Sommes de complexes sur disque unité (Denise Vella-Chemla, 9.9.2020)

Dans le but de comprendre l'espace des nombres premiers, mais surtout dans le but de comprendre la raison pour laquelle tout nombre pair (supérieur à 4) est la somme de deux nombres premiers, on continue de programmer un certain nombre de visualisations sur le disque-unité [1].

On choisit un ensemble de nombres entiers $E = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ et on représente par des points sur un disque "normalisé", pour chaque nombre entier x inférieur à une certaine valeur, sa somme de complexes associée :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=|E|} e^{\frac{2i\pi(x \bmod n_k)}{n_k}}$$

L'ensemble E étant fini, du fait de phénomènes de périodicité constatables et explicables, des nombres périodiquement espacés ont même image par f. Dit autrement, la trajectoire, si on considère qu'un doigt imaginaire passe du point représentant un entier au point représentant l'entier suivant, se referme, et est parcourue à nouveau périodiquement. Comme on choisit informatiquement de représenter cette trajectoire avec ce qu'on appelle des couleurs transparentes, on voit la trajectoire devenir plus foncée plus elle est parcourue de fois.

On représente les nombres premiers en rouge, les nombres composés en vert. Les figures 1 et 2 ci-dessous montrent les images des nombres jusqu'à 123 à gauche, en "agrégeant les restes" selon les nombres premiers jumeaux 11 et 13. La visualisation pour les nombres jusqu'à 1000 (à droite) est identique mais plus foncée, la trajectoire a été parcourue plusieurs fois. Par exemple, 1 et 144 ayant même image dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, leur image est la même et la rosace se referme. La "rosace" a été parcourue de nombreuses fois en passant par les mêmes points à droite. On voit qu'elle frôle le point origine $(0, 0)$ au centre.

Sur la figure 3, on a souhaité montrer la forme d'une demi-trajectoire, il y a passage par l'origine symbolisée par une étoile. La figure 4 est destiné à faire comprendre la symétrie haut-bas du dessin : les restes ayant été pris selon les deux nombres premiers jumeaux 5 et 7, on voit que les images des nombres dont la somme est 35=5.7 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Sur la figure 5, comme attendu, dans la mesure où on a constaté que les restes selon deux nombres premiers jumeaux permettent d'obtenir une symétrie simple, on a l'idée de prendre des nombres premiers dont la différence est égale à 8, ici 11 et 19, pour obtenir une rosace à 8 symétries.

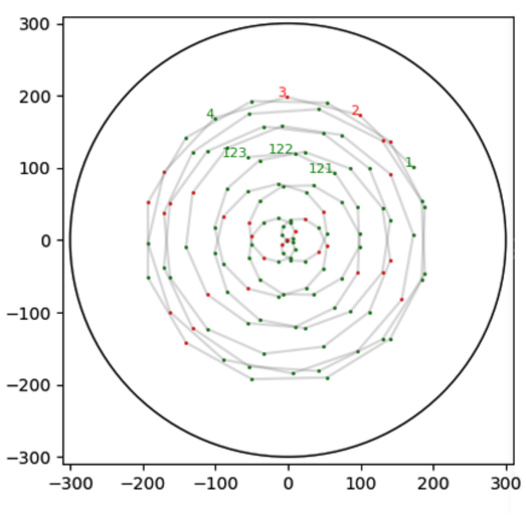

Fig. 1 : E={11,13} jusqu'à 123.

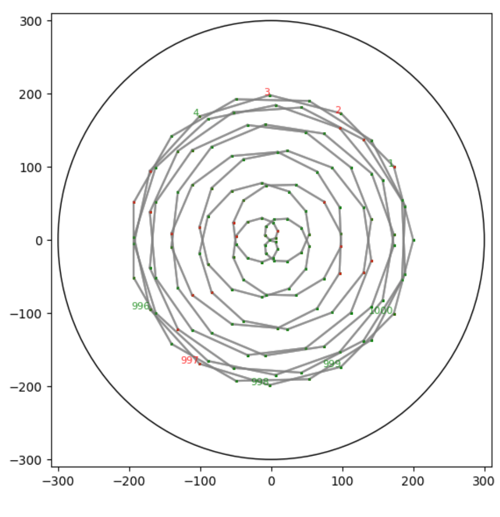

Fig. 2 : E={11,13} jusqu'à 1000.

