de chiffres est encore $\{0, 1\}$. Ceci peut représenter tous les entiers gaussiens (nombres complexes où les parties réelle et imaginaire sont des entiers). Vous aimeriez peut-être essayer d'écrire -1 dans cette base avant de lire la suite.

Théorie

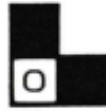
À partir de maintenant, nous ne considérerons que des bases complexes, comme l'Exemple 3.

Définitions. Une base $b = (p, D)$ a deux parties : une puissance p , et un ensemble de chiffres D . La puissance p est un entier gaussien. L'ensemble de chiffres D est un ensemble fini d'entiers gaussiens. D doit contenir 0, parce que toutes les représentations finies ont une chaîne infinie implicite de zéros à gauche.

Une base est dite *injective* si et seulement si aucun entier gaussien ne peut être écrit de plus d'une façon dans la base, *surjective* si et seulement si tout entier gaussien peut y être écrit, et *bijective* si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Bien que cela n'ait pas été mentionné à l'époque, tous les exemples ci-dessus sont injectifs, mais seul l'Exemple 3 est surjectif. Un problème intéressant est celui de caractériser les bases projectives.

Une façon utile d'imaginer une base est de se représenter l'ensemble de chiffres comme une forme composée de carrés dans $\mathbb{C}$, dont l'un est marqué 0. Par exemple, l'ensemble de chiffres $\{0, 1, i\}$ pourrait être écrit comme suit :



Pour une base donnée (p, D) , soit S_n l'ensemble des entiers gaussiens qui peuvent être écrits avec n (ou moins) chiffres - donc avec $D = \{0, 1, i\}$ l'ensemble ci-dessus est juste S_1 . Il y a deux façons de passer de S_n à S_{n+1} : vous pouvez soit ajouter le nouveau chiffre à l'extrémité gauche, soit à l'extrémité droite.

Ajouter le nouveau chiffre à l'extrémité gauche correspond graphiquement à prendre $|D|$ copies de S_n et à les coller ensemble. Nous pouvons écrire ceci comme

$$S_{n+1} = S_n + p^n D, \quad (2)$$

où la notation $S_n + p^n D$ signifie $\{s + p^n d \mid s \in S_n \text{ et } d \in D\}$. Cette forme est, incidemment, très utile pour dessiner l'ensemble sur un ordinateur, qui peut “copier” l'écran entier et le “coller” en décalage de $p^n d$.

Ajouter le nouveau chiffre à l'extrémité droite correspond à “exploser” l'ensemble S_n en multipliant chacun de ses membres par p , puis en mettant une copie de D sur chaque point (avec 0 sur le point lui-même). Plus précisément,

$$S_{n+1} = pS_n + D. \quad (3)$$

Ces formes visuelles sont utiles pour comprendre l'injection et la surjection. La base est injective lorsque les ensembles étant réunis en (1) et (2) sont toujours disjoints, et la base est surjective lorsque tout disque centré en 0 est éventuellement couvert par S_n pour un certain n .

L'équation (2) montre aussi que si $b = (p, D)$ est une base bijective, alors la forme graphique de D pave le plan. Non seulement cela, mais elle pave le plan en utilisant seulement des translations par

des multiples de p .

Plus précisément, soit l'ensemble des entiers gaussiens $\mathbb{Z}[i]$, et soit $\langle p \rangle = p\mathbb{Z}[i]$. Si la base est surjective, alors

$$\mathbb{Z}[i] = \langle p \rangle + D. \quad (4)$$

Si la base est bijective, alors ces copies de D sont disjointes. Si ces copies de D sont disjointes, alors la base est injective. Si les copies de D sont disjointes, et que D et p satisfont (3), alors nous disons que D pave à la taille p .

