

Théorème de trisection de Morley

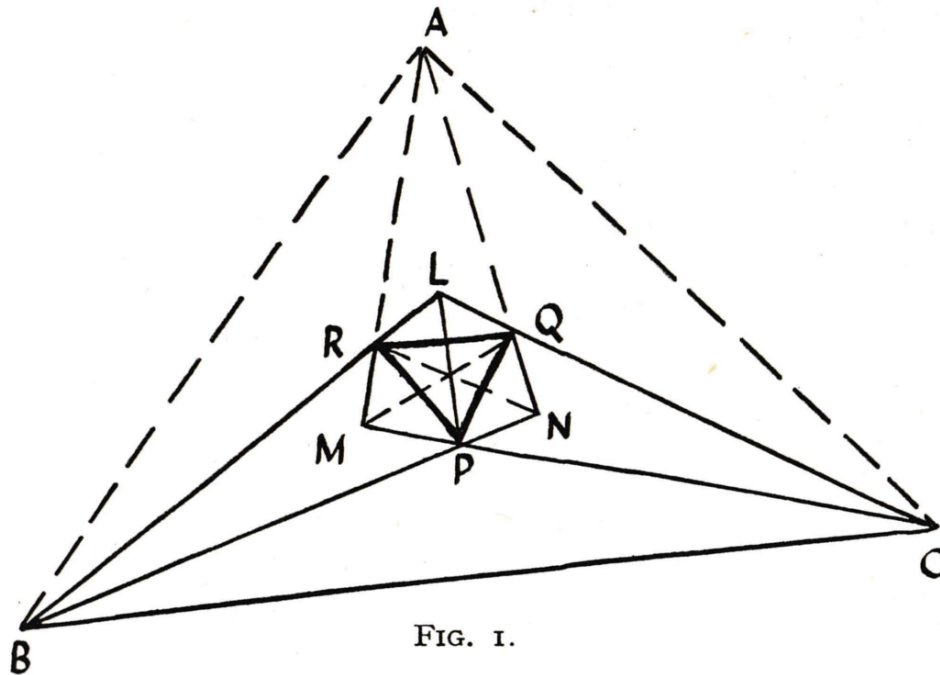
Un théorème bien connu dû à F. Morley stipule que les trois points où se rencontrent les paires de trisectrices internes d'un triangle les plus proches d'un côté donné sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Il existe de nombreuses preuves de ce théorème. Aucune d'elles, cependant, ne semble aussi simple que la suivante, qui est un bon exemple de la valeur de la "marche arrière à partir de la réponse".

Nous allons prouver que, étant donné un triangle quelconque d'angles 3α , 3β , 3γ , on peut construire la configuration requise en partant du triangle équilatéral. (Il est clair que seuls les angles importent, et non la taille).

Soit PQR un triangle équilatéral. Notons l'angle PQR par $\widehat{PQR}$, etc. Choisissons L à l'extérieur du triangle PQR tel que

$$\widehat{LQR} = \widehat{LRQ} = \beta + \gamma.$$



De toute évidence, LP bissecte $\widehat{QLR}$. M et N sont définis de manière similaire. Soit C le point d'intersection de LQ et MP . Alors

$$\widehat{QCP} = \widehat{LQP} + \widehat{MPQ} - \pi = \alpha + \beta + 2\gamma - \frac{\pi}{3} = \gamma$$

puisque

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Choisissons B sur LR de sorte que CP bissecte $\widehat{LCB}$.

P est le centre inscrit du triangle LCB , et donc

$$\widehat{PBR} = \widehat{PBC} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{RLC} - \widehat{LCB}) = \beta,$$

ce qui donne

$$\widehat{BPR} + \widehat{RPN} = \pi.$$

Par conséquent, B est l'intersection de LR et NP . De même, si A est l'intersection de MR et NQ , on a

$$\widehat{QCA} = \gamma, \quad \widehat{QAR} = \widehat{QAC} = \alpha,$$

et aussi

$$\widehat{RBA} = \beta, \quad \widehat{RAB} = \alpha,$$

et donc ABC est le triangle recherché, ce qui prouve le théorème.

R.P.

Nombres premiers

C. B. Haselgrove

L'étude des nombres premiers a fourni aux mathématiciens de nombreux problèmes fascinants et stimulants depuis qu'ils ont été étudiés pour la première fois par les Grecs. Beaucoup de personnes qui ont abandonné les mathématiques en quittant l'école trouvent difficile de croire qu'il existe encore de nombreux problèmes en mathématiques qui peuvent être énoncés en des termes qu'elles comprennent, mais auxquels les mathématiciens n'ont pas encore trouvé de réponse. Mais la théorie élémentaire des nombres et, en particulier, les nombres premiers fournissent de tels problèmes. De plus, dans ce domaine, il y a eu récemment de nombreux développements intéressants et importants. Mais avant de les décrire, il est nécessaire de donner un bref historique du sujet.

Euclide a prouvé qu'il existe une infinité de nombres premiers. Il est intéressant de demander quelle est la taille du n -ième nombre premier, ou, ce qui revient au même, combien de nombres premiers sont inférieurs à un grand nombre donné x . Nous noterons ce nombre $\pi(x)$. On a conjecturé que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

où le signe $\sim$ signifie que lorsque $x \rightarrow \infty$, le rapport du membre de gauche au membre de droite tend vers l'unité. Le problème a été étudié par plusieurs mathématiciens du XIX^e siècle, en particulier Legendre, Gauss, Chebyshev et Riemann. Mais ce n'est qu'en 1896 que cette conjecture fut prouvée indépendamment par Hadamard et de la Vallée Poussin, qui utilisèrent une méthode introduite par Riemann. Cette méthode dépendait essentiellement de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Le résultat est connu sous le nom de théorème des nombres premiers.

La plupart des mathématiciens estimaient que cette situation n'était pas satisfaisante car, bien que l'énoncé du théorème des nombres premiers ne fasse intervenir que les idées les plus élémentaires, il n'était pas possible de le prouver sans utiliser les méthodes très sophistiquées de la théorie des fonctions. Cela conduisit à une question d'intérêt philosophique général : "Existe-t-il des problèmes de mathématiques élémentaires qu'il est impossible de résoudre sans utiliser des théories très compliquées ?" Cette question reçut une réponse affirmative de Gödel, mais même ainsi, le doute subsistait quant à la possibilité de prouver le théorème des nombres premiers par des méthodes élémentaires. Selon une rumeur qui circulait récemment à Cambridge, le professeur Hardy aurait déclaré qu'il jetterait tous ses livres par la fenêtre si une preuve élémentaire était découverte, mais après un examen plus approfondi, cela semble être une grossière exagération.

En 1948, Erdős et Selberg découvrirent une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers. Il est vrai que l'existence de cette preuve signifie que nos méthodes d'étude de ces problèmes devront être révisées, mais il reste encore beaucoup de choses qui peuvent être prouvées par les méthodes de la théorie des fonctions et qui ne peuvent pas encore l'être par les méthodes élémentaires.

Le théorème des nombres premiers n'est en aucun cas le seul problème dans la théorie des nombres premiers. Un autre problème, plus ancien et plus simple à énoncer, est le problème de Goldbach. En 1742, Goldbach conjectura, dans une lettre à Euler, que tout nombre supérieur à 5 est représentable comme la somme de trois nombres premiers. Comme 2 est le seul nombre premier pair, cela implique

que tout nombre pair supérieur à 3 est représentable comme la somme de deux nombres premiers. Vinogradoff prouva en 1937, en utilisant une méthode développée par Hardy et Littlewood, que tout nombre impair suffisamment grand est représentable comme la somme de trois nombres premiers, mais cela laisse ouverte la question de savoir si tout nombre pair est représentable comme la somme de deux nombres premiers. Ce problème semble extrêmement difficile. Un autre problème apparemment tout aussi difficile est l'existence d'une infinité de paires de nombres premiers qui diffèrent de deux, ou, plus généralement, de tout entier pair fixé.

Un autre problème est l'estimation des différences minimales et maximales entre nombres premiers consécutifs. Si p_n est le n -ième nombre premier, on voit facilement que $p_n \sim n \log n$, de sorte qu'en un certain sens la différence moyenne $p_{n+1} - p_n$ est $\log n$. Ingham a prouvé que pour tout n suffisamment grand, elle est inférieure à $n^{1/8}$. Rankin a prouvé qu'elle devient aussi petite que $\frac{57}{59} \log n$, et qu'elle devient plus grande que

$$\frac{1}{4} \frac{\log n \cdot \log \log n \cdot \log \log \log n}{(\log \log \log n)^2}.$$

En remarquant que $\log n$ croît plus lentement que toute puissance positive de n , on voit que le problème est loin d'être résolu.