1. On a laissé un "écart" entre le bord des visualisations et le cercle censé représenter le disque-unité pour des raisons pratiques, on peut toujours normaliser, ici on a pris comme rayon du cercle deux fois et demi le nombre de nombres premiers utilisés pour les calculs de complexes.

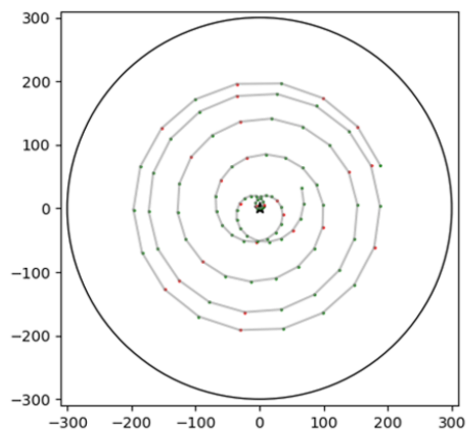

Fig. 3 : E={17,19} jusqu'à 100.

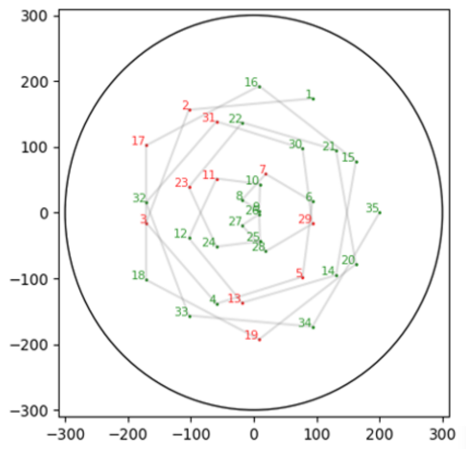

Fig. 4 : E={5,7} jusqu'à 35.

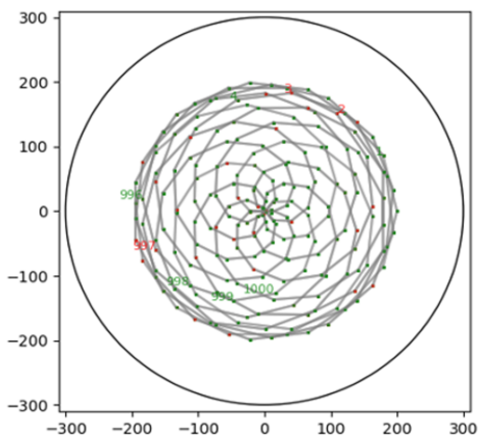

Fig. 5 : E={11,19} périodicité 8.

Sur les figures 6 et 7, on visualise selon $15 = 3.5$ et $21 = 3.7$ et la périodicité est de 105. On a utilisé deux couleurs différentes pour la moitié initiale de la rosace (en gris) et la seconde moitié (en orange). Ces courbes ressemblent à des cardioides.

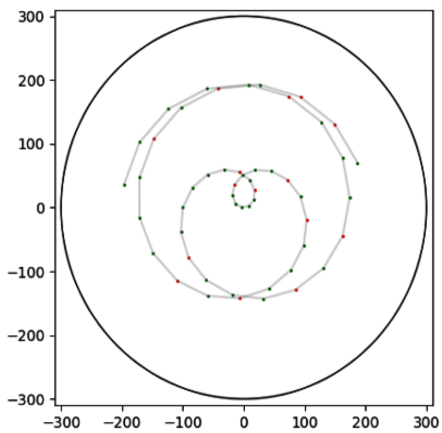

Fig. 6 : E={15,21}

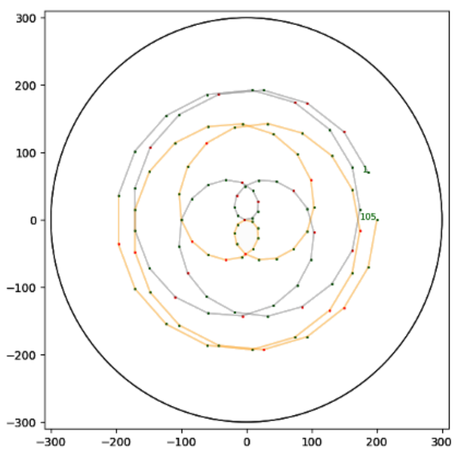

Fig. 7 : E={15,21}, voir la symétrie

Les figures 8 et 9, restes calculés selon 3 et $27 = 3^3$ ou bien selon 5 et $125 = 5^3$ montrent bien sur celle de gauche un “triangle de triangles emboîtés”, c’est-à-dire que les formes sont suffisamment triangulaires pour que nous les visualisions bien mais tout de même insuffisamment triangulaires pour qu’il y ait globalement un déplacement ne ramenant à l’origine qu’en 27 coups. La figure de droite montre de la même façon des pentagones dont les sommets sont sur les 5 cercles.