Un corollaire intéressant de ceci est que si $b = (p, D)$ est bijective, alors $|D| = |p|^2$. Par Pythagore, nous savons que $|D|$ doit être la somme de deux carrés, donc $|D|$ est l'un de $\{2, 4, 5, 8, 9, 10, \dots\}$. (Au fait, un nombre est la somme de deux carrés si et seulement si tout facteur premier congru à 3 (mod 4) apparaît un nombre pair de fois).

Une façon utile de dire que D pave à la taille p est de dire que D contient précisément un nombre de chaque classe d'équivalence de $\mathbb{Z}[i] \pmod{p}$. En d'autres termes, $|D| = |p|^2$, et deux membres de D ne diffèrent pas d'un membre de $\langle p \rangle$.

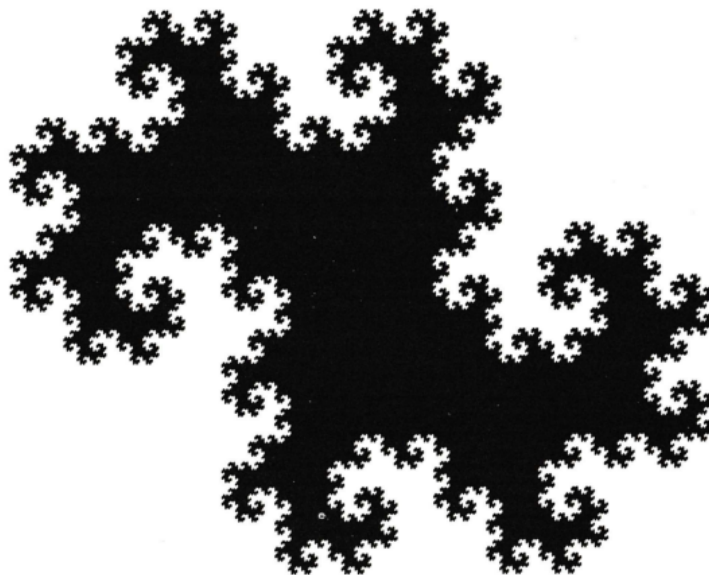


FIGURE 1 – courbe du dragon

La partie jolie

Revenant aux formes graphiques, il y a une modification que nous pouvons faire à l'image qui est conceptuellement meilleure pour certains objectifs. Au lieu de regarder S_n , nous regardons $E_n = p^{-n}S_n$. En d'autres termes, après avoir augmenté S_n à S_{n+1} , nous réduisons l'image entière

d'un facteur p . Les formules récursives pour ceci sont

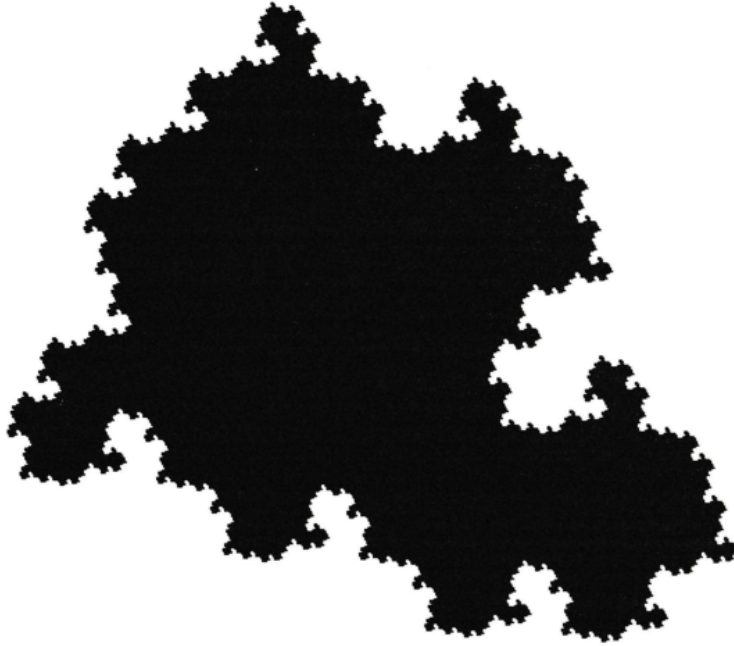
$$\begin{aligned} E_{n+1} &= E_n + p^{-(n+1)} D \\ \text{et } E_{n+1} &= p^{-1}(E_n + D). \end{aligned} \tag{5}$$

Si nous regardons ceci lorsque n tend vers l'infini, l'image reste bornée, et tend finalement vers une fractale E_∞ , avec la frontière se froissant de plus en plus à mesure que n augmente.

