Sauts de puces, Denise Vella-Chemla, décembre 2024

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit n un nombre pair.

Considérons un ensemble E de cardinal $\dfrac{n-2}{4}$ contenant des triplets défini par

$$E = \{(r,b,q) \mid 3 \leq r \leq n/2 \text{ et } n = r + b \times q \text{ et } 1 \leq b \leq \sqrt{n} \text{ et } b \in \mathcal{P} \cup \{1\}\}$$

et un ensemble F de cardinal $\dfrac{n-2}{4}$ contenant des triplets défini par

$$F = \{(r,b,q) \mid 3 \leq r \leq n/2 \text{ et } 0 = r - b \times q \text{ et } 1 \leq b \leq \sqrt{n} \text{ et } b \in \mathcal{P} \cup \{1\}\}$$

Voyons E comme l'union de deux sous-ensembles disjoints EH et EB, les triplets de EB étant de la forme $(r,1,q)$ (avec r un nombre composé et q un nombre premier tel que $\frac{n}{2} \leq q \leq n$) et les triplets de EH étant de la forme (r,b,q) avec $b \neq 1$.

Similairement, voyons F comme l'union de deux sous-ensembles disjoints FH et FB, les triplets de FB étant de la forme $(r,1,q)$ et les triplets de FH étant de la forme (r,b,q) avec $b \neq 1$.

Les triplets de l'ensemble EH peuvent être totalement ordonnés selon leur première coordonnée (r). Notons ainsi l'ordre en question [1] :

$$(r_1, b_1, q_1) < (r_2, b_2, q_2) < \ldots < (r_{\frac{n-2}{4}}, b_{\frac{n-2}{4}}, q_{\frac{n-2}{4}}),$$

avec

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_{\frac{n-2}{4}}.$$

L'ordre croissant sur les r_i entraîne un ordre décroissant sur les produit $b_i \times q_i$ puisque toutes les formes $r_i + b_i \times q_i$ sont autant de représentations différentes du nombre n.

Les triplets de l'ensemble FB sont de la forme $(r,1,r)$ (puisque $0 = r - 1 \times r$) avec r un nombre premier[2].

Comme il y a au moins un nombre premier entre 3 et $n/2$, l'ensemble EB n'est pas vide.

Comme il y a au moins un nombre premier entre $n/2$ et n, l'ensemble FB n'est pas vide (théorème de Tchebychev démontrant le Postulat de Bertrand).

Il existe une bijection de E dans F qui envoie chaque triplet de E sur le triplet de F qui a la même première coordonnée que lui.

On comprend aisément qu'une décomposition de Goldbach, si elle existe, associe par cette bijection un élément de EB à un élément de FB.

[1] On se place "côté n".
[2] On se place "côté 0".

Pourquoi n'est-il pas possible pour une bijection ainsi définie qu'elle envoie tout élément de EB vers un élément de FH et tout élément de FB vers un élément de EH ?

Si c'était le cas, la bijection enverrait une égalité de la forme (a) $n = r + p(\times 1)$ sur une égalité de la forme (b) $0 = r - p'$, qu'on transforme en (c) $0 + n = r - p' \times q + n$, qui, utilisée conjointement avec (a), amène $r + p = r - p' \times q + n$, qu'on réécrit en $n = p + p' \times q$, avec $p \geq \frac{n}{2}$.

Mais de telles nouvelles égalités engendrées ne pourraient s'intercaler entre les produits ordonnés dans l'ordre croissant qu'on avait mis au jour, dans la mesure où l'intervalle est déjà "plein comme un œuf" (pour sûr, il faudrait dire cela plus mathématiquement).