Maintenant que le théorème des nombres premiers a été prouvé, il est intéressant de demander avec quelle précision $\frac{x}{\log x}$ approxime $\pi(x)$. On constate que l'approximation est plutôt médiocre, mais que la fonction

$$\text{li } x = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$$

est une approximation bien meilleure. On conjecture que $\pi(x) - \text{li } x$ est au plus de l'ordre de $x^{1/2} \log x$, mais la meilleure borne supérieure pour l'ordre jusqu'à présent a été donnée en améliorant certains résultats de Tchudakoff et est $x \cdot \exp(-(\log x)^{1/2-\epsilon})$. Littlewood a prouvé que cette fonction est parfois aussi grande que

$$\frac{x^{1/2} \log \log \log x}{\log x}$$

et qu'elle prend chaque signe une infinité de fois. Ce dernier résultat a attiré une attention considérable car pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $\pi(x)$ a été effectivement évalué, $\pi(x) - \text{li } x$ est négatif (c'est-à-dire pour des valeurs de x jusqu'à 10^9). Skewes a prouvé qu'un changement de signe se produit avant

$$x = 10^{10^{10^{10^{10}}}}$$

et ce nombre est dit être le plus grand jamais apparu naturellement en mathématiques.

Il existe de nombreux autres problèmes dont les solutions ne sont pas connues. Par exemple, on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$. Cela semble même plus facile que les fameux problèmes de Fermat et de Mersenne. Y a-t-il une infinité de nombres premiers de la forme $2^n + 1$ et $2^n - 1$? Récemment, Hua a considéré le problème dit de Goldbach-Waring de la représentation des nombres comme sommes de puissances de nombres premiers, et a fait des

progrès considérables.

Il n'est jamais prudent de faire des prédictions, mais je pense qu'il est probable que le rythme très élevé des progrès dans ce domaine se poursuive. Le sujet présente toutes les conditions favorables au progrès. Il y a, comme nous l'avons vu, un grand nombre de problèmes non résolus et un grand groupe de mathématiciens intensément intéressés par eux. J'espère que cet article encouragera d'autres personnes à aborder le sujet. Mais au risque d'en décourager certains, je dois insérer un mot d'avertissement : les preuves des théorèmes que j'ai mentionnés sont pour la plupart extrêmement longues et compliquées.

Nombres premiers

J. C. P. Miller

Pendant soixante-quinze ans, et malgré de nombreuses tentatives pour le battre, le plus grand nombre premier connu a été $p = 2^{127} - 1$, identifié comme tel par E. Lucas. Récemment, D. J. Wheeler et moi-même avons réussi à en identifier de plus grands, en utilisant un ordinateur Edsac. Nous avons utilisé le théorème de Fermat pour tester des nombres de la progression arithmétique $N = kp + 1$, p comme ci-dessus, en sélectionnant les valeurs de k pour lesquelles N n'a aucun facteur inférieur à 400.

Le théorème de Fermat stipule que si N est premier et si a est premier avec N , alors

$$a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}.$$

Nous avons choisi $a = 2$, et avons trouvé que cela était vrai pour

$$k = 114, 124, 388, 408, 498, 696, 738, 774, 780, 934, 978.$$

(Chaque test machine prenait trois minutes; il y eut aussi environ quatre-vingt-dix essais infructueux pour d'autres k .) Cependant, la réciproque du théorème de Fermat n'est pas vraie, comme on peut le voir à partir des cas particuliers

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}; \quad a^{560} \equiv 1 \pmod{561}, \text{ pour } a \text{ premier avec } 561.$$

Par conséquent, un travail supplémentaire est nécessaire pour montrer que les valeurs de k listées ci-dessus donnent des nombres premiers - ce qu'elles font effectivement.

Pour voir que c'est bien le cas, raisonnons comme suit. Pour un k particulier rendant $2^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$, supposons que e soit le plus petit exposant tel que

$$2^e \equiv 1 \pmod{N}.$$

On voit aisément que e est un facteur de $N - 1$, c'est-à-dire que

$$\lambda e = N - 1 = kp.$$

Par conséquent, soit (i) e est un multiple de p , soit (ii) k est un multiple de e , de sorte que $2^k \equiv 1 \pmod{N}$.

Lorsque $k < 1024$, on peut montrer assez facilement que N est trop grand pour que (ii) soit possible, donc (i) doit être vérifié.

Dans le cas (i), supposons $N = q^{2r}\beta^s\gamma \dots$ en facteurs premiers. Or, il existe un plus petit exposant f tel que $2^f \equiv 1 \pmod{q^\alpha}$. Mais, puisque q^α est un facteur de N ,

$$2^e \equiv 1 \pmod{N} \equiv 1 \pmod{q^\alpha},$$

de sorte que f est un facteur de e . Il en est de même pour $g, h, \dots$ correspondant à $r^\beta, s^\gamma, \dots$. Par conséquent, e est un multiple commun de $f, g, h, \dots$; mais si E est un multiple commun quelconque de $f, g, h, \dots$,

$$2^E \equiv 1 \pmod{q^\alpha}, \pmod{r^\beta}, \dots,$$

et donc $2^E \equiv 1 \pmod{N}$; il s'ensuit que e est le plus petit commun multiple de $f, g, h, \dots$. Donc, comme e contient un facteur p , au moins l'un des $f, g, h, \dots$, disons f , doit aussi le contenir : c'est-à-dire $f = \mu p$.

Or $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, et une extension peut être prouvée montrant que $2^{(q-1)q^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{q^\alpha}$; donc $f = \mu p$ est un facteur de $(q-1)q^{\alpha-1}$. Mais clairement $p = \frac{N-1}{k}$ ne peut pas diviser $q^{\alpha-1}$, un facteur de N ; donc il divise $q-1$, et le nombre premier $q = \nu p + 1$. Par conséquent, $N = kp + 1 = (\nu p + 1)(rp + s)$, disons, d'où $s = 1$ et, puisque $k \ll p$, $\nu rp^2 = 0$; ainsi $r = 0$ et $\nu = k$ (puisque $\nu \neq 0$); et $N = kp + 1 = \nu p + 1$ est premier. Les valeurs de k listées ci-dessus donnent donc toutes des nombres premiers et chacun d'entre eux fut, successivement, et pour quelques semaines, jours ou heures, le plus grand nombre premier connu. Wheeler devint alors plus ambitieux et essaya la suite $N = kp^2 + 1$, en éliminant d'abord tous les k pour lesquels N a un facteur inférieur à 20 000. Par des arguments précisément similaires, on peut montrer que si le test de Fermat est satisfait, N doit avoir au moins un facteur premier $\nu p + 1$. Alors $N = kp^2 + 1 = (\nu p + 1)(rp + s)$. Comme précédemment $s = 1$. De plus, $(\nu + r)p$ doit être un multiple de p^2 ; par conséquent, puisque les deux sont positifs, l'un doit être de l'ordre de p . Ainsi νrp^2 est nul, puisqu'il ne peut pas être de l'ordre de p^3 ; donc $r = 0$, $\nu = kp$, et $N = kp^2 + 1 = \nu p + 1$ est premier. Le test fut satisfait (en vingt-sept minutes d'exécution des tests sur le calculateur Edsac, après sept essais infructueux similaires) pour $k = 180$. Le nombre résultant, P , est le plus grand nombre premier connu actuellement et possède 79 chiffres décimaux;

$$P = 180(2^{127} - 1)^2 + 1$$

$$= 5210\,64401\,56792\,28794\,06069\,43253\,90955\,85333\,58984\,83908\,05645\,83521\,83851\,01837\,25557\,35221.$$

Addendum. - Depuis la rédaction de cette note, j'ai appris par une lettre de A. Ferrier (France) qu'il a identifié comme étant un nombre premier le nombre $\frac{2^{148} + 1}{17}$, en montrant que le test de Fermat est satisfait pour $a = 3$, et avec l'aide de certains calculs auxiliaires pour compléter ce test. Ce nombre, à savoir

$$2098\,89366\,57440\,58648\,61512\,64256\,61022\,25938\,63921,$$

est donc le deuxième plus grand nombre premier connu.

Relations

J. F. Harper

Même le plus appliqué des mathématiciens aura entendu parler des relations dyadiques réflexives, symétriques et transitives, mais il en existe beaucoup d'autres couramment rencontrées mais rarement étudiées en détail.

Pour rafraîchir la mémoire du lecteur, une relation R entre deux membres (d'où "dyadique") x, y d'un ensemble $\{X\}$ est

- réflexive, si xRx (par exemple $x = x$)
- symétrique, si xRy implique yRx
- transitive, si xRy et yRz impliquent ensemble xRz

Comme pour une relation donnée, chacune de ces trois propriétés peut être toujours vraie (c'est-à-dire pour tous x, y dans $\{X\}$), parfois vraie (c'est-à-dire pour certains x, y mais pas d'autres), ou jamais vraie, il semblerait à première vue qu'il y ait 27 types différents de relations dyadiques, un pour chaque combinaison de ces propriétés. En fait, 12 d'entre elles sont logiquement impossibles s'il existe des x, y tels que xRy , et il ne semble pas sans intérêt de donner un exemple de chacune des 15 autres.

L'ensemble $\{X\}$ sera à cette fin considéré comme l'ensemble de tous les citoyens respectueux des lois de Grande-Bretagne qui connaissent leur propre nom.

Les abréviations du tableau sont les suivantes :

R = réflexive. S = symétrique. T = transitive.
 a = toujours. s = parfois. n = jamais.