Dans l'Exemple 3, l'ensemble E_∞ est la fractale parfois appelée le “double dragon”. Ceci est montré dans la Figure 1. Un exemple plutôt plus laid est donné dans la Figure 2, qui est généré à partir de la puissance $(2i - 1)$ et de l'ensemble de chiffres suivant :



Puisque S_n pave à la taille p^n , E_n pave à la taille 1 pour tout n , donc E_∞ pave à la taille 1. La notation est censée suggérer que ces fractales pourraient être appelées ensembles d'Escher.



La seconde formule en (4) ci-dessus est ce qui est parfois appelé un “Système de Fonctions Itérées”. Il définit l'ensemble E_∞ par la propriété que $E_\infty = p^{-1}(E_\infty + D)$, et implique que la dimension de Hausdorff de E_∞ est 2. Il donne aussi un algorithme plutôt élégant pour tracer E_∞ par ordinateur :

```
z := 0
Repeat
```

```

Plot z
Let d be a random member of D
z := (z + d) / p
Forever.

```

La partie délicate

Supposons donc que nous ayons $b = (p, D)$, et que D pave à la taille p . Nous savons que b est injective, mais elle pourrait ne pas être surjective. Une vérification rapide est que b ne peut pas être surjective si tous les nombres de D sont divisibles par un certain z avec $|z| > 1$. Que pouvons-nous faire d'autre ?

Prenons un entier gaussien quelconque z et écrivons $z \in pw + D$. Il y a exactement une valeur de w pour laquelle ceci est vrai. Écrivons $w = f(z)$. Supposons que nous continuions à itérer la fonction f . Puisque $f(z) = p^{-1}(z - d)$, les itérées ne peuvent pas rester éternellement très loin de 0 (en fait, elles ne peuvent pas rester plus loin que $(|p| - 1)^{-1}\Delta$, où Δ est la valeur maximale de $|d|$ pour $d \in D$) et donc elles doivent éventuellement cycliser.

Maintenant $z \in S_n$ si et seulement si $f(z) \in S_{n-1}$, donc z est capturé dans un certain S_n si et seulement si les valeurs de $f^n(z)$ finissent par atteindre 0 (où elles resteront alors).

Tout ce que nous avons à faire, par conséquent, pour voir si b est surjective est de vérifier chaque point dans un cercle de rayon $(|p| - 1)^{-1}\Delta$ autour de 0, et de voir si les itérées de f atteignent 0 ou non. Bien que cette procédure ne soit pas très jolie, elle est finie.

Comme raccourci, considérons les valeurs de z (autres que 0) qui sont sur des cycles de longueur 1, c'est-à-dire celles z avec $f(z) = z$. Alors $z \in pz + D$, c'est-à-dire $z(1 - p) \in D$. Donc il y a un z non nul sur un cycle de longueur 1 si et seulement si $\langle 1 - p \rangle$ intersecte D en un point autre que 0. En d'autres termes, la condition suivante est nécessaire pour que b soit surjective :

$$\langle p - 1 \rangle \cap D = \{0\}. \quad (6)$$

De même, z est sur un cycle de longueur 2 si et seulement si $z \in p(pz + D) + D$, c'est-à-dire $z(1 - p^2) \in pD + D$. Donc la condition suivante est aussi nécessaire pour que b soit surjective :

$$\langle p^2 - 1 \rangle \cap S_2 = \{0\}. \quad (7)$$

Ceci se généralise à la condition nécessaire suivante :

$$\forall n \geq 1, \langle p^n - 1 \rangle \cap S_n = \{0\}. \quad (8)$$

Maintenant nous avons inclus des cycles de toutes les longueurs, donc cette condition est aussi suffisante.

