Résumé

$$Y_a(n) = X_a(n) + X_b(n) \tag{1}$$

$$Y_c(n) = X_c(n) + X_d(n) \tag{2}$$

$$X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \tag{3}$$

$$Y_a(n) + Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \tag{3'}$$

$$Z_a(n) + Z_c(n) = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor \tag{4}$$

$$X_a(n) + X_c(n) = Z_a(n) + \delta_{2p}(n) \tag{5}$$

avec $\delta_{2p}(n)$ qui vaut 1 dans le cas où n est le double d'un nombre premier et qui vaut 0 sinon.

$$X_b(n) + X_d(n) = Z_c(n) + \delta_{2c-imp}(n) \tag{6}$$

avec $\delta_{2c-imp}(n)$ qui vaut 1 dans le cas où n est un double d'impair composé, et qui vaut 0 sinon.

$$Z_c(n) - Y_a(n) = X_d(n) - X_a(n) - \delta_{2c-imp}(n) \tag{7}$$

$$Z_c(n) - Y_a(n) = Y_c(n) - Z_a(n) - \delta_{4k+2}(n) \tag{8}$$

avec $\delta_{4k+2}(n)$ qui vaut 1 si n est un double d'impair et 0 sinon.

$$Z_a(n) = \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_a}(n) \tag{9}$$

avec $\delta_{Z_a}(n)$ égal à -2 si n est le double d'un nombre premier et égal à -1 sinon ;

$$Z_c(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n) \tag{10}$$

avec $\delta_{Z_c}(n)$ égal à 1 si n est le double d'un nombre premier et égal à 0 sinon ;

$$Y_a(n) = \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) \tag{11}$$

avec $\delta_{Y_a}(n)$ égal à $-1, 0$ ou 1 ($\delta_{Y_a}(n)$ est égal à 0 quand $n-1$ et $n/2$ sont tous les deux premiers ou bien tous les deux composés, $\delta_{Y_a}(n)$ est égal à -1 quand $n-1$ est premier tandis que $n/2$ est composé, et enfin, $\delta_{Y_a}(n)$ est égal à 1 quand $n-1$ est composé tandis que $n/2$ est premier) ;

$$Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) \tag{12}$$

avec $\delta_{Y_c}(n)$ égal à $-1, 0$ ou 1.

Des propriétés 9 et 10, on déduit que $Z_c(n) - Z_a(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 2\,\pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_c - Z_a}(n)$ avec $\delta_{Z_c - Z_a}(n)$ égal à $1, 2$ ou 3.
$Z_c(n) - Z_a(n)$ semble globalement croissante avec de petites oscillations. On constate que $Z_c(n) > Z_a(n)$ pour $n \geqslant 240$. A partir de ce nombre, l'inégalité stricte sera toujours vérifiée car $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ augmente plus

souvent que $2\,\pi\left(\frac{n}{2}\right)$.

Des propriétés 9 et 11, on déduit que $Z_a(n) - Y_a(n) = 2\,\pi\left(\frac{n}{2}\right) - \pi(n) + \delta_{Z_a-Y_a}(n)$ avec $\delta_{Z_a-Y_a}(n)$ égal à $-3, -2, -1$ ou 0.
$Z_a(n) - Y_a(n)$ semble globalement croissante avec de petites oscillations. On constate que $Z_a(n) > Y_a(n)$ pour $n \geqslant 36$.

Des propriétés 10 et 12, on déduit que $Y_c(n) - Z_c(n) = 2\,\pi\left(\frac{n}{2}\right) - \pi(n) + \delta_{Y_c-Z_c}(n)$ avec $\delta_{Y_c-Z_c}(n)$ égal à $-2, -1, 0$ ou 1.
$Y_c(n) - Z_c(n)$ est une fonction croissante de n. On constate que $Y_c(n) > Z_c(n)$ pour $n \geqslant 24$.

Des propriétés 9, 10, 11 et 12, on déduit :

- $Z_c(n) - Y_a(n) = \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n) + \delta_{Z_c-Y_a}(n)$ avec $\delta_{Z_c-Y_a}(n)$ égal à $-1, 0, 1$ ou 2 ;
- $Y_c(n) - Z_a(n) = \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n) + \delta_{Y_c-Z_a}(n)$ avec $\delta_{Y_c-Z_a}(n)$ égal à $0, 1, 2$ ou 3 ;
- $X_d(n) - X_a(n) = Z_c(n) - Y_a(n) + \delta_{2c-imp}(n) = \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n) + \delta_{X_d-X_a}(n)$ avec $\delta_{X_d-X_a}(n)$ égal à $-1, 0, 1$ ou 2.

La fonction $\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n)$ qui apparaît dans tous les membres droits des égalités ci-dessus est globalement croissante avec de petites oscillations. Elle s'annule pour $n = 122$.

Dans la mesure où $\left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + 1$ quand n est un double de pair (i.e. pour un nombre pair sur deux) tandis que $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$ quand $n+1$ est premier (beaucoup moins souvent que pour un nombre pair sur deux), pour tout n supérieur à une valeur petite (i.e. $n > 122$), on aura systématiquement $\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n) > 0$.

Etude de l'inégalité $X_a(n) > 0$

Pour être assuré que $X_a(n)$ soit toujours non nul, il faudrait montrer qu'à partir d'une certaine valeur de n, l'inégalité

$$X_d(n) > \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n) + 2$$

est toujours vérifiée.

En effet, cette inégalité, combinée avec l'invariant $X_d(n) - X_a(n) = \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n) + \delta_{X_d-X_a}(n)$, aurait pour conséquenc qu'$X_a(n)$ serait toujours strictement positif.

On constate que

$$X_d(n) > \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n) + 2$$

à partir de $n \geqslant 30$. L'ensemble des propriétés invariantes découvertes précédemment doit avoir ce nouvel invariant comme conséquence. Mais pour pouvoir mettre en oeuvre une telle déduction, peut-être faudrait-il trouver de façon similaire des invariants sur l'évolution des variables $X_a(n), X_b(n), X_c(n)$ et $X_d(n)$.