R	S	T	
a	a	a	x est lié à y .
a	a	s	x et y connaissent le nom l'un de l'autre.
a	s	a	x n'est pas plus aimé que y .
a	s	s	x est un descendant du grand-père de y .
s	a	a	x et y sont tous deux de sexe masculin.
s	a	s	x et y ont exactement un ami en commun.
s	s	a	x est un fils du père de y .
s	s	s	x admire y .
n	a	s	x est un cousin de y .
n	a	n	x est marié à y .
n	s	s	x est un frère de y .
n	s	n	x est le seul frère de y .
n	n	a	x est un ancêtre de y .
n	n	s	x connaît le nom de y , mais y ne connaît pas celui de x .
n	n	n	x est le père de y .

On remarquera qu'il y a dans le tableau un contre-exemple à la croyance communément répandue selon laquelle une relation symétrique et transitive doit aussi être réflexive, à savoir " x et y sont tous

deux de sexe masculin”. Cela est possible parce que cette relation divise l’ensemble $\{X\}$ en deux parties mutuellement exclusives telles que dans l’une (les citoyens masculins respectueux des lois de Grande-Bretagne qui connaissent leur propre nom) la relation est réflexive, symétrique et transitive, que dans l’autre (les citoyennes respectueuses des lois de Grande-Bretagne qui connaissent leur propre nom) elle n’est jamais vraie, et que si x appartient à l’une de ces parties et y à l’autre, elle n’est jamais vraie non plus.

On peut sans difficulté produire des exemples mathématiques de la plupart des 15 types de relations donnés ci-dessus (par exemple, si $\{X\}$ est l’ensemble de tous les nombres réels non nuls, $x/y < 1$ est $R_n S_n T_s$), et la construction d’un ensemble complet est laissée en exercice au lecteur.

Treillis A. J. T. Davie

La théorie des treillis s'intéresse aux relations entre points et aux ordres partiels. Elle a des applications dans un grand nombre de domaines, notamment l'algèbre de Boole, la théorie quantique et la géométrie projective.

Un ordre partiel sur une classe S est une relation binaire " $\geq$ " définie sur S telle que les axiomes suivants soient vérifiés :

- P1 : Pour tout $x \in S, x \geq x$ (Réflexive)
- P2 : Si $x \geq y$ et $y \geq x$, alors $x = y$ (Antisymétrique)
- P3 : Si $x \geq y$ et $y \geq z$, alors $x \geq z$ (Transitive)

(Un système encore plus simple, appelé ordre faible, se produit lorsque P2 est supprimé.)

Trois exemples d'ensembles partiellement ordonnés sont les suivants :

- (i) S est la classe de toutes les sous-classes d'une classe I , y compris l'ensemble vide $\emptyset$ (noté O) et I lui-même, et nous écrivons $x \geq y$ lorsque x contient y (c'est-à-dire que $\geq$ est équivalent à $\supseteq$ tel qu'utilisé normalement en théorie des ensembles).
- (ii) S est la classe des entiers positifs et nous écrivons $x \geq y$ lorsque y est un facteur de x .
- (iii) S est l'ensemble des entrées d'un tableau généalogique, et nous écrivons $x \geq y$ lorsque soit x et y sont la même personne, soit y est un descendant de x .

Les ensembles partiellement ordonnés peuvent être représentés schématiquement sur un diagramme de Hasse, c'est-à-dire un diagramme sur lequel la relation $x \geq y$ pour $x \neq y$ est représentée par une ou plusieurs lignes descendant régulièrement de x à y . Par exemple, l'ensemble partiellement ordonné constitué des facteurs de 12 peut être représenté par la figure I ci-dessous :

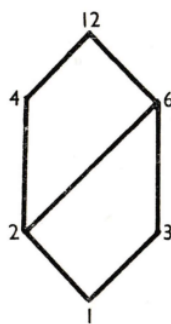


FIGURE I

Bornes

Une borne supérieure d'un sous-ensemble T d'un ensemble partiellement ordonné S est un élément a de S tel que $a \geq t$ pour tout t dans T . Si T a une borne supérieure a avec la propriété que toute autre borne supérieure t' satisfait $a \geq t'$, nous appelons a la borne supérieure minimale de T (elle est clairement unique). De même, nous pouvons définir les bornes inférieures et les bornes inférieures

maximales. Par exemple, dans la figure I, l'ensemble des points 1, 2, 3 est un sous-ensemble avec les bornes supérieures 6 et 12 et la borne supérieure minimale 6.

Nous sommes maintenant en mesure de définir un treillis : Un treillis est un ensemble partiellement ordonné tel que deux éléments quelconques possèdent une borne supérieure minimale et une borne inférieure maximale. Des exemples sont les cinq premières structures de la figure II ci-dessous (qui illustrent en fait tous les treillis à cinq éléments) ; la sixième, cependant, n'est pas un treillis car b et c n'ont pas de borne inférieure maximale.

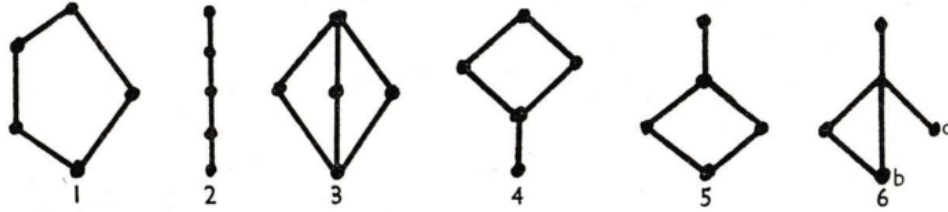


FIGURE II

La borne supérieure minimale de deux éléments x et y est notée $x \cup y$ et la borne inférieure maximale par $x \cap y$. Ainsi, dans la figure I, $12 \equiv 3 \cup 4$, $2 \equiv 6 \cap 4$. Notez que dans cet ensemble de facteurs, $x \cup y$ est le ppcm de x et y tandis que $x \cap y$ est leur pgcd.

Il est facile de vérifier que les quatre lois suivantes sont satisfaites par les treillis :

$$\begin{aligned} L1 : & \quad x \cap x = x \\ L2 : & \quad x \cap y = y \cap x \\ L3 : & \quad (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) \\ L4 : & \quad x \cap (x \cup y) = x \end{aligned}$$

Il existe un ensemble de lois duales avec $\cup$ remplacé par $\cap$ et vice-versa. Une loi supplémentaire (ci-dessous) et sa duale nous donnent ce qu'on appelle un treillis modulaire :

$$L5 : \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z \quad \text{si } z \geq x$$

Le treillis devient un treillis distributif lorsque la loi suivante et sa duale sont également vérifiées :

$$L6 : \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

Deux théorèmes

On peut montrer qu'un treillis est non modulaire si et seulement s'il contient un sous-treillis avec un diagramme de Hasse comme illustré par la figure II, numéro 1, et de plus qu'un treillis modulaire est non distributif si et seulement s'il contient un sous-treillis avec des diagrammes de Hasse comme illustré par la figure II, numéro 3.

Compléments

Si un treillis est fini, alors le treillis dans son ensemble doit avoir une borne inférieure maximale et une borne supérieure minimale (notées O et I respectivement). Supposons que deux éléments, a et b , d'un tel treillis soient tels que $a \cup b = I$ et $a \cap b = \emptyset (O)$; alors a est dit être un complément de b . Les compléments ne sont pas nécessairement uniques. Si tous les éléments d'un treillis ont un complément, le treillis est dit complémenté. Un treillis complémenté, modulaire et distributif est appelé une algèbre de Boole. On peut montrer que dans une algèbre de Boole, chaque élément a un complément unique (le complément de x est noté x').

La figure III est le diagramme de Hasse d'une algèbre de Boole à deux éléments de base x et y (z désigne $(x \cup y') \cap (x' \cup y)$).

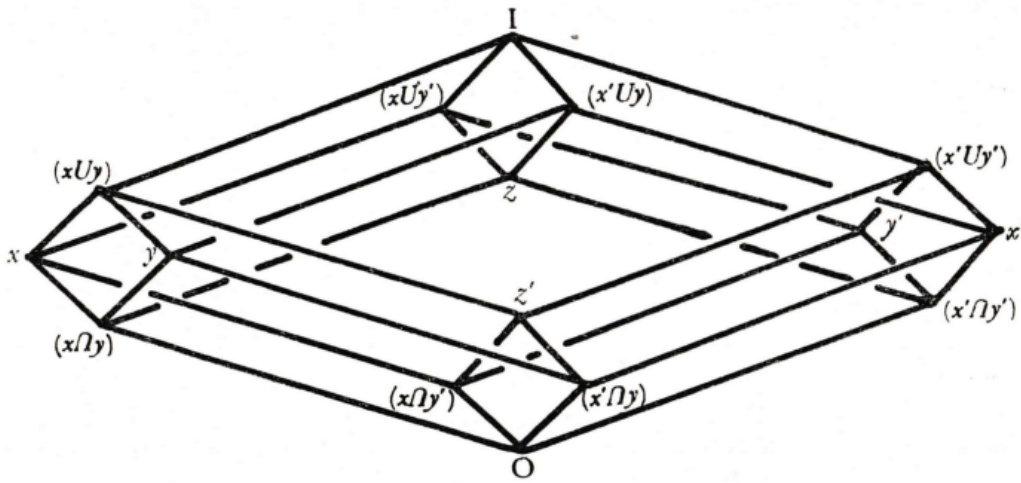


FIGURE III

Une caractéristique intéressante de ce diagramme de Hasse est que l'on peut montrer qu'il obéit à toutes les lois de l'analyse logique ordinaire de deux énoncés x et y lorsque x' et y' reçoivent les interprétations "non x " et "non y ", $x \cup y$ l'interprétation " x ou y " et $x \cap y$ l'interprétation " x et y ". Nous constatons alors que I est une tautologie et $\emptyset (O)$ une absurdité. Des diagrammes plus compliqués peuvent être utilisés pour représenter des situations impliquant plus de deux énoncés.