Plus d'exemples

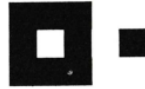
Nous avons maintenant assez de munitions pour attaquer quelques exemples.

Supposons que nous souhaitions considérer de petites puissances p . Nous savons $|p|^2 \geq 2$. Dans l'Exemple 3, nous avons vu une base bijective avec $p = -1 + i$. Y a-t-il d'autres bases bijectives avec $|p|^2 = 2$?

Premièrement, y a-t-il une base bijective avec $p = 1 + i$? Si $p = 1 + i$, alors $p - 1 = i$, donc $\langle p \rangle = \mathbb{Z}[i]$, donc par la condition (5) nous savons que l'ensemble de chiffres ne peut contenir 0, donc la réponse est non.

Deuxièmement, y a-t-il une base bijective avec la puissance $(-1 + i)$ mais un ensemble de chiffres différent ? L'ensemble de chiffres doit contenir 0, et l'autre chiffre doit être l'un de $\{1, i, -1, -i\}$ pour éviter un facteur commun de D . La réponse est donc essentiellement non encore.

Exemple 4. À titre d'exemple assez aléatoire, considérons l'ensemble de chiffres suivant. Je n'ai délibérément pas marqué le 0, parce que je veux discuter où il pourrait aller. La forme pave à la taille 3.

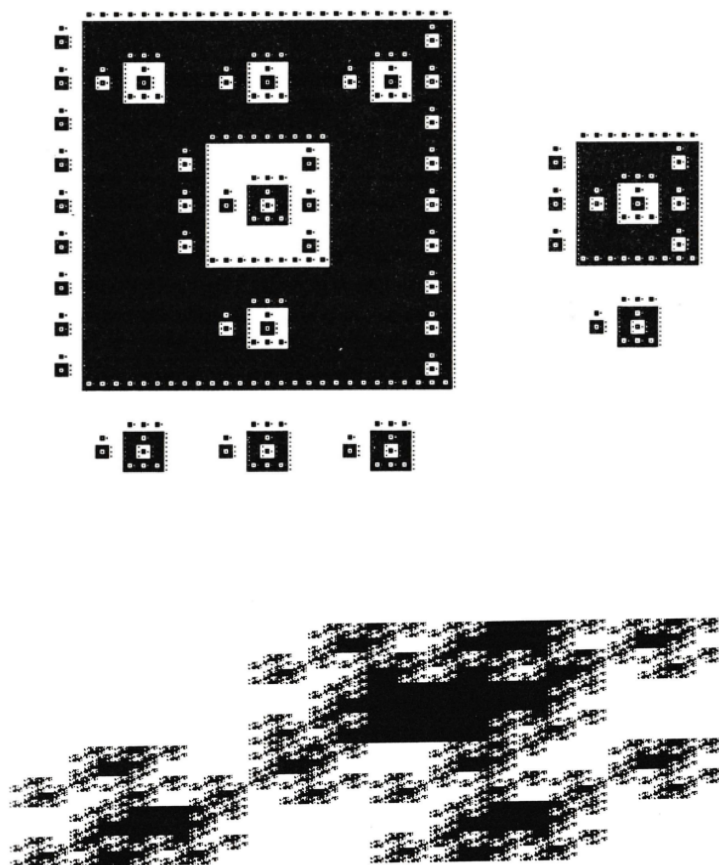


La puissance pourrait être 3, -3 , ou $3i$ (ou $-3i$, mais l'ensemble a une symétrie de réflexion dans un axe horizontal, donc c'est essentiellement la même chose que $3i$).

