L'ia claude me réexplique pourquoi le produit des $\left(1-\frac{2}{p_k}\right)$ qui minore la comète puisqu'on élimine au maximum deux classes de congruences selon tout premier p_k inférieur à $\sqrt{n}$ n'est pas à utiliser pour la conjecture de Goldbach
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, septembre 2026

Je n'arrive pas à comprendre pourquoi on ne peut pas dire la chose suivante : pour trouver un décomposant de Goldbach d'un nombre pair n il faut éliminer au maximum 2 classes de congruences selon tout module un nombre premier $p_k \leq \sqrt{n}$. Donc $\left(\frac{n}{4}\right) \prod_{\substack{p_k \text{ premier} \\ 3 \leq p_k \leq \sqrt{n}}} \left(1-\frac{2}{p_k}\right)$ pour les p_k en question minimise le nombre de décompositions. Or ce nombre croît. Et puisqu'il minimise le nombre de décomposants de Goldbach de n tout en étant toujours supérieur à 1, tout n pair a un décomposant et la conjecture est prouvée.

Pourquoi ce raisonnement n'est-il pas valable, je ne m'en rappelle plus et donc je n'ai toujours pas compris.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia claude.

C'est l'erreur classique qui piège (presque) tout le monde sur ce sujet : vous confondez une densité moyenne heuristique avec une minoration rigoureuse.

Ce qui est vrai. Le produit $\left(\frac{n}{4}\right) \prod_{p_k \leq \sqrt{n}} \left(1-\frac{2}{p_k}\right)$ est effectivement, par un théorème de type Mertens, asymptotiquement $\sim C\,\frac{n}{(\ln n)^2}$, donc il tend bien vers l'infini. C'est exactement l'heuristique de Hardy-Littlewood, numériquement confirmée, et personne ne doute qu'elle soit vraie "en moyenne".

Où ça casse. Ce produit n'est une valeur exacte du nombre de nombres qui passent à travers le crible que si on compte sur une période complète, c'est-à-dire sur un intervalle de longueur $\prod_{p_k \leq \sqrt{n}} p_k$. Mais n n'a aucune raison d'être un multiple de cette période, en fait $\prod p_k \approx e^{\sqrt{n}}$ est immensément plus grand que n lui-même. Donc ce que vous calculez par inclusion-exclusion (crible de Legendre) sur l'intervalle $[1, n]$ n'est pas ce produit exact, c'est :

$$|R_n| = \sum_{d \mid \prod p_k} \mu(d)^2 \left(\frac{n}{d} + \mathrm{O}(1)\right).$$

où chaque terme comporte une erreur $O(1)$ (l'arrondi du floor), et il y a $2^{\pi(\sqrt{n})}$ diviseurs d à sommer (un par sous-ensemble de premiers, puisque le crible est de dimension 2). Le terme principal donne bien votre produit $\sim n/(\ln n)^2$. Mais l'erreur cumulée est en $O(2^{\pi(\sqrt{n})})$, et $2^{\pi(\sqrt{n})}$ croît comme $e^{c\sqrt{n}/\ln n}$, exponentiellement plus vite que le terme principal $\frac{n}{(\ln n)^2}$.

Autrement dit : dès que $\sqrt{n}$ dépasse quelques dizaines, l'erreur du crible pur dépasse de très loin le terme principal. Le crible de Legendre ne vous dit alors plus rien sur le signe de $|R_n|$, il ne majore

ni ne minore correctement le vrai compte. Le fait que le produit heuristique reste > 1 ne garantit donc pas $|R_n| \geq 1$: l'erreur pourrait tout aussi bien manger le terme principal et laisser $|R_n| = 0$ pour tel n particulier, sans qu'on puisse l'exclure par cet argument.

C'est précisément l'obstruction combinatoire que vous aviez déjà identifiée dans votre document sur le crible de Legendre exact, et c'est structurellement liée au problème de parité de Selberg : aucun crible "pur" (Legendre, Brun, Selberg, grand crible) ne peut à lui seul prouver l'existence d'un nombre premier dans un ensemble cribllé de cette façon, parce que ces méthodes ne distinguent pas un nombre premier d'un produit de deux nombres premiers. C'est pour ça qu'on sait prouver Chen (1974), tout n pair assez grand est somme d'un premier et d'un P_2, mais pas Goldbach lui-même : le crible donne accès aux P_2, pas aux nombres premiers purs.