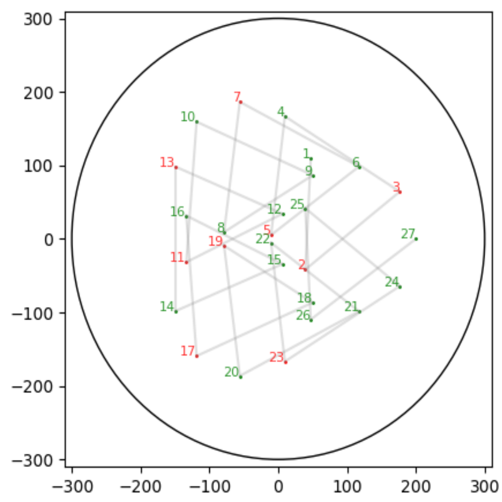

Fig. 8 : E={3,27} jusqu’à 27.

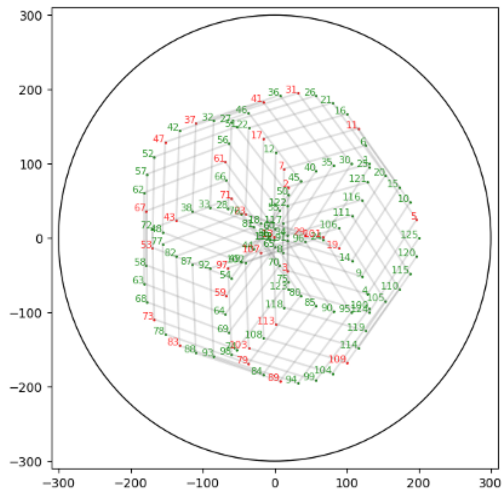

Fig. 9 : E={5,125} jusqu’à 125.

La figure 10, restes calculés selon les nombres 4, 3 et 5, montre le retour sur 1 au bout de 60 avec des sortes de “triangles-carrés-pentagones”. Les sommes de deux nombres de part et d’autre de l’axe des abscisses (l’un en haut et son symétrique en bas) valent 60=4.3.5 ou l’un de ses multiples (par exemple 61+59=120).

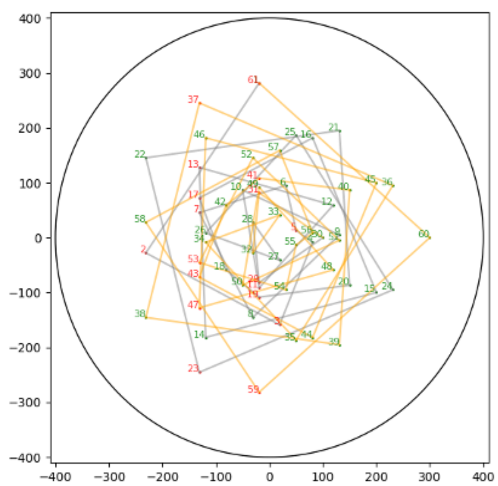

Fig. 10 : E={4,3,5} jusqu’à 61 qui revient sur 1.

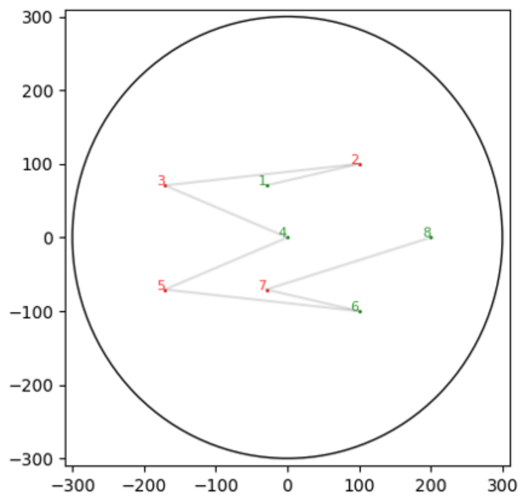

Fig. 11 : E={2,8} jusqu'à 8.