Si $p = 3$, alors $p - 1 = 2$, et un coup d'œil rapide à la figure montre que chaque carré de la figure est un multiple de 2 loin de quelque autre carré - donc, où que vous mettiez le 0, quelque autre point serait sur un multiple de 2. La puissance 3 ne peut donc pas donner une base bijective.

Si $p = -3$, alors $p - 1 = -4$, ce qui exclut deux points pour l'emplacement du 0. À l'étape suivante, $p^2 - 1 = 8$. Ceci exclut en fait un carré de plus (celui le plus proche du carré isolé), et puis le processus s'arrête, laissant six carrés valides pour le 0.

Si $p = 3i$, alors $p - 1 = 3i - 1$, ce qui exclut deux points. Il s'avère que c'est tout ; le 0 peut aller dans n'importe lequel des sept autres carrés. Le résultat (où que aille le 0) est montré dans la Figure 3.



Une famille infinie

Une question assez naturelle est de savoir s'il peut y avoir une infinité de bases bijectives avec la même puissance. Pour répondre à cette question, voici un exemple explicite. Les bases $b_n = (p, D_n)$ sont définies par $p = -2$ et $D_n = \{0, 1, i, 2n + 1 + i\}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par exemple, D_1 est comme suit :



Par la discussion suivant (3), b_n est injective. Supposons que b_n ne soit pas surjective. Soit $z = x + iy$ un entier gaussien qui ne peut pas être écrit dans la base b_n , et considérons les itérées $f^n(z)$.

Premièrement, considérons la partie imaginaire. Si $f(z) = z' = x' + iy'$ alors soit $y' = -y/2$ soit $y' = -(y + 1)/2$ (selon ce qui est entier). Si vous itérez ceci, tout va vers 0, donc $f^n(z)$ est éventuellement réel. Sans perte de généralité, donc, z est réel.

Maintenant z est réel, et donc $f(z) = z'$ est aussi réel, donc soit $z' = -z/2$ soit $z' = -(z+1)/2$ (selon ce qui est entier). Ceci va vers 0 comme avant, et donc $f^n(z)$ va éventuellement vers 0.

Ceci montre que b_n est bijective. E_∞ dans le cas b_1 est montré dans la Figure 4.

Questions

Bien que cet article donne quelques conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une base soit bijective, il est loin de catégoriser les bases bijectives.

Nous pourrions commencer par considérer des bases pour $\mathbb{Z}$, plutôt que $\mathbb{Z}[i]$. Je ne connais pas de catégorisation des bases bijectives pour $\mathbb{Z}$, mais je pense qu'elle peut être résolue. Si une base est bijective pour $\mathbb{Z}$, alors $|D| = |p|$. Les Exemples 1 et 2 sont bijectifs pour $\mathbb{Z}$.

À l'autre extrémité de l'échelle, nous pourrions considérer des bases pour les quaternions, ou pour tout autre anneau qui peut être pensé comme $\mathbb{Z}^n$. (Pour les quaternions, $n = 4$.) Si la base est bijective, alors $|D| = |p|^n$.

Notez qu'il n'y a pas de problème à évaluer $\sum_{i=0}^m d_i p^i$ dans les quaternions, même s'ils ne sont pas commutatifs, tant que nous sommes prudents de nous en tenir à cette définition. Les algèbres non associatives, telles que les nombres de Cayley, nécessitent un peu plus de soin.

En dehors des mathématiques, il y a la question de savoir si cela a un usage pratique. Normalement, ce n'est pas une accusation que vous voudriez voir portée contre un morceau de mathématiques complètement isolé comme c'est le cas ici, mais il se trouve que dans le cas présent, il y a une chance d'application en arithmétique complexe informatique ou en graphisme 2D.

Remerciements

L'Exemple 3 n'est pas nouveau ; je crois que Donald Knuth l'a présenté auparavant. Merci aussi à Richard Tucker, qui a prouvé la condition (5), et à David Moore et Charles Brown, qui m'ont aidé en dessinant des fractales sur des ordinateurs Archimedes.