Références :

- Birkhoff, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, New York, 1948.
- Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie*, Springer, Berlin, 1955.

Les mathématiques en temps de guerre

Professeur G. H. Hardy

L'éditeur m'a demandé au début du trimestre d'écrire un article pour Eureka, et j'ai senti que je devais accepter l'invitation ; mais tous les sujets qu'il suggérait me semblaient à l'époque tout à fait impossibles.

“Mon avis sur le Tripos”¹ : je n'ai jamais vraiment été très intéressé par le Tripos depuis que j'étais étudiant, et je le suis encore moins maintenant qu'auparavant.

“Mes souvenirs de Cambridge” : je n'ai bien sûr pas encore atteint l'âge auquel on les écrit.

Ou enfin, comme il l'a formulé, “quelque chose de plus actuel, quelque chose sur les mathématiques et la guerre” - et cela me semblait le sujet le plus impossible de tous. Il me semblait que je n'avais rien à dire du tout sur la fonction des mathématiques par temps de guerre, sinon qu'elles me remplissaient d'un mépris intellectuel et d'un dégoût moral à l'égard de la guerre en général.

J'ai changé d'avis après réflexion, et je choisis le sujet qui me semblait à l'origine le pire. Les mathématiques, même mes mathématiques, ont leurs “usages” en temps de guerre, et je suppose que je devrais avoir quelque chose à dire à leur sujet ; et si mes opinions sont incohérentes ou controversées, alors peut-être que c'est tant mieux, puisque d'autres mathématiciens pourront être amenés à répondre.

Je ferais mieux de dire tout de suite que par “mathématiques” j'entends les vraies mathématiques, les mathématiques de Fermat, Euler, Gauss et Abel, et non la substance qui passe pour des mathématiques dans un laboratoire d'ingénierie. Je ne pense pas seulement aux mathématiques “pures” (bien que ce soit naturellement ma première préoccupation) ; je compte Maxwell, Einstein, Eddington et Dirac parmi les “vrais” mathématiciens. J'inclus tout le corpus de connaissances mathématiques qui a une valeur esthétique permanente, comme par exemple les meilleures mathématiques grecques, les mathématiques qui sont éternelles parce que le meilleur d'entre elles peut, comme la meilleure littérature, continuer à causer une satisfaction émotionnelle intense à des milliers de personnes après des milliers d'années. Mais je ne m'occupe pas de balistique ou d'aérodynamique, ni d'aucune des autres mathématiques spécialement conçues pour la guerre. Cela (quoi qu'on puisse penser de ses objectifs) est répugnant de laideur et intolérablement ennuyeux ; même Littlewood ne pouvait pas rendre la balistique respectable, et s'il ne le pouvait pas, qui le pourrait ?

Essayons donc un instant de congédier ces sous-produits sinistres des mathématiques et de fixer notre attention sur la chose réelle. Nous devons examiner si les vraies mathématiques servent des objectifs importants dans la guerre, et si les objectifs qu'elles servent sont bons ou mauvais. Devrions-nous être heureux ou désolés, fiers ou honteux, en temps de guerre, d'être des mathématiciens ?

Il est clair en tout cas que les vraies mathématiques (à part leurs éléments) n'ont aucune utilité directe dans la guerre. Personne n'a encore trouvé d'objectif guerrier à servir par la théorie des

1. Le tripos est l'équivalent du diplôme de Licence au Royaume-Uni.

nombres, la relativité ou la mécanique quantique, et il semble très peu probable que quiconque le fasse avant de nombreuses années. Et de cela je suis heureux, mais en disant cela je risque peut-être d'encourager un malentendu.

On suggère parfois que les mathématiciens purs se glorifient de l'“inutilité” de leur sujet, et se vantent comme d'un titre de gloire qu'il n'ait pas d'applications “pratiques”². L'imputation est généralement fondée sur une déclaration imprudente attribuée à Gauss³, qui m'a toujours semblé avoir été assez grossièrement mal interprétée. Si la théorie des nombres pouvait être employée à quelque fin pratique et honorable, si elle pouvait être tournée directement vers la promotion du bonheur humain ou le soulagement de la souffrance humaine (comme par exemple la physiologie et même la chimie le peuvent), alors sûrement ni Gauss ni aucun autre mathématicien n'aurait été assez fou pour décrier ou regretter de telles applications. Mais si, d'un autre côté, les applications de la science ont fait, dans l'ensemble, au moins autant de mal que de bien - et c'est un point de vue qui doit toujours être pris au sérieux, et surtout en temps de guerre - alors Gauss et les mathématiciens moins importants sont justifiés de se réjouir qu'il existe une science dont l'éloignement même des activités humaines ordinaires devrait la garder douce et propre.

Il serait agréable de penser que c'était la fin de l'affaire, mais nous ne pouvons pas nous débarrasser si facilement des mathématiques des ateliers (i.e. des mathématiques pratiques, ou appliquées). Indirectement, nous sommes responsables de leur existence. Les experts en artillerie et les concepteurs d'avions ne pourraient pas faire leur travail sans beaucoup de formation mathématique, et la meilleure formation mathématique est la formation en vraies mathématiques. De cette manière indirecte, même les meilleurs mathématiciens deviennent importants en temps de guerre, et les mathématiques sont recherchées pour toutes sortes d'objectifs. La plupart de ces objectifs sont ignobles et mornes - quoi de plus destructeur pour l'âme que la solution numérique d'équations différentielles ? - mais les hommes choisis pour ces tâches doivent être des mathématiciens et non des tâcherons de laboratoire, ne serait-ce que parce qu'ils sont mieux formés et ont de meilleurs cerveaux. Donc les mathématiques vont être vraiment importantes maintenant, que cela nous plaise ou non ; et il n'est pas si évident qu'il y paraisse d'abord que nous devrions le regretter, puisque cela dépend de notre vision générale de l'effet de la science sur la guerre.

Il y a deux points de vue nettement contrastés sur la guerre moderne “scientifique”. Le premier et le plus évident est que l'effet de la science sur la guerre est simplement de magnifier son horreur, à la fois en augmentant les souffrances de la minorité qui doit se battre et en les étendant à d'autres classes. C'est le point de vue orthodoxe, et il est clair que, si ce point de vue est juste, alors la seule défense possible réside dans la nécessité de la représaille. Mais il y a un point de vue très différent qui est aussi tout à fait défendable. On peut soutenir que la guerre moderne est moins horrible que la guerre des temps pré-scientifiques, du moins en ce qui concerne les combattants ; que les bombes sont probablement plus miséricordieuses que les baïonnettes ; que le gaz lacrymogène et le gaz mou-

2. On m'a reproché d'adopter moi-même ce point de vue. J'ai déclaré un jour, lors d'une conférence publiée par la suite, qu'“une science est dite utile si son développement tend à accentuer les inégalités existantes dans la répartition des richesses, ou favorise plus directement la destruction de vies humaines” ; cette phrase, écrite en 1915, a été citée dans l'Observer en 1939. Il s'agissait, bien entendu, d'une figure de rhétorique délibérée (mais peut-être excusable à l'époque où elle fut formulée).

3. Selon l'idée que, si les mathématiques sont la reine des sciences, alors la théorie des nombres est, en raison de son “inutilité” suprême, la reine des mathématiques. Je ne parviens pas à trouver la citation exacte.

tarde sont peut-être les armes les plus humaines jamais conçues par la science militaire, et que le point de vue “orthodoxe” repose uniquement sur un sentimentalisme à la pensée lâche. C’est le cas présenté avec tant de force par Haldane dans *Callinicus*. On peut aussi soutenir que l’égalisation des risques que la science était censée apporter serait à long terme salutaire ; que la vie d’un civil ne vaut pas plus que celle d’un soldat, ou celle d’une femme plus que celle d’un homme ; que rien ne vaut mieux que la concentration de la sauvagerie sur une classe particulière ; et qu’en bref, plus tôt la guerre sera “à fond” mieux ce sera. Et si c’est le bon point de vue, alors les scientifiques en général et les mathématiciens en particulier peuvent avoir un peu moins de raisons d’avoir honte de leur profession.

Il est très difficile d’établir un équilibre entre ces opinions extrêmes, et je n’essaierai pas de le faire. Je terminerai en me posant à moi-même, comme je pense que tout mathématicien devrait le faire, une question peut-être plus facile. Y a-t-il des acceptions (des sens) des mathématiques dans lesquels nous pouvons dire, avec une réelle confiance, que les mathématiques “font du bien” dans la guerre ? Je pense que j’en vois deux (bien que je ne puisse prétendre en tirer un grand réconfort).