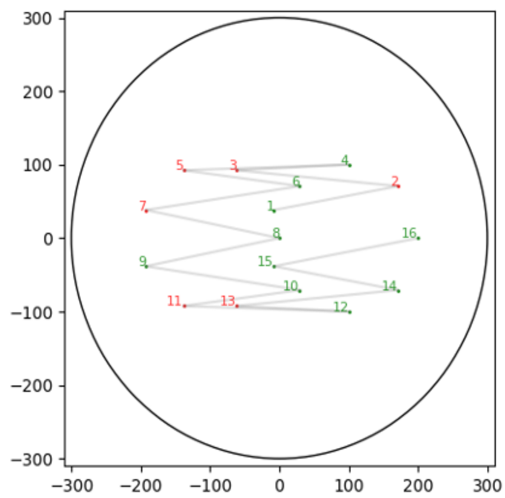

Fig. 12 : E={2,16} jusqu'à 16.

Sur les figures 11 et 12, avec des restes selon des nombres puissances de 2 (2 et 8, ou 2 et 16), comme sur un écheveau, on passe de nombre en nombre de gauche à droite et inversement, et le nombre de "replis" est de plus en plus élevé plus la puissance de 2 choisie augmente.

Enfin, la Figure 13 montre qu'on n'obtient pas le même résultat en calculant les restes selon $E = \{4, 6\}$ ou selon $E = \{2, 2, 3, 3\}$ (24 a 3 décompositions de Goldbach, 5+19, 7+17, 11.13). Cependant, l'addition étant commutative dans le corps des complexes, les résultats obtenus sont identiques indépendamment de l'ordre dans lequel sont utilisés les restes modulaires.

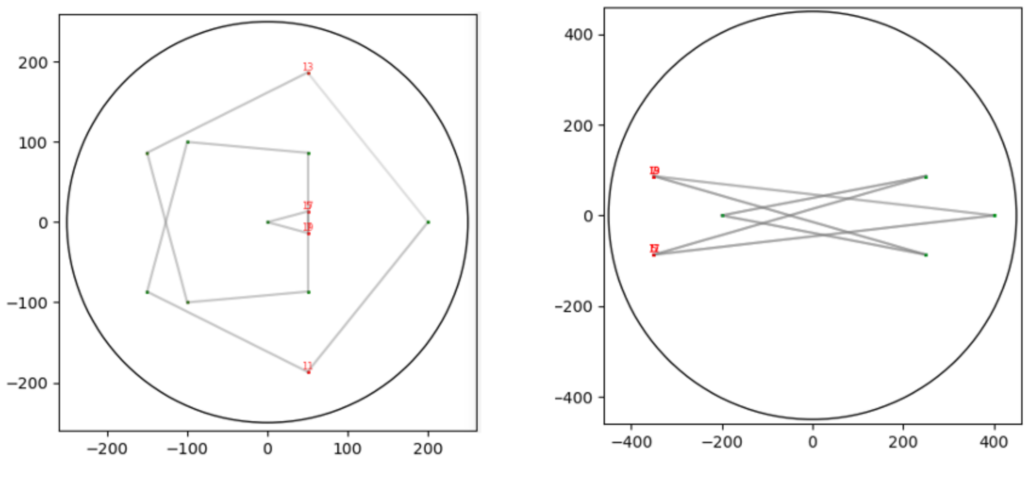

Fig. 13 : Pour $n = 24$, selon que l'on prend
E={4,6} à gauche et E={2,2,3,3} à droite, le résultat est différent.

Revenons maintenant à notre cas emblématique du nombre 98, qui a 3 décompositions de Goldbach, 19+79, 31+67 et 37+61. Voyons si les décompositions se placent de façon particulière sur les "spirales". On voit sur le dessin de droite que l'une des 3 décompositions est très éloignée sur la gauche.