Comment être un bon enseignant

“Bonjour et bienvenue à la première conférence du cours. Écoutez, j’ai dit “bonjour”... écoutez... j’aimerais commencer, maintenant... voulez-vous vous taire... TAISEZ-VOUS, S’IL VOUS PLAÎT ! Oh, merci, ça ne me dérange pas que vous parliez si vous le faites tranquillement ; je n’ai pas demandé à faire ce cours, vous savez, je voulais faire de l’algèbre, je leur ai dit que je ne connaissais pas l’analyse...”

“...Maintenant, ce cours porte sur les nombres complexes et j’ai une liste de livres recommandés, ici ou enfin... non en fait, il semblerait que je l’aie laissée chez moi, peu importe, ils sont tous épuisés de toute façon maintenant laissez-moi écrire une définition où est passée la craie ah la voici [CLAC] ah laissez-moi prendre un autre morceau [BANG] pas très grandes ces estrades n’est-ce pas je n’arrête pas d’en tomber...”

“...Maintenant la définition 1.1 est euh hum bien sûr je n’ai pas encore dit comment cette section s’appelle oh elle ne semble pas avoir de nom de toute façon il s’agit de la convergence des séries entières vous avez fait quelque chose comme ça en analyse réelle n’est-ce pas vous ne vous en souvenez pas eh bien il aurait dû le faire dans ses cours je n’ai pas le temps d’entrer dans les détails maintenant...”

“...Maintenant la définition 1.1 [gribouillage gribouillage] pouvez-vous lire ça au fond non oh bien asseyez-vous plus près alors pouvez-vous le lire à l’avant ah si on y pense je ne peux pas le lire non plus peut-être si j’allume cette lumière ah non pas celle-là une autre oh bien le cordon était un peu effiloché je suppose bien regardez ce symbole est un sigma majuscule oui quel est le problème oui bien le vert semble être la seule couleur qui reste dans la boîte probablement parce que personne de sensé ne l’utilise donc ils me la laissent...”

“...Bien regardez peut-être si je l’explique en mots tout est dans les manuels de toute façon je ne peux pas aider s’ils manquent à la bibliothèque les gens les mangent ou quoi... bien maintenant je vais dessiner un diagramme vous n’avez pas à copier ceci exactement parce qu’il est légèrement faux de toute façon ceci est le diagramme 2 bonne question je pense que j’ai oublié de dessiner le diagramme 1 de toute façon comme je dis cela n’aide pas beaucoup ouf laissez-moi enlever ma veste un peu [déchirure] oh bien j’ai cousu ce bouton moi-même vous pouvez le voir n’est-ce pas...”

“Maintenant laissez-moi digresser une minute sur l’histoire du sujet ici il a été découvert par Cauchy ou est-ce que je veux dire Gauss l’une de ces personnes et il a envoyé une copie de son article à quelqu’un d’autre qui bon de toute façon c’est très important et ça a beaucoup d’applications telles que euh telles que bon de toute façon vous verrez des applications dans vos autres cours je suppose bien sûr ils n’utilisent pas la même notation mais alors ils n’ont pas les mêmes idées de rigueur que nous et maintenant écrivons le premier résultat lemme 1.2...”

“... Lemme 1.2 oh je n’ai pas encore défini le rayon de convergence n’est-ce pas, pas encore, laissez-moi l’écrire et nous pourrions décider ce que cela signifie plus tard bien il me semble qu’il me reste encore quelques minutes donc je ferais mieux de commencer la preuve soit n ceci et r cela et v ceci et n cela non à la réflexion j’utilise déjà n maintenant donc je vais l’appeler ν pardon non c’est un ν une lettre grecque vous devez l’avoir vue avant vous connaissez les lettres grecques alpha etc. non

celle-ci est ν d'accord appelez-la v si vous voulez mais nous utilisons déjà v mais cela ne causera pas de confusion...