En premier lieu, il est très probable que les mathématiques sauveront la vie d’un certain nombre de jeunes mathématiciens, puisque leur compétence technique sera appliquée à des fins “utiles” et les empêchera d’aller au front. “Conservation des capacités” est l’un des slogans officiels ; “capacités” signifie, en pratique, des capacités mathématiques, physiques ou chimiques ; et si quelques mathématiciens sont “conservés”, c’est en tout cas quelque chose de gagné. Cela peut être un peu dur pour les classiques, les historiens et les philosophes, dont les chances de mort sont d’autant augmentées ; mais personne ne va s’inquiéter des “humanités” maintenant. Il vaut mieux que certains soient sauvés, même s’ils ne sont pas nécessairement les plus dignes.

Deuxièmement, un homme plus âgé peut (s’il n’est pas trop vieux) trouver dans les mathématiques un analgésique incomparable. Car les mathématiques sont, de tous les arts et sciences, les plus austères et les plus éloignées, et un mathématicien devrait être de tous les hommes celui qui peut le plus facilement se réfugier là où, comme le dit Bertrand Russell, “au moins un de nos plus nobles élans peut le mieux échapper à l’exil morne du monde réel”. Mais il ne doit pas être trop vieux - il est dommage qu’il soit nécessaire de faire cette réserve très sérieuse. Les mathématiques ne sont pas un sujet contemplatif mais créatif ; personne ne peut en tirer beaucoup de consolation lorsqu’il a perdu le pouvoir ou le désir de créer ; et cela a tendance à arriver à un mathématicien assez tôt. C’est dommage, mais dans ce cas il n’a pas beaucoup d’importance de toute façon, et il serait stupide de s’inquiéter pour lui.

Qu'est-ce qu'un mathématicien ?
Harold Jeffreys, M.A., D.Sc., F.R.S.

Le professeur Hardy a défini les mathématiques en partie par l'énumération d'exemples brillants de mathématiciens, en partie par référence à tout le corpus de connaissances mathématiques ayant une valeur esthétique permanente. Les critères ne semblent pas très clairs. La valeur permanente dépend-elle des résultats ou de la méthode ? Beaucoup des résultats les plus importants des mathématiques pures sont maintenant énoncés d'une manière que leurs auteurs originaux auraient eu du mal à comprendre, et les preuves originales échoueraient souvent à passer les normes modernes, étant soit non rigoureuses, soit désespérément longues. Que ferait Fourier, par exemple, de son théorème tel que présenté par Titchmarsh, et qu'arriverait-il à un candidat au Tripos qui donnerait la preuve originale de Fourier ? Les *Principia* de Newton sont une œuvre monumentale, mais combien de cette œuvre a survécu sous une forme proche de sa forme originale ?

Il me semble que le mot "mathématicien" est utilisé dans plusieurs sens différents. Pour la plupart des gens, un mathématicien est quiconque peut résoudre une équation quadratique ; à Cambridge, c'est peut-être quiconque a suivi, ou se propose de suivre des cours de Tripos (*licence*) Mathématique, bien qu'il devienne douteux qu'il conserve le titre s'il suit aussi les cours d'un autre Tripos. Mais beaucoup de gens utilisent les mathématiques et ne se considèrent pas pour autant comme des mathématiciens. Pour ces personnes, les mathématiques sont un outil, et non une source directe d'intérêt. Le professeur Dirac, par exemple, se considère comme un physicien, et dit très explicitement qu'il considère les mathématiques comme un outil. Son travail, aussi, fait beaucoup plus appel aux physiciens expérimentaux qu'à la plupart des mathématiciens purs. Malgré l'admission de Dirac comme mathématicien par le professeur Hardy, Dirac a plus en commun avec Rutherford qu'avec Hardy. Or je pense que c'est une distinction authentique. Si les gens doivent être classés comme spécialistes, il me semble beaucoup plus important qu'ils soient classés en fonction de ce dont ils parlent qu'en fonction de la technique qu'ils utilisent. Dirac devrait être appelé physicien théoricien, pas mathématicien appliqué. Ce dernier terme serait alors libre pour désigner ceux qui s'intéressent aux problèmes physiques uniquement comme illustrations de méthodes mathématiques. Je ne mentionne pas de noms, considérant la description abusive.

Malheureusement, le Tripos Mathématique ne peut pas se passer des mathématiques appliquées. Les physiciens théoriciens, qu'ils espèrent faire un jour des avancées originales propres, ou qu'ils se contentent de pouvoir prendre un intérêt intelligent au travail des autres, doivent apprendre une certaine quantité de mathématiques pures et les principes généraux et méthodes de la physique théorique. Mais les problèmes d'intérêt physique intrinsèque s'avèrent généralement soit du par cœur, soit trop difficiles à faire dans le temps disponible lors d'un examen ! Le résultat est que la capacité à appliquer les principes ne peut être testée à l'examen que par référence à des expériences inventées pour la circonstance : une illustration de cela peut être par exemple le roulement d'une sphère à l'intérieur d'un cylindre vertical, sans aucun glissement au point de contact, ou des problèmes de potentiel pour des frontières qu'aucun expérimentateur ne pourrait construire, et ainsi de suite. C'est là le problème des Parties I et II : soit les questions apparemment sur la physique théorique seront trop difficiles, soit elles seront artificielles et insatisfaisantes, devenant ainsi des mathématiques appliquées. Dans la Partie III, la difficulté est moins sérieuse, puisqu'il est possible de considérer une question qui nécessite qu'on prenne trois heures pour en trouver la réponse, si on sait comment s'y prendre.

En dynamique, il y a une difficulté particulière. Toute la technique nécessaire pour l'énorme majorité des problèmes réels était connue de Laplace, à l'exception possible de la fonction lagrangienne modifiée, due à Routh. Pour ces problèmes, il faut encore utiliser les meilleures méthodes. La raison pour laquelle la dynamique à ce stade semble parfois stagnante est qu'elle a été la première branche de la physique théorique à être développée, et dans la mesure où Newton, d'Alembert, Lagrange, Euler et Laplace ont tous joué leur rôle dans l'amélioration des méthodes, il n'est guère surprenant qu'il reste peu à faire. Néanmoins, le mouvement gyroscopique et les petites oscillations restent intéressants (bien que les mathématiques associées soient maintenant appelées algèbre). Le développement plus avancé commençant par les équations de Hamilton et le théorème de Hamilton-Jacobi rend les problèmes plus difficiles plus faciles, mais il rend les plus faciles plus difficiles.

De gustibus... Mais je dois m'écarter de la remarque du professeur Hardy selon laquelle la balistique et l'aérodynamique sont laides et ennuyeuses. Il est intéressant que pour des corps de certaines formes se déplaçant dans un fluide, la force soit presque perpendiculaire à la direction du mouvement ; il y a de la beauté dans le théorème de circulation de la portance d'une aile et dans la théorie de la traînée induite de Prandtl ; il y en a aussi dans le traitement de G. I. Taylor de divers problèmes de corps se déplaçant à grande vitesse dans des fluides compressibles. Incidemment, le théorème de circulation explique aussi pourquoi les gens attrapent des crabes en ramant ; et le problème balistique est essentiellement le même que celui qui se pose dans l'évolution du système solaire, une question d'intérêt bien que de guère d'importance économique ou militaire. La possession des bonnes mélodies par le diable ne doit pas être contestée. Encore une fois, certains d'entre nous apprécient la solution numérique des équations différentielles. Moi-même avec modération ; mais où en serions-nous sans ceux, de Briggs et Napier au Comité des Tables de la British Association, qui trouvent leur principale joie dans le calcul numérique ? E. W. Brown pouvait écrire les équations du mouvement de la lune en deux minutes ; il lui a fallu trente ans pour les résoudre à la précision nécessaire pour la comparaison avec l'observation. Mais quand je l'ai rencontré, son âme semblait toujours très bien se porter. Et c'est là la différence ultime entre le mathématicien et le physicien théoricien. Le premier est satisfait d'une formule ou même d'un théorème d'existence. Le second ne considère ni l'un ni l'autre comme une réponse jusqu'à ce que le travail de calcul numérique ait été poussé à un stade où la comparaison avec l'observation est possible. Aucun physicien théoricien n'est plus mal en point pour connaître des mathématiques pures qu'il n'a jamais eu l'occasion d'utiliser ; mais il est plus mal en point si l'optique caractéristique du mathématicien pur le conduit à surestimer l'importance des mathématiques au détriment d'une compréhension de pourquoi les problèmes sont intéressants.

Achille et la Tortue - une considération

Combien de fois la profonde simplicité et la perspicacité des gens de la campagne confondent les sophismes des sur-éduqués ! C'est vers 450 av. J.-C. qu'un philosophe autodidacte exposa quatre paradoxes aux habitués des académies de la petite colonie grecque d'Élée. Depuis lors, quiconque a le moindre intérêt pour la philosophie ou les mathématiques en a été troublé et a développé des théories très ingénieuses pour les résoudre. Mais l'ingéniosité n'a pas été accompagnée de conclusion : en effet, les paradoxes "ont probablement occasionné plus de disputes non concluantes que toute quantité égale de mathématiques déguisées dans l'histoire".

