Résumé des petits résultats de novembre dans le plan complexe, Denise Vella-Chemla, 24 novembre 2024

1) J'avais oublié l'égalité suivante et je l'ai redécouverte par programme, c'est ballot.

$$\frac{1}{n^{a+ib}} \times n = n^{(1-a)-ib}$$

2) On peut calculer directement la partie réelle et la partie imaginaire de n^{a+ib} en appliquant ces formules :

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}+ib} &= (\cosh(a \ln n) + \sinh(a \ln n)) \,.\, (\cos(b \ln n) + i \sin(b \ln n)) \\ &= (\cos(i\, a \ln n) - i \sin(i\, a \ln n)) \,.\, (\cos(b \ln n) + i \sin(b \ln n)) \end{aligned}$$

Pour $\dfrac{1}{n^{a+ib}}$, la partie réelle est $n^{-a} \cos(b \ln n)$ et la partie imaginaire est $-(n^{-a}) \sin(b \ln n)$.

3) Il existe des nombres bases qui permettent de calculer les racines k-ièmes de n en prenant la puissance d'un de ces nombres (constantes spéciales) élevé à l'exposant le logarithme de n. On a ainsi

$$\text{Base\_racine\_}k^{\ln n} = \sqrt[k]{n}.$$

avec par exemple

$$\begin{aligned} &\text{Base\_racine\_2} = \exp(1/2) = 1.6487212707... \\ &\text{Base\_racine\_3} = \exp(1/3) = 1.39561242509... \\ &... \\ &\text{Base\_racine\_2}^{\ln n} = \sqrt{n} \\ &\text{Base\_racine\_3}^{\ln n} = \sqrt[3]{n}... \end{aligned}$$

4) On peut "presque" calculer les parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction ζ en calculant, pour n entier à partir de 2,

$$2 \times \sqrt{-\left(n \ln n \frac{180}{2\pi}\right)}$$

5) On trouve comme un rythme de valse [1,1,2,3,3,4,5,5,6,7,7,8,...] en appliquant la fonction ci-dessous aux parties imaginaires des zéros de ζ (avec $z_k = b_k$ dans $Z_k = 0.5 + i\ b_k$, Z_k un zéro de ζ) ; le rythme s'observe dans les *parties entières* des images :

$$f(z_k) = \exp\left(W\left(-\left(\left(\frac{z_k}{2}\right)^2\right)\left(\frac{2\pi}{180}\right)\right)\right)$$

avec $W(z)$ la fonction de Lambert. On obtient une "valse" similaire en utilisant la fonction plus simple $g(k) = (2/3 + 4/5)\, k$.