“... Maintenant multipliez ceci et évidemment ce que nous obtenons est euh clairement hum oh cela ne peut pas être correct qu'est-ce que j'ai fait de mal ici pouvez-vous voir l'erreur peut-être j'ai perdu un signe moins quelque part je ne sais pas oh mon Dieu il est temps de finir n'est-ce pas bien donnez-moi juste 5 minutes de plus et je vais finir ceci et oh peut-être que je devrais refaire cette partie plus soigneusement la prochaine fois ah cela aurait dû être un ν peut-être non cela devrait être un v oh c'est un i n'est-ce pas oh bien regardez je vais finir ceci la prochaine fois je suis sûr que j'ai la plupart des détails corrects c'est vraiment très élémentaire après tout je n'ai rien fait de non trivial encore...

Comment être un bon membre d'un auditoire de cours

Aaaatchoum ! Toux. Crachat. Sifflement. Oui j'ai un rhume. Il y en a beaucoup en ce moment. Non je n'utilise pas de mouchoir. Snif. Snif. Toux. Oh merci, maintenant j'ai éternué sur vos notes je pourrais aussi bien me moucher dessus. Zurrrrkkk ! Hoooossssh ! Maintenant quel cours est-ce ?...

... Pensez-vous qu'il a fait une erreur sur ce point ? Bien je suis sûr que vous pouvez le prouver rapidement en utilisant des matrices. Dois-je lui demander si vous pouvez ? Non. Quelque chose ne va pas ? Non, rien ne va pas. Je me demandais juste si vous pouviez le prouver plus rapidement avec des matrices. Oh je vois. Mettre ma tête dans un seau de QUOI ? Oh d'accord. Oui...

... Mon Dieu c'est d'une évidence ennuyeuse. Je pense que je vais faire les mots croisés à la place. Chenille mélangée dans une religion tribale, entend-on ? Hmm. Pouvez-vous penser à une anagramme de chenille ? Oh je suis DÉSOLÉ. Je n'avais pas réalisé que vous écoutiez l'enseignant. Oh je pensais qu'il prouvait un théorème différent. Excusez-moi, comment obtenez-vous x^2 ici ? Vous venez juste de l'expliquer. Désolé, je n'avais pas réalisé...

... Puis-je emprunter un morceau de papier ? Vous en ai-je vraiment emprunté un chaque jour cette semaine ? Ah merci. Je suppose que vous n'avez pas un stylo que je pourrais utiliser ? Oui j'en prendrai soin. Oups, il est par terre. [FROISSEMENT.] Ah bien au moins nous savons où il est maintenant...

Et comment être un bon surveillant d'examen

D'accord, vous pouvez commencer à écrire dès que vous êtes à vos places. Regardez, cela vous dérangerait de vous asseoir ? Que voulez-vous dire par “il n'y a pas de bureau pour vous ?”... Vous devez être dans la mauvaise salle. Quel est votre nom ? Oh. Eh bien il ne semble pas y avoir assez de bureaux. Peut-être pourriez-vous vous asseoir par terre cette fois. Allez, commençons...

... Ha ha ha ha ha ! Oh pardon. Je viens de voir la blague dans la question 5. Je ne sais pas comment ils les inventent. Trop marrants les examens, pas vrai ? De toute façon ne me laissez pas vous déranger. Désolé pour cela...

... Que voulez-vous ? Bien pourquoi n'y êtes-vous pas allé avant ? Honnêtement, les incontinents qu'on a ici. Bien pourquoi n'avez-vous pas apporté un pot avec vous ? Oh d'accord je vais trouver quelqu'un pour vous escorter. On ne peut pas vous laisser empester l'endroit, n'est-ce pas ? Bien que peut-être vous devriez avoir un certificat médical [froissement froissement]. Non, il ne mentionne pas cela. D'accord, dépêchez-vous...