Trois des énigmes de Zénon ont été traitées assez raisonnablement, mais l'autre, concernant Achille et la Tortue, n'a jamais reçu un traitement qui ne laisse pas au fond de l'esprit un vilain sentiment que celui ou celle qui a trouvé la solution a été un peu trop habile. L'argument est :

Achille court dix fois plus vite que la Tortue. Il lui donne une avance de 100 yards. Quand il a couru cela, la Tortue est à 10 yards d'avance. Quand il a couru ces 10 yards, la Tortue est à 1 yard d'avance. Quand il a couru ce 1 yard, la Tortue est à $1/10$ yard d'avance. Etc.

(a) Ainsi, selon cet argument, Achille ne rattrape jamais la Tortue.

(b) Alors que, bien sûr, nous savons qu'il le fait.

La manière habituelle de traiter cela est de dire que

$$100 + 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + \dots = 111\frac{1}{9}$$

et qu'Achille rattrape la Tortue après avoir parcouru $111\frac{1}{9}$ yards, mais on ne peut pas sommer une série infinie en un temps fini. Cela sonne, à première écoute, comme si cela éliminait la contradiction, mais plus on regarde, moins cela semble le faire, et si l'on essaie de réécrire la preuve de Zénon, on voit que les remarques n'ont aucun rapport avec le problème.

La solution complète introduit la métamathématique - des arguments sur des arguments. La métamathématique s'est développée presque entièrement au cours des 50 dernières années environ, et a produit de nombreux résultats surprenants et importants. Le plus réconfortant est la solution du *Entscheidungsproblem* de Hilbert : il a été démontré qu'aucune machine ne peut traiter toutes les mathématiques. Les résultats les plus pénibles concernent l'indécidabilité : on prend un système logique et on montre qu'un certain énoncé en son sein ne peut être démontré vrai et ne peut être démontré faux. Le paradoxe de Zénon sous sa forme correcte est précisément de ce genre.

Pour résoudre le paradoxe, nous modifions simplement l'énoncé (a) en : [Et là, malheureusement, il manque quelque chose.](#)

Ainsi, aucun argument de ce genre, aussi longtemps que nous continuons, ne nous conduira jamais à la conclusion qu'Achille rattrape la Tortue.

Cela entre-t-il maintenant en conflit avec l'énoncé (b) ? Seulement si l'on argumente : puisque notre argument ne peut pas montrer qu'Achille rattrape la Tortue, il doit être vrai qu'il ne le fait pas.

Nous ne pouvons affirmer cela que si nous sommes sûrs que tout énoncé peut être démontré vrai ou bien montré faux par de tels arguments. Mais ce n'est pas le cas, car ces arguments nous permettent de ne rien dire concernant, par exemple, où se trouve la Tortue quand Achille a parcouru 112 yards. Le paradoxe a donc disparu.

Nous pouvons introduire un système logique formel : Les symboles utilisés seront R , $(,)$, $, ;$, 0 . J'utiliserai les abréviations :

1 pour 00

2 pour 000

3 pour 0000

...

n pour $n + 1$ zéros à la suite.

J'ai juste un axiome : $R(0;1)$ et juste une règle de preuve : de $R(n;m)$ nous pouvons conclure $R(n+1;m+1)$.

Alors on peut facilement voir que $R(n;0)$ n'est prouvable pour aucun n . Si nous interprétons $R(n;m)$ comme signifiant que : Au n -ième stade de l'argument de Zénon, Achille est à $1000/10^m$ yards derrière la Tortue, sauf lorsque $m = 0$, où Achille est au niveau de la Tortue, nous voyons que ce système formalise la méthode d'argumentation de Zénon.

La chose vraiment palpitante est de voir à quel point les Grecs étaient près de découvrir la métamathématique, et il est amusant de spéculer sur ce qu'aurait été le cours de l'histoire s'ils l'avaient fait.

Art
J. L. Dawson, King's College

Prenez une fonction réelle $f(x, y)$ et un entier positif r . Choisissez des fonctions réelles $x_j = x(j)$ et $y_i = y(i)$, pour $i = 0, 1, \dots, m-1$ et $j = 0, 1, \dots, n-1$. Soit A_{ij} la matrice $m \times n$ définie comme suit : a_{ij} = parité du r -ième chiffre après la virgule du nombre $f(x_i, y_j)$. (C'est-à-dire $a_{ij} = 1$ si ce nombre est impair, 0 s'il est pair.) Écrivez la matrice, en remplaçant 1 par un symbole tel que l'*, et 0 par un espace. Cela produit un motif qui, avec des choix appropriés de $f(x, y)$, x_j , y_i , et r , peut être très beau.

Jusqu'à présent, je n'ai expérimenté qu'avec $x(j)$ et $y(i)$ comme fonctions linéaires de j et i respectivement. J'ai des raisons de croire, cependant, que de simples fonctions trigonométriques de j et i donneraient des résultats intéressants. Les meilleurs motifs produits ont été ceux où f est soit une combinaison de fonctions trigonométriques simples, soit d'exponentielles de telles fonctions. La raison en est que f est alors périodique, ce qui donne au motif une certaine symétrie. On constate qu'avec m et n autour de 100, et f une fonction prenant des valeurs entre 2 et -2 , les première et deuxième décimales ($r = 1$ ou 2) donnent les meilleurs résultats. En prenant $r = 3$, la troisième décimale change trop rapidement, et un motif aléatoire plutôt inintéressant émerge.

Il a été suggéré de tenter des motifs à symétrie circulaire. Cela n'a pas encore été fait, mais les résultats pourraient être prometteurs.

Les motifs 1, 2 et 3 des pages suivantes ont les descriptions :

	$f(x, y)$	m	n	r	$x(j)$	$y(i)$
(1)	$\sin x \cos y + \sin y$	100	100	2	$\pi j/98$	$\pi i/98$
(2)	$\sin x \sin y$	111	111	2	$\pi j/110$	$\pi i/110$
(3)	$\exp(\cos x + \cos y)$	100	100	2	$\pi j/198$	$\pi i/198$

Je réalise un motif de 6 pieds sur 4 du numéro (3), qui sera monté et encadré. J'espère publier une photographie de celui-ci dans le prochain numéro d'Eureka.

Mes remerciements vont à D. M. Stanford de King's, qui a eu le premier l'idée, et au University Mathematical Laboratory pour l'utilisation de l'ordinateur Titan.

1991.2.0/219/219

PATTERN 1

21

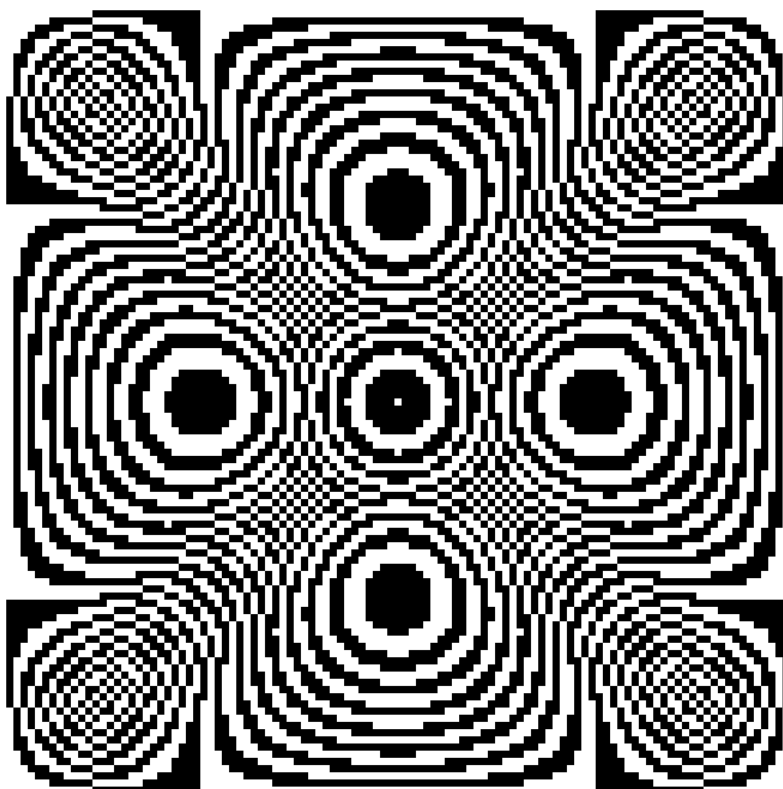
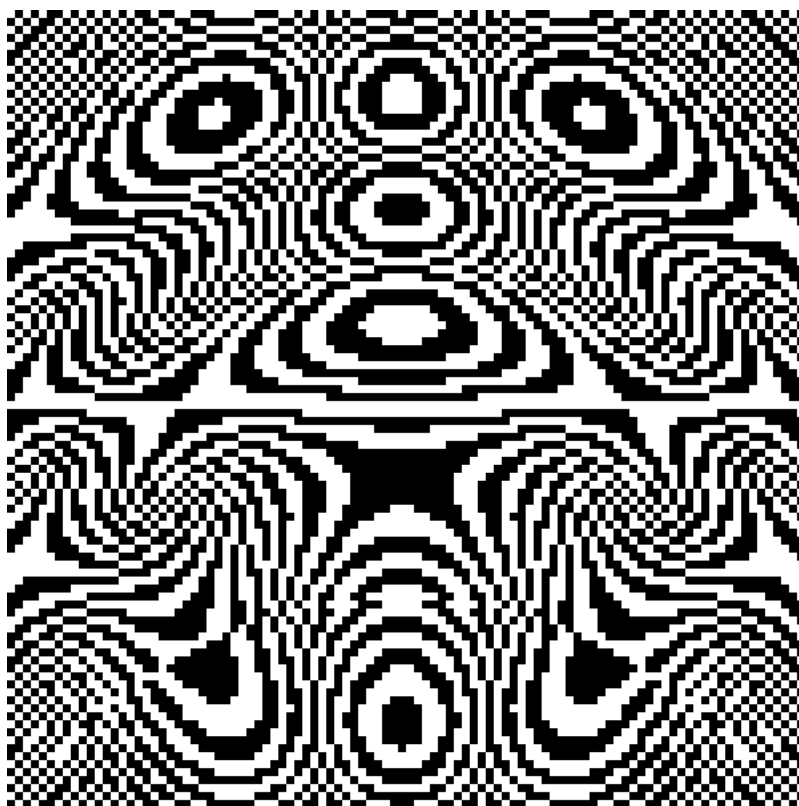
Author's Note: I thank the editor and anonymous reviewers for their helpful comments.

