Tentative inaboutie de démonstration par récurrence de la conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

1/12/12

1 Introduction

On cherche à démontrer que la conjecture de Goldbach est vérifiée par tout nombre pair supérieur à 6. Cette conjecture stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.
Un décomposant de Goldbach d'un nombre pair donné x doit vérifier deux propriétés : la première est qu'il doit être premier, la seconde est qu'il ne doit être congru à x selon aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{x}$, ce qui garantit que son complémentaire à x est premier également.
Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers :

$$\mathbb{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \ldots\}$$

remarque : $1 \notin \mathbb{P}$
Notons certaines parties de l'ensemble des nombres premiers de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(y) = \{x \in \mathbb{P} / x \leq y\}$$

La conjecture de Goldbach est équivalente à :

$$\begin{array}{l} \forall n \in 2\mathbb{N}, n > 4, \exists p \in \mathbb{P}(n/2), \forall m \in \mathbb{P}(\sqrt{n}), \\ \quad p \not\equiv n \ (mod\ m) \end{array}$$

Car :

$$\begin{array}{l} \forall n \in 2\mathbb{N}, n > 4, \exists p \in \mathbb{P}(n/2), \forall m \in \mathbb{P}(\sqrt{n}), \\ \quad p \not\equiv n \ (mod\ m) \Leftrightarrow n - p \not\equiv 0 \ (mod\ m) \Leftrightarrow n - p \ premier \end{array}$$

On se servira dans la démonstration du fait que x et $x+6$ ont les mêmes restes (sont congrus) selon les modules 2 et 3.

Remarques peut-être utiles :
On peut considérer trois sortes de nombres pairs : les $6k$, les $6k+2$ et les $6k+4$. Un $6k$ ne peut être un $2p$ avec p premier ; les $2p$ présentent la particularité qu'ils vérifient trivialement la conjecture de Goldbach.
Un $6k$ est la somme d'un $6k'+1$ et d'un $6k''-1$.
Un $6k+2$ est la somme d'un $6k'+1$ et d'un $6k''+1$.
Un $6k+4$ est la somme d'un $6k'-1$ et d'un $6k''-1$.
Les nombres de la progression arithmétique $6k+1$ sont alternativement de la forme $4n+1$ et $4n+3$. Il en est de même des nombres de la progression arithmétique $6k-1$. Le produit de deux nombres de la forme $4n+3$ est un $4n+1$. De même du produit de deux nombres de la forme $4n+1$.
Le produit d'un nombre de la forme $4n+1$ par un nombre de la forme $4n+3$ est un $4n+3$.
Les considérations ci-dessus pour les formes selon le module 4 peuvent être intéressantes en cas d'utilisation de la loi de réciprocité quadratique.

2 Démonstration par récurrence

On doit noter que le nombre de modules inférieurs ou égaux à $\sqrt{x}$ est égal au nombre de modules inférieurs ou égaux à $\sqrt{x+6}$ dans la plupart des cas. Il y a cependant trois possibilités de nombres pour lesquels cela n'est pas le cas, lorsque $x+6$ est de la forme $p^2+1,\ p^2+3$ *ou encore* p^2+5.

1) *Premier cas* : il y a autant de modules inférieurs ou égaux à $\sqrt{x}$ que de modules inférieurs ou égaux à $\sqrt{x+6}$.
Hypothèse : on a trouvé une décomposition de Goldbach de x, i.e. on a trouvé pour x un nombre premier p tel que $x = p+q$ avec q premier également. p vérifie donc les deux propriétés d'être premier et de n'être congru à x selon aucun des modules premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{x}$ (peut-être vaut-il mieux considérer qu'on a trouvé une décomposition de Goldbach pour chaque entier compris entre 6 et x, ces décompositions pouvant ou non partager leur premier décomposant.)
Mais alors p est également incongru à $x+6$ selon tout module inférieur ou égal à $\sqrt{x+6}$ (faux : cela n'est vrai que pour les modules 2 et 3 et il faut réfléchir pour les modules plus grands car x et $x+6$ ne partagent pas leurs restes selon les modules premiers supérieurs ou égaux à 5 et donc p peut très bien n'être congru à x selon aucun module inférieur à $\sqrt{x}$ mais l'être à $x+6$ selon les modules en question).
Conclusion : on a donc trouvé une décomposition de $x+6$, i.e. on a trouvé pour $x+6$ un nombre premier p tel que $x+6 = p+q'$ avec q' premier également.

1) *Deuxième, troisième et quatrième cas* : il y a un module de plus à considérer car $x+6$ est de la forme $p^2+1,\ p^2+3$ *ou encore* p^2+5.

Annexe : les partages des décomposants de Goldbach entre les nombres pairs x et $x+6$ pour les nombres de 8 à 100

Faisons apparaître dans le tableau ci-dessous les trois progressions arithmétiques de 6 en 6 à partir de 8, 10 ou 12 dont les nombres x partagent systématiquement un décomposant de Goldbach avec $x+6$. Les premières lignes du tableau concernent la première progression arithmétique contenant les nombres de la forme $8+6k$ (ou $6k+2$) et les décomposants partagés par un nombre et son successeur dans cette progression dans les lignes qui suivent. Les lignes 5 et suivantes concernent les nombres de la progression arithmétique $10+6k$ (ou $6k+4$) et les lignes 8 et suivantes concernent ceux de la progression $12+6k$ (ou $6k$).

8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
3	3	3	3	3		3	3	3	3		3		3	3	
				7	7	7			31	31	31			19	19
											7	7	7		
10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
3	3	3		3	3	3			3	3	3	3			3
		5	5	5		5	5	5	5			41	41	41	41
12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	
5	5	5		5	5	5			5	5	5	5			
		7	7	7		7	7	7	7			17	17	17	

La conjecture : "x supérieur à 6 partage toujours un décomposant de Goldbach avec $x+6$" (i.e. $x = p+q, x+6 = p+q'$ *avec* p*,* q *et* q' *premiers*) a été vérifiée par ordinateur jusqu'à 16.10^8. Elle s'explique par le fait qu'un des nombres premiers décomposants de Goldbach de x étant non congru à x selon tout module inférieur à $\sqrt{x}$, aura vraiment toutes les chances d'être également non congru à $x+6$ selon tout module inférieur à $\sqrt{x+6}$.