... [Craquement, craquement, craquement, crash !] Bon sang, ils ne font plus les chaises comme avant, n'est-ce pas. Je parie que les chaises de Chippendale ne cédaient jamais quand on se penchait en arrière. Oh bien, maintenant je n'ai nulle part où m'asseoir. [Tramp, tramp, tramp.] (Mon Dieu quelle réponse inutile ce type écrit-il. Même moi je sais que $2 + 2 = 4$ et non 5. Ce doit être le trac, pauvre type.) Oh pardon, est-ce que je vous dérange ? Je vais aller respirer dans le cou de quelqu'un d'autre...

... Ah, celui-ci a l'air calme - il écrit à toute vitesse. A- a- a- a- TCHOUM!!! Oh pardon. Oui nous pouvons ramasser toutes les feuilles de papier. Et je vais essayer de vous trouver une copie propre du sujet. Quelle était cette feuille qui est passée par la fenêtre ? La question 2 ? Oh bien, peut-être que quelqu'un la ramassera et nous la rendra. Vous n'auriez pas eu beaucoup de points dessus de toute façon, c'est assez délicat...

“Bon, toute écriture doit cesser maintenant. En fait si vous connaissiez votre sujet elle aurait cessé il y a 20 minutes. Regardez je vous ai dit d'arrêter. Bien vous devrez le rendre anonymement alors, n'est-ce pas ? Je suppose que cela ne fera pas beaucoup de différence pour votre résultat...

... Honnêtement les étudiants d'aujourd'hui ne parviennent tout simplement pas à faire face aux examens comme nous étions obligés de le faire...

Cours que vous avez peut-être manqués

Systèmes dynamiques non linéaires

Les points fixes seront uniques, et il n'y en aura qu'un seul.

Méthodes

Nous pourrions prendre $A = 1$, mais alors nous devrions multiplier par le multiplicateur de la chose qui multipliait l'onde incidente.

Au lieu de 5 mots, vous pourriez écrire 16 symboles qui disent la même chose.

Mathématiques quadratiques

J'ai plus d'énergie pour nettoyer le tableau aujourd'hui parce que j'ai passé mon week-end à manger des boudins noirs à Leeds.

Je suis quelque peu commotionné aujourd'hui, car j'étais à Oxford hier, essayant terriblement d'être brillant.

Variétés différentiables

Le sujet (Topologie différentielle) est bien vivant, et vit à Oxford.

Nous pouvons toujours supposer qu'il est fini parce que :

(i) La variété est compacte (ii) On nous dit qu'elle l'est.

Fondements de la mécanique quantique

Pour devenir intelligent, il faut parfois un peu de réflexion.

Logique et théorie des ensembles

Nous avons un stock de variables x, y, z et ainsi de suite jusqu'à la fin de l'alphabet.

Méthodes de physique mathématique

Vous auriez pensé que le 1 devrait être là. Mais je l'ai mis ici. C'est peut-être une coquille.

Les séries divergentes sont politiquement incorrectes.

Et ce sera, en même temps, plus général et moins général!

Équations aux dérivées partielles

Ce cours est, par définition, presque le cours le plus ennuyeux que nous fassions.

Méthodes de perturbation

Je m'attends à être chahuté - sinon vous vous endormez tous.

Les ondes ont tendance à être des choses linéaires, sauf quand elles sont difficiles.

Mécanique des fluides géologiques

Nous allons commencer au début. Nous ne finirons peut-être pas à la fin, mais nous commencerons certainement au début.

Environ la moitié signifie quelque part entre 10 et 90 pour cent.

Vous faites trop attention à moi.

Dynamique des écoulements stratifiés en rotation

π c'est un, 2π c'est dix.

Ondes et théorie de la stabilité

La solution ne peut pas dire si on lui a imposé une condition aux limites mathématique, ou s'il y a un vrai mur.