TigP 21 Cml85 24p28

22

1991. 2022/21/219

PATTERN 3





Programme ici : <https://denisevellachemla.eu/dawson-art.pdf> .

Petit encart

Il se trouve que le personnel éditorial actuel ne sait pas lire l'allemand et a toujours été perplexe devant le très grand nombre de B et de G allemands⁴ qui apparaissent dans certains textes mathématiques apparemment juste pour perdre le lecteur. C'est donc avec plaisir que nous avons découvert un alphabet allemand complet en préparant ce numéro, et avec une certaine surprise que nous constatons qu'il ne contient en fait qu'un seul B et un seul G. Peut-être que d'autres personnes auront-elles été aussi étonnées par ce fait ?

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

4. i.e. en font Fraktur.

Le dernier théorème de Fermat et le nombre d'or R. W. M. Wedderburn

Théorème 1. Si $a^n + b^n = c^n$ où a, b, c et n sont des entiers positifs, et si

$$n > \frac{1}{\frac{1}{2} - \log r}, \text{ alors } a, b \text{ et } c > \frac{n}{\frac{1}{n} + \log r}, \text{ où } r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(La quantité r est familière sous le nom de “nombre d’or” ou “section dorée”).

Démonstration. Nous supposons tout au long de la preuve que $a < b < c$, de sorte que notre assertion devient

$$a > \frac{n}{\frac{1}{n} + \log r}.$$

Nous prouvons d’abord deux lemmes. □

Lemme 2. (i) Pour un $n > 0$ fixé, l’équation $x^n + (x + 1)^n = (x + 2)^n$ a une et une seule racine positive, disons α_n .

(ii) Pour $0 < x < \alpha_n$, $x^n + (x + 1)^n < (x + 2)^n$, et pour $x > \alpha_n$, $x^n + (x + 1)^n > (x + 2)^n$.

(iii) $a \geq \alpha_n$.

Démonstration. Considérons

$$\frac{(x + 2)^n - (x + 1)^n}{x^n}$$

Si nous développons le numérateur par le théorème du binôme, puis divisons par le dénominateur, nous obtenons une combinaison linéaire de puissances négatives de x avec des coefficients positifs. Par conséquent, l’expression est strictement décroissante pour x positif. L’expression tend vers ∞ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, et tend vers 0 lorsque x tend vers ∞ . De plus, l’expression est $0 < x < \alpha_n$, $x = \alpha_n$ ou $x > \alpha_n$. D’où (i) et (ii).

Maintenant $a \leq b - 1$ et $c \geq b + 1$, et donc $a^n + b^n = c^n$ implique $(b - 1)^n + b^n \geq (b + 1)^n$. Donc par (ii), $b \geq \alpha_n + 1$. En notant alors que $(x + 1)^n - x^n$ est une fonction croissante de x (développer et noter les coefficients positifs), nous avons

$$a^n \geq (b + 1)^n - b^n \geq (\alpha_n + 2)^n - (\alpha_n + 1)^n = \alpha_n^n.$$

D’où (iii).

Lemme 3. Pour $x > 0$, (i) $(x + 2)^n > x^n \cdot \exp\left(\frac{2n}{x + 2}\right)$.

(ii) $(x + 1)^n < x^n \cdot \exp\left(\frac{n}{x}\right)$.

Démonstration. La preuve repose sur les inégalités suivantes :

$$\text{Pour } x > 0, \left(\frac{x+1}{x}\right)^x < e < \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$

Ce résultat est assez connu, mais j'en donne la preuve suivante :

$$\text{Soit } P(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \text{ et } Q(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$

$$\text{Alors } P^Q = Q^P = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{(x+1)}{x^{x+1}}}, \text{ et donc } \frac{\log P}{P} = \frac{\log Q}{Q} \quad (1)$$

Donc $\frac{\log y}{y}$ croît strictement de $y = 0$ à $y = e$, et décroît strictement pour $y > e$. Alors pour $x > 0$, nous avons $0 < P < Q$, ce qui, combiné avec (1), donne $P < e < Q$. C'est le résultat mentionné ci-dessus. Élever la première des inégalités à la puissance $\frac{n}{x}$ donne (ii), et élever la seconde à la puissance $\frac{2n}{x+2}$ donne (i). $\square$

Preuve du théorème. D'après le lemme 2, pour $x > 0$

$$\begin{aligned} (x+2)n - (x+1)n - xn &> xn \left[\exp\left(\frac{2n}{x+2}\right) - \exp\left(\frac{n}{x}\right) - 1 \right] \\ &= xn \left[\exp\left(\frac{-4n}{x(x+2)}\right) \exp\left(\frac{2n}{x}\right) - \exp\left(\frac{n}{x}\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Écrivons $k = \frac{n}{\frac{1}{n} + \log r}$. Cela donne $\exp\left(\frac{n}{k}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdot r$.

Supposons maintenant que $n > \frac{1}{\frac{1}{2} - \log r}$.

Cela donne $\frac{n}{2} - n \cdot \log r > 1$ c'est-à-dire $\frac{n}{2} > 1 + n \cdot \log r = \frac{n^2}{k}$, c'est-à-dire $k > 2n$.

Alors $\exp\left(\frac{-4n}{k(k+2)}\right) > \exp\left(\frac{-1}{n}\right)$. Substituons maintenant x dans (2).

$$\begin{aligned} (k+2)^n - (k+1)^n - k^n &> k^n \left[\exp\left(\frac{-1}{n}\right) \cdot r^2 \cdot \exp\left(\frac{2}{n}\right) - r \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] \\ &= k^n \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdot (r^2 - r - 1) + \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] \\ &> 0 \quad (\text{puisque } r^2 - r - 1 = 0) \end{aligned}$$

Donc par le lemme 1 (ii) et (iii), nous avons

$$a \geq \alpha_n > k = \frac{n}{\frac{1}{n} + \log r}.$$

$\square$

On a

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \log r} \simeq 52,7; \quad \frac{1}{\log r} \simeq 2,07795.$$

Je suis reconnaissant au professeur Davenport pour ses commentaires sur une première version de ce travail. □

Espoirs et craintes

P. A. M. Dirac

Professeur Lucasien de Mathématiques à la retraite de l'Université de Cambridge.

Un chercheur qui poursuit activement une idée se rapportant aux problèmes fondamentaux de la physique a, bien sûr, de grands espoirs que son idée conduira à une découverte importante. Mais il a aussi de grandes craintes - des craintes que quelque chose survienne qui ruine son idée et le ramène au point de départ dans sa recherche d'une direction de progrès. Les espoirs sont toujours accompagnés de craintes, et dans la recherche scientifique, les craintes sont susceptibles de devenir dominantes.

En raison de ces émotions, le chercheur ne procède pas avec l'esprit détaché et logique que l'on attendrait de quelqu'un ayant une formation scientifique, mais est sujet à diverses contraintes et inhibitions qui obstruent son chemin vers le succès. Il peut retarder le moment de prendre une mesure susceptible de forcer une confrontation rapide, et préférer d'abord grignoter des questions secondaires qui offrent une chance de remporter quelques succès mineurs et de gagner un peu de force avant d'affronter la crise.

Pour ces raisons, l'innovateur d'une nouvelle idée n'est pas toujours la meilleure personne pour la développer. Une autre personne, sans les craintes de l'innovateur, peut appliquer des méthodes plus audacieuses et réaliser des progrès plus rapides. Dans ce qui suit, il y aura quelques exemples qui illustrent cette situation.

Quiconque a étudié la relativité restreinte a dû se demander pourquoi Lorentz, après avoir obtenu correctement toutes les équations de la transformation de Lorentz, n'a pas alors franchi l'étape parfaitement naturelle consistant à considérer tous les référentiels comme étant sur un pied d'égalité et à arriver ainsi à la relativité de l'espace et du temps. L'histoire ne rapporte pas exactement ce qui a retenu Lorentz, mais cela n'a pu être qu'une sorte de peur, peut-être subconsciente. Il n'a pas osé s'aventurer dans un domaine de pensée complètement étranger à tout ce que quiconque avait jamais imaginé. Il a préféré rester sur le terrain solide des transformations mathématiques, où sa position était inattaquable. Il a fallu l'audace d'un homme plus jeune comme Einstein pour plonger dans un nouveau domaine.

