

On reprend ici la formule de calcul exact de $\pi(n)$ qu'on avait proposée en septembre 2018, basée sur l'utilisation des valuations p -adiques¹.

On a pour tout entier $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{n=2}^{\sqrt{m}} v(m, n) \\ \pi(m) &= \sum_{n=2}^{\sqrt{m}} f(m) \\ &= \sum_{n=2}^{\sqrt{m}} \left[\sum_{n=1}^{\sqrt{m}} v(m, n) \right] \end{aligned}$$

Voici le programme de calcul de la formule et son résultat.

```
1 from math import floor, sqrt
2
3 def vp(n, p):
4     if (p == 1):
5         return 1
6     if ((n % p) != 0):
7         return 0
8     else:
9         return vp(n/p,p)+1
10
11 nmax = 100 ;
12 pix = 0 ;
13 for m in range(2, nmax+1):
14     print(str(m)+" : ", end='')
15     somme = 0
16     rac = floor(sqrt(m))
17     for n in range(1, rac+1):
18         somme = somme+vp(m, n)
19     print(str(somme)+" ", end=''),
20     pix = pix+floor(1.0/float(somme))
21     print(str(pix)+" ")
```

1. découvertes dans <http://denise.vella.chemla.free.fr/fevrier2006.pdf>, j'ai travaillé une première fois sur la formule proposée ici dans ces deux notes <http://denise.vella.chemla.free.fr/fracto.pdf> et <http://denise.vella.chemla.free.fr/fractosimple.pdf>.

```

Terminal
Fichier  Édition  Affichage  Rechercher  Terminal  Aide
(base) vella-chemla@vellachemla-X510UA:~/Desktop/centfois$ python co
2 : 1 1
3 : 1 2
4 : 3 2
5 : 1 3
6 : 2 3
7 : 1 4
8 : 4 4
9 : 3 4
10 : 2 4
11 : 1 5
12 : 4 5
13 : 1 6
14 : 2 6
15 : 2 6
16 : 7 6
17 : 1 7
18 : 4 7
19 : 1 8
20 : 4 8
21 : 2 8
22 : 2 8
23 : 1 9
24 : 6 9
25 : 3 9
26 : 2 9
27 : 4 9
28 : 4 9
29 : 1 10
30 : 4 10
31 : 1 11
32 : 8 11
33 : 2 11
34 : 2 11
35 : 2 11
36 : 8 11
37 : 1 12
38 : 2 12
39 : 2 12
40 : 6 12
41 : 1 13
42 : 4 13
43 : 1 14
44 : 4 14
45 : 4 14
46 : 2 14
47 : 1 15
48 : 9 15
49 : 3 15
50 : 4 15
51 : 2 15
52 : 4 15
53 : 1 16
54 : 6 16
55 : 2 16
56 : 6 16
57 : 2 16
58 : 2 16
59 : 1 17
60 : 7 17
61 : 1 18
62 : 2 18
63 : 4 18
64 : 12 18
65 : 2 18
66 : 4 18
67 : 1 19
68 : 4 19
69 : 2 19
70 : 4 19
71 : 1 20
72 : 10 20
73 : 1 21
74 : 2 21
75 : 4 21
76 : 4 21
77 : 2 21
78 : 4 21
79 : 1 22
80 : 9 22
81 : 7 22
82 : 2 22
83 : 1 23
84 : 7 23
85 : 2 23
86 : 2 23
87 : 2 23
88 : 6 23
89 : 1 24
90 : 7 24
91 : 2 24
92 : 4 24
93 : 2 24
94 : 2 24
95 : 2 24
96 : 11 24
97 : 1 25
98 : 4 25
99 : 4 25
100 : 8 25

```

On rappelle quelques propriétés de la valuation p -adique :

- Soient m et n deux entiers ; m divise n si $v_p(m) \leq v_p(n)$ pour tout nombre premier p ;
- si a et b sont des entiers non nuls,

$$v_p(\text{pgcd}(a, b)) = \min(v_p(a), v_p(b))$$

$$v_p(\text{ppcm}(a, b)) = \max(v_p(a), v_p(b)) ;$$
- si a et b sont des entiers non nuls et p un nombre premier quelconque,

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$$

$$v_p(a + b) \geq \min(v_p(a), v_p(b)).$$