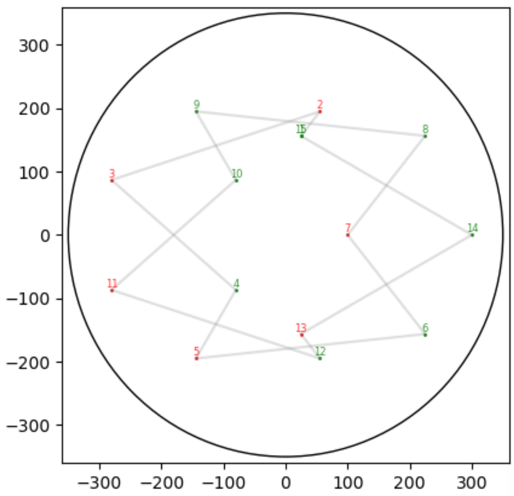

Fig. 14 : E={2,7,7} pour 98 jusqu'à 14.

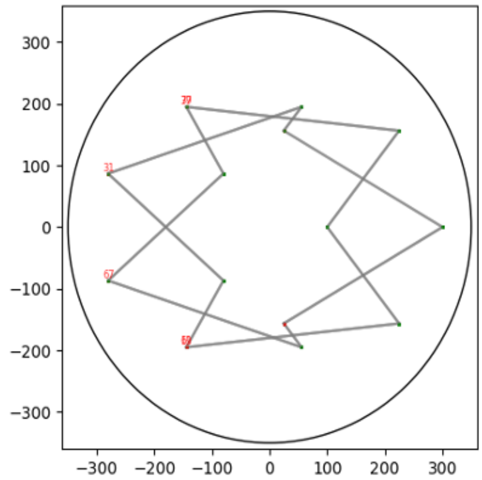

Fig. 15 : E={2,7,7} pour 98 plus "loin".

On rappelle les visualisations associées en utilisant les seuls restes selon les nombres premiers 2 ou 3, avec ou sans chemin de passage entre les nombres successifs.

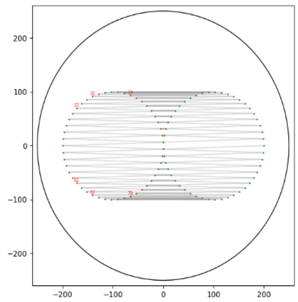

Fig. 16 : E={2, 98} décompositions sur deux cercles avec chemins entre nombres successifs.

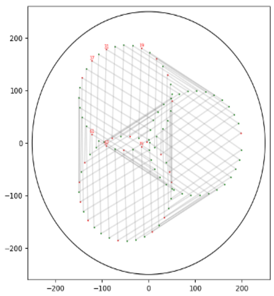

Fig. 17 : E={3, 98} décompositions sur trois cercles avec chemins entre nombres successifs.

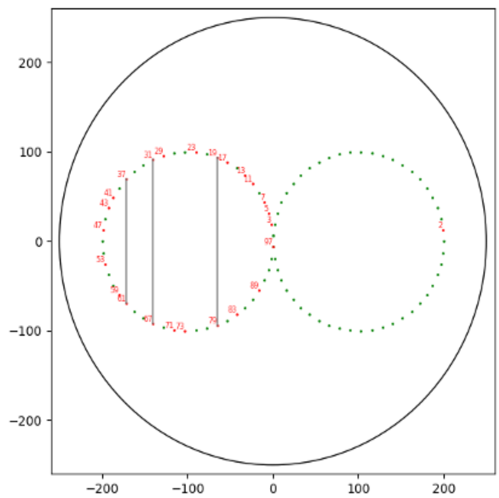

Fig. 18 : E={2, 98} décompositions sur deux cercles.

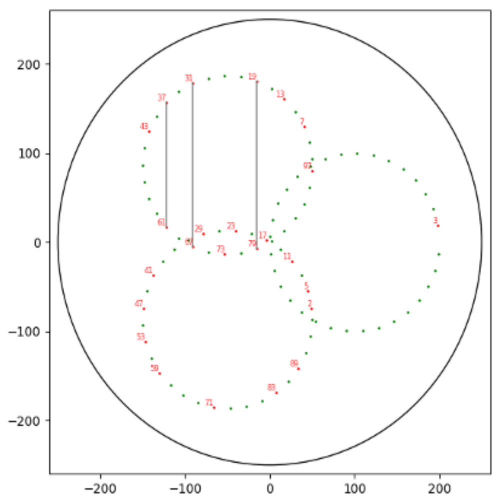

Fig. 19 : E={3, 98} décompositions sur deux cercles.