L'innovateur de notre mécanique quantique actuelle était Heisenberg. À une époque où les physiciens atomiques patageaient avec les orbites de la théorie de Bohr-Sommerfeld et ressentaient le besoin d'une altération radicale des principes de base, Heisenberg a eu l'idée brillante de construire une nouvelle théorie entièrement en termes de quantités observables, des quantités liées aux observations sur les spectres. Celles-ci sont chacune liées à deux états atomiques, et la manière naturelle de les exprimer est sous forme de matrices. Ainsi, Heisenberg a été conduit à considérer les matrices comme des variables dynamiques.

Il n'avait pas beaucoup avancé dans le développement de cette idée avant de remarquer que ses variables dynamiques ne satisfaisaient pas la loi commutative de la multiplication. C'était très troublant. Il était inconcevable pour un physicien de cette époque que les variables dynamiques puissent être autre chose que des quantités algébriques ordinaires, et avec l'apparition de la non-commutation, Heisenberg a eu de graves craintes que toute sa belle idée doive être abandonnée.

Quand j'ai lu le premier article de Heisenberg sur le sujet, j'avais l'avantage sur lui de ne pas avoir ses craintes, car ce n'était pas ma propre idée qui était en jeu. J'étais donc capable de regarder la question d'un point de vue plus détaché.

Il m'a fallu seulement une semaine ou deux pour réaliser que la non-commutation qui alarmait Heisenberg était en réalité la caractéristique dominante de la nouvelle théorie. L'idée de construire une théorie entièrement en termes de quantités observées expérimentalement, bien qu'une doctrine philosophique très plaisante, n'était que d'importance secondaire pour l'établissement d'une nouvelle dynamique.

Mon premier travail sur la mécanique quantique était donc concentré sur le problème de l'introduction de la non-commutation dans la théorie dynamique. Ce n'était pas vraiment très difficile, car la théorie atomique précédente, la théorie des orbites de Bohr et Sommerfeld, était basée sur une forme de dynamique, la forme de Hamilton, qui s'est avérée spécialement adaptée à l'adaptation à l'algèbre non commutative.

Heisenberg a continué à développer sa théorie, en collaboration avec d'autres personnes à Göttingen. Je travaillais indépendamment d'eux, à part avoir reçu l'idée initiale de Heisenberg. Nous avons publié des articles à peu près en même temps, posant les fondations de la mécanique quantique. Nos styles étaient différents en raison des points de vue différents que nous avions, le mien étant basé sur la non-commutation et celui de Heisenberg sur l'utilisation de matrices construites à partir de quantités observables.

La mécanique quantique a été découverte tout à fait indépendamment par Schrödinger, travaillant sur des lignes entièrement différentes. Il avait ses propres difficultés. Il réfléchissait à la connexion mathématique entre les ondes et les particules qui avait été découverte quelque temps auparavant par de Broglie, et a finalement trouvé un moyen de la généraliser pour l'appliquer à un électron se déplaçant dans un champ électromagnétique. Il avait alors une très belle équation d'onde, conforme à la relativité. Il a procédé à son application à l'atome d'hydrogène et ses pires craintes se sont réalisées. Les résultats ne concordaient pas avec l'observation.

Nous savons maintenant que la divergence était due au spin de l'électron, qui était inconnu de Schrödinger à l'époque, bien que les expérimentateurs aient commencé à le soupçonner. C'était une situation très déprimante pour Schrödinger, et l'a conduit à abandonner le travail pendant quelques mois, et finalement à ne le publier que dans l'approximation non relativiste, dans laquelle la divergence n'apparaît pas. L'équation relativiste a été plus tard redécouverte par Klein et Gordon, qui n'avaient pas peur de publier une équation en désaccord avec l'observation, contrairement à Schrödinger. Ainsi l'équation porte maintenant leur nom. Elle a une certaine valeur pour décrire des mésons sans spin.

La mécanique quantique de Schrödinger s'est vite révélée équivalente à celle de Heisenberg, malgré leur apparente différence initiale. Les équations de base de la nouvelle mécanique étaient solidement établies, et il devenait nécessaire de trouver une interprétation physique pour elles. Avec l'algèbre non commutative, elle ne pouvait pas être aussi directe que dans la théorie classique. L'interpréta-

tion physique générale s'est avérée être seulement statistique. On pouvait calculer des probabilités, mais on ne pouvait généralement pas prédire un événement avec certitude.

Une difficulté apparut alors en relation avec l'équation relativiste de Klein et Gordon. La théorie donnait parfois des probabilités négatives. C'était une théorie satisfaisante seulement lorsqu'elle était utilisée de manière non relativiste. J'ai réfléchi à cela pendant un certain temps et j'ai finalement pensé à une nouvelle équation d'onde qui évitait les probabilités négatives. J'ai trouvé qu'elle donnait aussi automatiquement le spin de l'électron, un résultat très gratifiant. J'ai procédé à l'application de la nouvelle équation à l'atome d'hydrogène, en tenant compte des corrections relativistes seulement au premier ordre de précision pour simplifier les calculs, et j'ai trouvé un accord avec l'observation.

La chose naturelle à faire à ce stade aurait été de continuer aux ordres supérieurs de précision, mais je ne l'ai pas fait. J'avais peur qu'ils ne concordent pas avec l'observation. J'ai hâtivement rédigé un article avec seulement la précision du premier ordre et je l'ai publié. Ce faisant, j'avais le sentiment de consolider un succès limité, et même si les ordres supérieurs s'avéraient faux, il y aurait encore quelque chose sur quoi s'appuyer. Il restait à Darwin, qui ne partageait pas mes craintes, d'effectuer le calcul à tous les ordres de précision et de constater que les résultats étaient corrects.

Dans mon premier article sur le sujet (*Proc. Roy. Soc. A* 117, p. 610), on trouve l'équation

$$F = \left(\frac{W}{C} + \frac{e}{C} A_0 \right)^2 + \left(p + \frac{e}{C} A \right)^2 + m^2 c^2.$$

Le relativiste, s'il voit cette équation de nos jours, dira aussitôt : "Il y a une erreur ici. Les signes plus devant les deuxième et troisième termes de droite devraient être des moins." Il se demandera comment une erreur aussi flagrante a pu rester indétectée lors de la correction des épreuves. Il se demandera encore plus en voyant la même erreur perpétuée dans les équations suivantes.

L'explication est qu'il n'y a en réalité aucune erreur et que les choses ont été publiées comme l'auteur l'entendait. Les signes plus étaient l'expression d'une peur. À cette époque, la relativité était encore peu familière et les gens devaient continuellement s'accrocher à la symétrie de l'espace et du temps pour ne pas la perdre de vue. La symétrie ne devient parfaite que si l'on utilise une variable temporelle qui est $\sqrt{-1}$ fois le temps habituel et que l'on effectue un changement correspondant dans tous les quadrivecteurs. Avec cette notation, il n'y a pas d'erreurs dans l'article. Cette notation était fréquemment utilisée à l'époque, et il n'était pas jugé nécessaire de l'expliquer à chaque fois qu'elle était utilisée, car le contexte la rendait claire. L'arrivée de la nouvelle équation d'onde a plutôt forcé à l'abandonner, car elle devenait alors trop maladroite.

La nouvelle équation d'onde a conduit à une difficulté en ce qu'elle permettait des états d'énergie négative pour l'électron. Les énergies négatives ne sont jamais observées, mais elles ne pouvaient pas être ignorées dans la théorie. J'ai pensé à un moyen de les gérer, à savoir supposer que dans le monde physique, tous ou presque tous les états d'énergie négative sont occupés, de sorte que les électrons ordinaires d'énergie positive ne peuvent pas y sauter. Un état d'énergie négative inoccupé est un trou qui apparaît comme une particule avec une énergie positive et une charge positive.

Dès le début, j'avais le sentiment qu'il y aurait une symétrie entre les trous et les électrons. Ce sentiment était renforcé par la connaissance que dans la théorie chimique de la valence des atomes, il y a une quantité considérable de symétrie entre un électron situé à l'extérieur des couches fermées et un trou dans une couche fermée. Je ne voulais pas de cette symétrie. À cette époque, on croyait que toutes les charges positives étaient dans les protons, et le proton était beaucoup plus lourd que l'électron. Je lutais donc avec l'espoir que d'une manière ou d'une autre, l'interaction coulombienne entre les électrons conduirait à une dissymétrie entre les trous et les électrons, et j'avais peur que si cet espoir venait à échouer, toute l'idée doive être abandonnée. Il restait à d'autres, en particulier Weyl et Oppenheimer, de faire l'audacieuse assertion que la symétrie mathématique exigeait que les trous aient la même masse que les électrons.

Avec ces développements, la théorie des particules uniques a été mise en ordre. Il restait des problèmes concernant l'interaction. Si l'on établit des équations relativistes précises, on trouve que l'interaction est si violente que les équations n'ont pas de solutions. Les difficultés ne sont toujours pas résolues de manière satisfaisante et indiquent la nécessité d'un changement encore plus radical dans les fondements de la théorie atomique.